

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Sui materiali iperelastici anisotropi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 40 (1968), p. 237-251

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__237_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SUI MATERIALI IPERELASTICI ANISOTROPI

DIONIGI GALLETTO *)

Considerata, con riferimento al caso degli spostamenti finiti, la decomposizione del gradiente di deformazione nel prodotto del tensore di dilatazione sinistro, \mathbf{V} , per il tensore rotazione ¹⁾, \mathbf{R} , rappresentante la rotazione locale, in quanto segue viene messo in evidenza il modo con cui detti tensori contribuiscono alla potenza dello stress.

Con riferimento al caso iperelastico, è ben noto che, se si pensa decomposto il gradiente di deformazione nel prodotto del tensore \mathbf{R} per il tensore di dilatazione destro, l'espressione della potenza dello stress non distingue un sistema isotropo da uno anisotropo. Invece, se si usa per il gradiente di deformazione la decomposizione che fa intervenire \mathbf{V} , la potenza dello stress non ha la medesima espressione nei due casi, isotropo e anisotropo. Tale fatto è sostanzialmente contenuto in [2], ma si mette meglio in evidenza in questo lavoro ove si prova, tra l'altro, che la rotazione contribuisce alla potenza dello stress unicamente nel definire la differenza tra il caso isotropo e quello anisotropo.

Inoltre, dalla conseguente decomposizione della potenza dello stress, si deduce che nel caso dei materiali iperelastici valgono certe

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico, Università, Padova.

¹⁾ \mathbf{R} è in realtà un *doppio vettore* nel senso precisato al n. 15 dell'Appendice di [5]. Il motivo per cui qua è chiamato tensore è dovuto al fatto che nella presente esposizione si fa uso della stessa terminologia di [4].

relazioni sintetiche che legano lo stress alla deformazione, validità che, limitatamente al caso isotropo, è già stata osservata in [2]. Dalla suddetta decomposizione segue inoltre che l'energia di deformazione deve soddisfare a un certo sistema di equazioni che ne condiziona la struttura, il quale però non esprime altro che il fatto, ben noto, che l'energia di deformazione deve dipendere dai suddetti tensori unicamente per il tramite del tensore destro di Cauchy-Green, o, il che è lo stesso, per il tramite del tensore di deformazione.

A conclusione si mostra che, utilizzando in parte gli sviluppi conseguiti, possono dedursi in modo semplice e conciso le note formule di Almansi-Signorini, la cui deduzione è altrimenti alquanto laboriosa ²⁾.

Va infine osservato che tutte le deduzioni sono state operate in assenza del vincolo interno di incomprimibilità, essendo alquanto semplice la loro estensione al caso in cui sia presente detto vincolo.

1. — Una conveniente trasformazione dell'espressione della potenza dello stress.

Facendo uso, come già in [2], della stessa terminologia e degli stessi simboli di [4], si indicherà con \mathbf{x} la configurazione di riferimento di un intorno di una particella materiale, con \mathbf{F} il gradiente di deformazione nel passaggio dalla configurazione \mathbf{x} a quella attuale, con \mathbf{B} il tensore di Cauchy-Green sinistro, definito da

$$(1.1) \quad \mathbf{B} = \mathbf{F}\mathbf{F}^T,$$

con \mathbf{T} il tensore degli sforzi, che si supporrà simmetrico (caso dei materiali semplici).

Conviene ricordare la decomposizione

$$(1.2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{V}\mathbf{R},$$

dove \mathbf{V} è il tensore dilatazione sinistro e \mathbf{R} il tensore rotazione, in conseguenza della quale risulta

$$(1.3) \quad \mathbf{B} = \mathbf{V}^2.$$

²⁾ Cfr. [3], 2,3.

Ciò premesso, dall'espressione della potenza dello stress ³⁾

$$(1.4) \quad P = tr [\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{F}}]$$

si ottiene

$$(1.5) \quad P = tr [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{V}}] + tr [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T],$$

o anche, tenendo presente la simmetria di $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V}^{-1}$,

$$(1.5') \quad P = \frac{1}{2} tr [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V}^{-1} \dot{\mathbf{B}}] + tr [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V} \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T].$$

* * *

Si supponga lo spazio riferito a un sistema di coordinate a cui la configurazione \mathbf{x} è solidale, coordinate che, per semplicità ⁴⁾, si supporranno cartesiane trirettangole, ad es. levogire, e che verranno indicate con x^i o con $x^{i'}$ a seconda che si riferiscano a punti della configurazione di riferimento o della configurazione attuale.

Le componenti di \mathbf{F} e di \mathbf{F}^{-1} sono date da

$$x_i^{i'} \equiv \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \quad x_i^i = \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}},$$

mentre le relazioni (1.1), (1.2) si esplicitano in ⁵⁾

$$B^{i'j'} = x_i^{i'} x_j^{j'}, \quad x_i^{i'} = V_{j'}^{i'} R^{j'}_i,$$

dove il significato dei simboli è ovvio.

Dato che la matrice che ha per elementi le componenti del tensore \mathbf{R} (matrice che verrà ancora indicata con \mathbf{R}) è ortogonale, si può considerare una nuova terna cartesiana trirettangola, anch'essa levogira, tale che le componenti rispetto alla terna di riferimento del

³⁾ Cfr. [5], 217.

⁴⁾ E' comunque il caso di notare che i risultati che vengono stabiliti nel presente lavoro hanno carattere tensoriale e pertanto si possono esprimere in coordinate generali, sia pure con qualche difficoltà di carattere formale.

⁵⁾ Come al solito, salvo diverso, esplicito avviso, si è sottinteso il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti.

suo α' -esimo versore $\mathbf{k}_{\alpha'}$ costituiscano la α' -esima colonna della matrice \mathbf{R} . In simboli

$$(1.6) \quad R^{\nu'}_i = \delta_i^{\alpha'} k^{\nu'}_{\alpha'}$$

Come è ben noto, la velocità angolare rispetto alla terna di riferimento del sistema rigido solidale alla nuova terna risulta data da

$$(1.7) \quad \omega = \frac{1}{2} \mathbf{k}_{\alpha'} \times \dot{\mathbf{k}}_{\alpha'},$$

dove il simbolo \times indica il prodotto vettoriale. Pertanto, indicando con $\eta_{\nu'h'k'}$ il tensore di Ricci e ricordando (1.6), le componenti di ω rispetto alla terna fissa risultano date da

$$\omega_{\nu'} = \frac{1}{2} \eta_{\nu'h'k'} k^{h'}_{\alpha'} \dot{k}^{k'}_{\alpha'} \equiv \frac{1}{2} \eta_{\nu'h'k'} R^{h'}_i \dot{R}^{k'}_i,$$

ossia da

$$(1.8) \quad \omega_{\nu'} = -\frac{1}{2} \eta_{\nu'h'k'} \Omega^{h'k'},$$

dove con $\Omega^{h'k'}$ si sono indicate le componenti rispetto alla terna di riferimento del tensore

$$(1.9) \quad \Omega = \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T.$$

Resta così precisato il significato di tale tensore che compare in (1.5), tensore che risulta emisimmetrico in quanto è $\dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = -\mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T$, come subito segue da $\mathbf{R} \mathbf{R}^T = \mathbf{1}$.

Siano ora $\lambda^{\nu'}$ tre parametri atti a individuare l'orientamento della terna mobile rispetto alla terna fissa, quali possono essere, ad es., i tre angoli di Eulero o le tre componenti del vettore caratteristico della rotazione ⁶⁾.

⁶⁾ Cfr., ad es., [1], 2.

Ovviamente risulta

$$\mathbf{k}_{\alpha'} = \frac{\partial \mathbf{k}_{\alpha'}}{\partial \lambda^{\nu'}} \dot{\lambda}^{\nu'}$$

e quindi, qualora si introducano i vettori

$$\omega_{\nu'} = \frac{1}{2} \mathbf{k}_{\alpha'} \times \frac{\partial \mathbf{k}_{\alpha'}}{\partial \lambda^{\nu'}},$$

si ha da (1.7)

$$\omega = \omega_{\nu'} \lambda^{\nu'}.$$

Avendosi da (1.8)

$$\Omega^{\nu'\nu'} = - \eta^{\nu'\nu'} \omega_{\nu'},$$

risulta quindi

$$(1.10) \quad \Omega^{\nu'\nu'} = - \eta^{\nu'\nu'} \omega_{\nu'} \lambda^{\nu'}$$

Tenendo presente (1.9), la relazione (1.5) si scrive

$$(1.11) \quad P = \text{tr} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{V}}] + \text{tr} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}],$$

la quale mette bene in evidenza il modo con cui la dilatazione \mathbf{V} e la rotazione locale contribuiscono alla potenza dello stress.

Ad esempio, se il tensore $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T}$ è simmetrico, come accade nel caso dei materiali elastici isotropi ⁷⁾, tenuto conto che $\boldsymbol{\Omega}$ è emisimmetrico si riconosce che il contributo dato alla potenza P dalla rotazione locale risulta nullo. Detta potenza viene in tal caso ad identificarsi con il contributo dato ad essa dalla dilatazione \mathbf{V} ⁸⁾:

$$P = \text{tr} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \dot{\mathbf{V}}].$$

Ricordando quanto osservato al n. 1, d) di [2] circa i due tensori \mathbf{T} e \mathbf{V} , il secondo termine che compare a secondo membro di (1.11) caratterizza la differenza tra le espressioni della potenza dello stress nei casi in cui i due tensori non abbiano oppure abbiano in comune la (o una) terna di assi principali. Si ha quindi che la rotazione locale contribuisce a P unicamente nel definire detta differenza.

⁷⁾ Cfr. ad es., [2], 1, b), d).

⁸⁾ Si veda anche [2], 2, b).

Ponendo, per brevità,

$$(1.12) \quad \mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V}^{-1},$$

la relazione (1.5') si scrive

$$(1.13) \quad P = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\mathbf{W} \dot{\mathbf{B}}] + \operatorname{tr} [\mathbf{W} \mathbf{B} \dot{\boldsymbol{\Omega}}],$$

ossia, qualora si facciano intervenire le componenti dei tensori che in essa compaiono e si ricordi (1.10),

$$(1.14) \quad P = \frac{1}{2} W^{ij} \dot{B}_{ij} + \eta^{ijk} W_{ij} B_k{}^j \omega_{\nu} \dot{\lambda}^{\nu}.$$

Nel caso in cui risulti simmetrico il tensore $\mathbf{T}^* = \mathbf{B}^{-1} \mathbf{T}$ (o, il che è lo stesso, $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T}$) l'espressione (1.13) si riduce a quella stabilita al n. 1, d) di [2]. E' inoltre il caso di tener presente che la simmetria di \mathbf{T}^* implica $\mathbf{T}^* = \mathbf{W}$.

2. — Sull'energia di deformazione per i materiali iperelastici.

Si supponga ora che il materiale sia iperelastico, ossia che esista per esso una funzione σ , energia di deformazione, per la quale si abbia

$$(2.1) \quad \varrho \dot{\sigma} = P,$$

dove ϱ è la densità nella configurazione attuale.

In tali ipotesi è noto che la simmetria di $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T}$ caratterizza i materiali isotropi (cfr. [2], 1, d) e 2, a)) e pertanto si può concludere che il secondo termine che compare a secondo membro di (1.11) caratterizza la differenza tra le espressioni della potenza dello stress nei casi isotropo e anisotropo (e che la rotazione locale contribuisce a P unicamente nel definire detta differenza).

Stante (1.14) e (2.1), si ha che σ si può ritenere funzione delle nove variabili rappresentate dalle sei componenti di \mathbf{B} ⁹⁾ e dai tre parametri λ^{ν} : $\sigma = \bar{\sigma}(B^{ij}, \lambda^{\nu})$. Pertanto, supposto il materiale esente da vincoli interni e qualora si ritengano indipendenti le suddette

⁹⁾ Si tenga presente che risulta $\varrho = \frac{1}{\det \|\mathbf{V}\|} \varrho_R$, con ϱ densità in \mathbf{x} .

variabili, (2.1) e (1.14) implicano

$$(2.2) \quad W^{i'j'} = 2\rho \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{i'j'}},$$

$$(2.3) \quad \eta^{i'k'v'} W_{i'j'} B_{k'j'} \omega_{v'} = \rho \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda^{v'}},$$

dove, nel dedurre (2.2), non si è tenuto conto della simmetria delle componenti di \mathbf{B} .

Le relazioni (2.2) e (2.3) a loro volta implicano che l'energia di deformazione non può essere funzione arbitraria delle nove variabili $B^{i'j'}, \lambda^{v'}$, ma deve soddisfare alle seguenti tre equazioni

$$(2.4) \quad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda^{v'}} = 2\eta^{i'k'v'} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{i'j'}} B_{k'j'} \omega_{v'}.$$

Dette equazioni sono identicamente soddisfatte nel caso in cui sia da escludere una dipendenza di σ dai parametri $\lambda^{v'}$, ossia nel caso in cui risulti $\sigma = \bar{\sigma}(\mathbf{B})$, proprietà questa che è caratteristica dei materiali iperelastici isotropi¹⁰⁾. In tal caso infatti è simmetrico il tensore $\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T}$ e risulta quindi $\mathbf{W} \mathbf{B} = \mathbf{T}$. I secondi membri delle equazioni (2.4) si riducono quindi a $2\eta^{i'k'v'} T_{i'k'} \omega_{v'}$ e sono perciò identicamente nulli, stante la simmetria del tensore \mathbf{T} .

Non è difficile constatare che il sistema di equazioni (2.4) implica che $\bar{\sigma}$ dipenda dalle variabili $B^{i'j'}, \lambda^{v'}$, ossia dai tensori \mathbf{B} e \mathbf{R} , proprio e unicamente per il tramite del tensore di Cauchy Green destro $\mathbf{C}^{41)$, legato ai suddetti da

$$(2.5) \quad \mathbf{C} = \mathbf{R}^T \mathbf{B} \mathbf{R}.$$

¹⁰⁾ Cfr. [2], 2, a).

⁴¹⁾ Allo scopo di provare l'asserto, si derivi rispetto al tempo $\dot{\sigma} = \bar{\sigma}(B^{i'j'}, \lambda^{v'})$. Stante il sistema (2.4), si ottiene

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{i'j'}} \dot{B}^{i'j'} - 2\eta^{i'k'v'} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{i'j'}} B_{k'j'} \omega_{v'} \dot{\lambda}^{v'},$$

ossia, ricordando (1.10),

$$\dot{\sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{i'j'}} \dot{B}^{i'j'} - 2 \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{i'j'}} B_{k'j'} \Omega^{i'k'},$$

In altri termini, le equazioni (2.4) non esprimono altro che la notissima fondamentale proprietà dell'energia di deformazione di dipendere unicamente dal tensore \mathbf{C} , o, il che è lo stesso, dal tensore di deformazione $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{C} - \mathbf{1})$.

Che le equazioni (2.4) debbano esprimere proprio tale proprietà è, d'altra parte, abbastanza evidente non appena si tenga presente la via seguita nel dedurle e il fatto che da (1.4) si ottiene pure

$$P = \text{tr}[\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}] = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F})],$$

ossia

$$(2.6) \quad P = \frac{1}{2} \text{tr}[\mathbf{F}^{-1} \mathbf{T} (\mathbf{F}^{-1})^T \dot{\mathbf{C}}],$$

in quanto, per definizione, è $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F}$.

Per quanto ora visto, il ritenere indipendenti le variabili B^{ij} e λ^r ha come conseguenza il sistema di equazioni (2.4), il quale a

relazione che si può concisamente scrivere

$$\dot{\sigma} = \text{tr}[\bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{B}}] + 2 \text{tr}[\bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{B} \dot{\mathbf{Q}}],$$

dove con $\bar{\sigma}_{\mathbf{B}}$ si è indicato il tensore di componenti $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial B^{ij}}$. Tale relazione si può ulteriormente trasformare, tenendo anche presente (1.9) e il fatto che, per l'emisimmetria di \mathbf{Q} , risulta $\text{tr}[\bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{B} \dot{\mathbf{Q}}] = - \text{tr}[\bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{B}]$:

$$\dot{\sigma} = \text{tr}[\mathbf{R}^T \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \dot{\mathbf{B}} \mathbf{R}] + \text{tr}[\mathbf{R}^T \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{B} \dot{\mathbf{R}}] + \text{tr}[\mathbf{R}^T \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{R} \dot{\mathbf{R}}^T \mathbf{B} \mathbf{R}],$$

ossia, ricordando (2.5),

$$\dot{\sigma} = \text{tr}[\mathbf{R}^T \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{R} \dot{\mathbf{C}}].$$

Da questa si deduce appunto che σ deve essere funzione di \mathbf{C} e che inoltre deve essere $\bar{\sigma}_{\mathbf{B}} = \mathbf{R} \bar{\sigma}_{\mathbf{C}} \mathbf{R}^T$. Stante però la relazione (2.5), questa condizione risulta identicamente soddisfatta qualunque sia la funzione $\bar{\sigma}(\mathbf{C})$. In altri termini, l'integrale generale del sistema (2.5) è $\sigma = \bar{\sigma}(\mathbf{C})$, con $\bar{\sigma}$ funzione arbitraria di \mathbf{C} .

sua volta implica che $\bar{\sigma}$ dipenda da dette variabili unicamente per il tramite di \mathbf{C} . È quanto quindi si supporrà d'ora in poi, ciò che permetterà di ritenere valide le relazioni (2.2) e identicamente soddisfatto il sistema (2.3).

Ricordando la posizione (1.12), da (2.2) si ottiene la relazione ¹²⁾

$$(2.7) \quad \mathbf{T} = 2\varrho \mathbf{V} \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{V},$$

la cui validità, limitatamente al caso dei materiali iperelastici isotropi ($\bar{\sigma}$ indipendente dai parametri λ^r) è già stata a suo tempo provata ¹³⁾.

* * *

Qualora si faccia intervenire, in luogo dello spostamento diretto, lo spostamento inverso e si consideri il corrispondente di \mathbf{C} , dato da

$$\tilde{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}^{-1})^T \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{B}^{-1},$$

la (1.5) diventa

$$(2.8) \quad P = -\frac{1}{2} \text{tr} [\mathbf{V} \mathbf{T} \mathbf{V} \tilde{\mathbf{C}}] + \text{tr} [\mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V} \boldsymbol{\Omega}],$$

in quanto è

$$\dot{\mathbf{B}} = -\mathbf{B} \dot{\tilde{\mathbf{C}}} \mathbf{B},$$

come subito si deduce da $\mathbf{B} \tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{1}$.

¹²⁾ Nel caso in cui sia presente il vincolo di incomprimibilità, risulta $\det \|\mathbf{B}\| = 1$, egnaglianza che implica $\text{tr} [\mathbf{B}^{-1} \dot{\mathbf{B}}] = 0$. Ne segue che, in presenza del suddetto vincolo, a (2.2) va aggiunto il termine $p\mathbf{B}^{-1}$, dove p è la pressione vincolare interna. La relazione (2.7) va perciò sostituita con

$$\mathbf{T} = 2\varrho \mathbf{V} \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \mathbf{V} + p \mathbf{1}.$$

Le relazioni (2.3) e le equazioni (2.4) permangono invece immutate, come subito si constata.

¹³⁾ Cfr. [2], 2, b), dove già si è preavvisato che, contrariamente a quanto si poteva ritenere, la forma di detta relazione non era caratteristica dei materiali isotropi.

Nel caso in cui risulti simmetrico il tensore $\mathbf{B}^{-1} \mathbf{T}$ (ossia il tensore $\mathbf{V} \mathbf{T}$) l'espressione (2.8) si riduce a quella stabilita al n. 2, c) di [2].

La relazione (2.8) esprime che si può ritenere σ funzione delle componenti di \mathbf{B}^{-1} e dei parametri $\lambda^{v'}$: $\sigma = \tilde{\sigma}(\tilde{C}^{i'j'}, \lambda^{v'})$, come d'altronde è ben ovvio, stante $\sigma = \bar{\sigma}(B^{i'j'}, \lambda^{v'})$. Le ipotesi di indipendenza fra \mathbf{B} e i parametri $\lambda^{v'}$ conducono ora alla seguente espressione per \mathbf{T} :

$$(2.9) \quad \mathbf{T} = -2\rho \mathbf{V}^{-1} \bar{\sigma}_{\mathbf{B}^{-1}} \mathbf{V}^{-1},$$

mentre impongono a $\tilde{\sigma}$ di soddisfare al seguente sistema

$$(2.10) \quad \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \lambda^{v'}} = -2\eta^{i'k'v'} \frac{\partial \tilde{\sigma}}{\partial \tilde{C}^{i'j'}} B_{k'j'} \omega_{v'},$$

il quale, ovviamente, non viene ad esprimere nulla di diverso da quanto espresso dal sistema (2.4)¹⁴.

La validità di (2.9), limitatamente al caso dei materiali iperelastici isotropi, e già stata vista in [2], 2, c).

3. — Una semplice deduzione delle formule di Almansi-Signorini.

Si darà ora, come applicazione di parte di quanto si è visto o introdotto, una semplice e concisa deduzione delle formule di Almansi-Signorini.

Sia \mathcal{C} la (o una) terna principale per il tensore \mathbf{C} (terna principale di deformazione), orientata in modo coerente alla terna di riferimento, e \mathcal{C}' la terna principale di \mathbf{B} ad essa corrispondente. E' ben noto (e, d'altra parte, evidente, stante il legame (2.5) fra \mathbf{C} e \mathbf{B}) che \mathbf{C} e \mathbf{B} hanno gli stessi coefficienti principali (che verranno indicati con C_a) e che la rotazione corrispondente al tensore \mathbf{R} trasforma \mathcal{C} in una terna con gli assi paralleli e concordi a quelli di \mathcal{C}' ¹⁵). Ne segue che le componenti rispetto a \mathcal{C} del tensore

$$(3.1) \quad \tilde{\mathbf{W}} = \mathbf{R}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{R}^T \mathbf{W} \mathbf{R}$$

¹⁴) L'integrale generale di (2.10) è infatti una funzione arbitraria di \mathbf{C}^{-1} , ossia di \mathbf{C} .

¹⁵) Si ha quindi che il tensore $\mathbf{R} \mathbf{R}^T$ viene ad esprimere, tramite (1.8), la velocità angolare rispetto alla terna \mathcal{C} del sistema rigido solidale alla terna \mathcal{C}' .

non differiscono da quelle di \mathbf{W} rispetto a \mathcal{C}' . Ciò premesso, sia \mathbf{O} la matrice della rotazione che trasforma la terna di riferimento in una terna con gli assi paralleli e concordi a quelli di \mathcal{C} .

Con ω si indicherà ora la velocità angolare del sistema rigido solidale a \mathcal{C} rispetto alla terna di riferimento e, conseguentemente, con Ω si intenderà ora il tensore

$$(3.2) \quad \Omega = \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T = - \mathbf{O} \dot{\mathbf{O}}^T,$$

legato a ω da (1.8).

Indicate con $\bar{\mathbf{W}}, \bar{\mathbf{B}}$ ¹⁶⁾ le matrici che hanno per elementi le componenti di \mathbf{W} e \mathbf{B} rispetto alla terna \mathcal{C}' , ovviamente risulta, per quanto visto sopra,

$$\bar{\mathbf{W}} = \mathbf{O}^T \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{O}, \quad \bar{\mathbf{B}} = \mathbf{O}^T \mathbf{C} \mathbf{O}, \quad \mathbf{C} = \mathbf{O} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{O}^T.$$

Pertanto da (2.6) si deduce, tenendo presente (1.2), la posizione (3.1) e l'emisimmetria di Ω ,

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\mathbf{R}^T \mathbf{V}^{-1} \mathbf{T} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{R} \dot{\mathbf{C}}] = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\tilde{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{C}}] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\tilde{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{O}} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{O}^T] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{O} \dot{\bar{\mathbf{B}}} \mathbf{O}^T] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{O} \bar{\mathbf{B}} \dot{\mathbf{O}}^T] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\mathbf{O} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{O}^T \tilde{\mathbf{W}} \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T] + \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\mathbf{O}^T \tilde{\mathbf{W}} \mathbf{O} \dot{\bar{\mathbf{B}}}] - \\ &- \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\tilde{\mathbf{W}} \mathbf{O} \bar{\mathbf{B}} \mathbf{O}^T \dot{\mathbf{O}} \mathbf{O}^T] = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\bar{\mathbf{W}} \dot{\bar{\mathbf{B}}}] + \operatorname{tr} [\mathbf{C} \tilde{\mathbf{W}} \Omega], \end{aligned}$$

ossia, stante il carattere tensoriale di $\mathbf{C}, \tilde{\mathbf{W}}, \Omega$,

$$(3.3) \quad P = \frac{1}{2} \operatorname{tr} [\bar{\mathbf{W}} \dot{\bar{\mathbf{B}}}] + \operatorname{tr} [\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\Omega}],$$

¹⁶⁾ La matrice $\bar{\mathbf{B}}$ è diagonale ed ha per elementi della diagonale principale i coefficienti principali di \mathbf{B} , che coincidono con quelli di \mathbf{C} .

dove con $\bar{\Omega}$ si è indicata la matrice che ha per elementi le componenti di Ω rispetto alla terna \mathcal{C} .

Indicati con C_α i coefficienti principali di \mathbf{C} e con $W^{\alpha\beta}$ e $\Omega^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\beta\gamma} \omega_\gamma \lambda^\gamma$ gli elementi di $\bar{\mathbf{W}}$ e $\bar{\Omega}$, da (3.3) e (2.1) si deduce che sussistono le relazioni ¹⁷⁾

$$W^{\alpha\alpha} = 2\varrho \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial C_\alpha}, \quad \varrho \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda^\gamma} = \sum_1^3 \omega_\alpha W^{\gamma+1 \gamma+2} (C_{\gamma+1} - C_{\gamma+2}),$$

dove si è ancora indicata con lo stesso simbolo la funzione che si ottiene da $\bar{\sigma}$ esprimendo \mathbf{C} tramite i suoi coefficienti principali e i parametri che individuano l'orientamento di \mathcal{C} rispetto alla terna di riferimento.

Indicati con Δ_α gli allungamenti principali, a questo punto è sufficiente tenere presente che è $C_\alpha = (1 + \Delta_\alpha)^2$, e che quindi risulta

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial C_\alpha} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \Delta_\alpha} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta_\alpha},$$

per avere, ricordando anche la posizione (1.12),

$$T^{\alpha\alpha} = \varrho (1 + \Delta_\alpha) \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta_\alpha},$$

$$\varrho \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda^\gamma} = \sum_1^3 \omega_\gamma \frac{C_{\gamma+1} - C_{\gamma+2}}{(1 + \Delta_{\gamma+1})(1 + \Delta_{\gamma+2})} T^{\gamma+1 \gamma+2}.$$

Indicando con ϱ_R la densità della configurazione di riferimento, legata a ϱ da: $\varrho_R = \varrho (1 + \Delta_a)(1 + \Delta_{a+1})(1 + \Delta_{a+2})$, si deduce

¹⁷⁾ È ovvio che scrivendo $W^{\alpha\alpha}$ si è tralasciata la convenzione di sommare rispetto all'indice ripetuto α . E così nel seguito. È ovvio anche che l'indice $\gamma + l$ ($l = 1, 2, 3$) va diminuito di 3 non appena esso supera 3.

infine

$$(3.4) \quad T^{aa} = \frac{\varrho_R}{(1 + \Delta_{a+1})(1 + \Delta_{a+2})} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \Delta_a},$$

$$(3.5) \quad \varrho_R \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda^r} = \sum_1^3 \omega_r (1 + \Delta_r) (C_{r+1} - C_{r+2}) T^{r+1 r+2},$$

le quali non sono altro che le formule di Almansi-Signorini.

Qualora il materiale sia isotropo, la terna \mathcal{C} è anche terna principale per il tensore \mathbf{T} , le relazioni (3.5) esprimono in tal caso che $\bar{\sigma}$ non dipende dall'orientamento di \mathcal{C} e le relazioni (3.4) si identificano con le ben note formule di Almansi.

Come si vede, anche attraverso le relazioni (3.5) si può provare la notissima proprietà caratteristica dei materiali iperelastici isotropi, che è quella di avere l'energia di deformazione funzione unicamente degli invarianti principali di \mathbf{C} (che sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti principali U_a , e cioè con gli allungamenti Δ_a), ossia di avere l'energia di deformazione funzione isotropa di \mathbf{C} (o, il che è assolutamente lo stesso, di \mathbf{B}).

* * *

Si supponga che i parametri λ^r siano le componenti del vettore caratteristico \mathbf{q} della rotazione di matrice \mathbf{O} . In tal caso risulta ¹⁸⁾

$$\omega = \frac{2}{1 + q^2} (\mathbf{q}' - \mathbf{q} \times \mathbf{q}'),$$

dove \mathbf{q}' è il derivato del vettore \mathbf{q} rispetto al riferimento \mathcal{C} , e, come agevolmente si può dedurre, si ha

$$\omega_\alpha = \frac{2}{1 + q^2} (\mathbf{k}_\alpha + \eta^{\alpha\beta\gamma} q_\beta \mathbf{k}_\gamma),$$

¹⁸⁾ Cfr. [1], 1.

dove con \mathbf{k}_α si sono indicati i versori di \mathcal{C} . Risulta pertanto

$$\omega^\nu = \frac{2}{1+q^2} (\delta^{\alpha\nu} + \eta^{\alpha\beta\gamma} q_\beta).$$

Il determinante della matrice $\|\omega^\nu\|$ essendo uguale a $\frac{8}{(1+q^2)^2}$, da (3.5) si ricava esplicitamente

$$\begin{aligned} (1 + A_\alpha) (C_{\alpha+1} - C_{\alpha+2}) T^{\alpha+1 \alpha+2} = \\ = \varrho_R \frac{(1+q^2)^2}{8} \left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial q^\alpha} + q^\alpha \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial q^\beta} q^\beta + \eta^{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial q^\beta} q^\gamma \right), \end{aligned}$$

dove, naturalmente, va sommato rispetto agli indici ripetuti β, γ .

* * *

OSSERVAZIONE. È ovvio che all'espressione (3.3) della potenza dello stress si sarebbe potuto agevolmente pervenire anche per il tramite di (1.13). Ed infatti, indicata con \mathbf{S} la matrice della rotazione che trasforma la terna di riferimento in una terna con gli assi paralleli e concordi a quelli della terna \mathcal{C}' , si ottiene, con passaggi ormai ovvi,

$$\frac{1}{2} tr [\mathbf{W} \dot{\mathbf{B}}] = \frac{1}{2} tr [\bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{B}}] + tr [\mathbf{B} \mathbf{W} \dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^T],$$

e la (1.13) diventa pertanto, ricordando la posizione (1.9),

$$P = \frac{1}{2} tr [\bar{\mathbf{W}} \dot{\bar{\mathbf{B}}}] + tr [\mathbf{B} \mathbf{W} (\dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^T - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T)].$$

D'altra parte risulta $\mathbf{S} = \mathbf{R} \mathbf{O}$, ed è quindi, ricordando la posizione (3.2),

$$\dot{\mathbf{S}} \mathbf{S}^T - \dot{\mathbf{R}} \mathbf{R}^T = \mathbf{R} \mathbf{\Omega} \mathbf{R}^T.$$

Inoltre è

$$tr [\mathbf{B} \mathbf{W} \mathbf{R} \mathbf{\Omega} \mathbf{R}^T] = tr [\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{S}^T \mathbf{R} \mathbf{\Omega} \mathbf{R}^T \mathbf{S}] = tr [\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{W}} \mathbf{O}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{O}] = tr [\bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{W}} \bar{\mathbf{\Omega}}].$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] GALLETTO, D.: *Sul vettore caratteristico della rotazione nei moti rigidi*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova Vol. XL (in questo volume).
- [2] GALLETTO, D.: *Sulla potenza dello stress e sull'isotropia dei materiali iperelastici*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova (in questo volume).
- [3] SIGNORINI, A.: *Estensione delle formule di Almansi ai sistemi elastici anisotropi*, Rend. Acc. Lincei, s. VIII, Vol. XXV (1958), pp. 246-253.
- [4] TRUESDELL, C. e NOLL, W.: *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, Vol. III/3, Berlin, Springer-Verlag (1966).
- [5] TRUESDELL, C. e TOUPIN, R.: *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Vol. III/1, Berlin Springer-Verlag (1960).

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 marzo 1968.