RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Sulla potenza dello stress e sull'isotropia dei materiali iperelastici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 227-236

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__227_0>

SULLA POTENZA DELLO STRESS E SULL'ISOTROPIA DEI MATERIALI IPERELASTICI

DIONIGI GALLETTO *)

Con particolare riferimento ai materiali iperelastici esenti da vincoli interni, nella presente esposizione viene data, tra l'altro, una concisa sistemazione a taluni risultati stabiliti in [1] per i materiali perfetti.

Inoltre vengono stabilite dalle nuove condizioni caratterizzanti l'isotropia e, in particolore, viene messo in rilievo come la dipendenza dell'energia di deformazione dal tensore di Cauchy-Green sinistro (invece che dal tensore di Cauchy-Green destro) caratterizzi i sistemi isotropi, in quanto essa implica la dipendenza dell'energia di deformazione unicamente dagli invarianti principali di tale tensore, ossia l'isotropia del materiale.

La presente sistemazione si trasferisce in modo ovvio al caso più generale dei materiali perfetti esenti da vincoli interni e permane valida anche in presenza del vincolo di incomprimibilità. La dimostrazione di questo ultimo asserto non differisce dall'analoga data in [1] e quindi non viene qua riportata.

La terminologia e il simbolismo che vengono qua usati sono gli stessi di [3].

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

Alcune osservazioni sulla potenza dello stress.

a) Sia $\mathbf{x}$ la configurazione di riferimento di un intorno di una particella materiale; $\mathbf{F}$ il gradiente di deformazione nel passaggio dalla configurazione $\mathbf{x}$ a quella attuale; $\mathbf{L}$ il gradiente spaziale della velocità, per il quale risulta

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^{-1}; \tag{1.1}$$

$\mathbf{T}$ il tensore degli sforzi, che verrà supposto simmetrico (caso dei materiali semplici); $\mathbf{B}$ il tensore di Cauchy-Green sinistro, definito da

$$\mathbf{B} = \mathbf{F}\,\mathbf{F}^T. \tag{1.2}$$

Considerata la *potenza dello stress*, data da [1])

$$P = tr\,[\mathbf{T}\mathbf{L}],$$

e introdotto il tensore

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{T}, \tag{1.3}$$

risulta, ricordando (1.1),

$$P = tr\,[\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}] = tr\,[(\mathbf{F}^T)^{-1}\,\mathbf{F}^{-1}\,\mathbf{T}\dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^T] = tr\,[\mathbf{T}^*\,\dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^T],$$

da cui, indicando con $\mathbf{T}^*_S$ e $\mathbf{T}^*_A$ le parti simmetrica ed emisimmetrica di $\mathbf{T}^*$, si deduce

$$P = \frac{1}{2}\,tr\,[\mathbf{T}^*_S\,(\dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^T + \mathbf{F}\,\dot{\mathbf{F}}^T)] + tr\,[\mathbf{T}^*_A\dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^T],$$

ossia, ricordando (1.2) e tenendo presente che $\mathbf{B}$ è simmetrico,

$$P = \frac{1}{2}\,tr\,[\mathbf{T}^*\,\dot{\mathbf{B}}] + tr\,[\mathbf{T}^*_A\,\dot{\mathbf{F}}\,\mathbf{F}^T]\cdot \tag{1.4}$$

---

[1]) Cfr. [4], 217.

b) Se il tensore $\mathbf{T}^*$ è simmetrico, l'espressione (1.4) si riduce a

$$P = \frac{1}{2}\, tr\, [\mathbf{T}^* \dot{\mathbf{B}}]. \tag{1.5}$$

Viceversa, si supponga che la relazione (1.5) valga in corrispondenza ad un qualsiasi moto. In tal caso, stante (1.4), deve essere

$$tr\, [\mathbf{F}^T \mathbf{T}^*_A \dot{\mathbf{F}}] = 0,$$

ossia, essendo il moto qualsiasi,

$$\mathbf{T}^*_A = \mathbf{0}. \tag{1.6}$$

Si può perciò concludere che una condizione necessaria e sufficiente affinchè in corrispondenza ad un qualsiasi moto valga la relazione (1.5) è che il tensore $\mathbf{T}^*$ sia simmetrico.

Ad esempio, la relazione (1.5) è sicuramente verificata nel caso in cui il materiale sia elastico [2]) e isotropo e ammetta la configurazione $\mathbf{x}$ come stato indeformato. Infatti in tal caso vale la relazione [3])

$$\mathbf{T} = \chi_0\, \mathbf{1} + \chi_1\, \mathbf{B} + \chi_2\, \mathbf{B}^2, \tag{1.7}$$

dove i coefficienti χ_i sono degli invarianti costruiti tramite il tensore $\mathbf{B}$, e perciò risulta, ricordando (1.3),

$$\mathbf{T}^* = \chi_0\, \mathbf{B}^{-1} + \chi_1\, \mathbf{1} + \chi_2\, \mathbf{B} = \mathbf{T}^{*T}.$$

c) Stante la posizione (1.3), la condizione (1.6) equivale a quest'altra

$$\mathbf{BT} = \mathbf{TB} \tag{1.8}$$

---

[2]) Per materiale elastico si intende un materiale la cui equazione costitutiva è della forma $\mathbf{T} = \mathfrak{g}(\mathbf{F})$, con $\mathfrak{g}$ funzione tensoriale del gradiente di deformazione. Per materiale elastico e isotropo si intende un materiale elastico la cui funzione $\mathfrak{g}(\mathbf{F})$, considerata rispetto a uno stato indeformato scelto come configurazione di riferimento, è funzione isotropa d $\mathbf{F}$.

[3]) Cfr. [3], 47.

ed in proposito si può provare che il verificarsi di detta condizione implica che la (o una) terna principale [4]) del tensore $\mathbf{B}$ sia anche terna principale per il tensore $\mathbf{T}$. La dimostrazione di detto asserto viene tralasciata perchè è in tutto identica a quella data per un teorema analogo al n. 2 di [1], teorema che fa intervenire, in luogo di $\mathbf{B}$, il tensore di deformazione e, in luogo di $\mathbf{T}$, il secondo tensore di Piola-Kirchhoff, definito da

$$\widetilde{\mathbf{T}} = J\, \mathbf{F}^{-1}\, \mathbf{T}\, (\mathbf{F}^{-1})^T,$$

dove è $J = \det \| \mathbf{F} \|$.

Se si introducono il tensore $\widetilde{\mathbf{T}}$ e il tensore di Cauchy-Green destro, definito da

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T\, \mathbf{F},$$

è agevole constatare che la condizione (1.8) equivale a quest'altra

$$\mathbf{C}\,\widetilde{\mathbf{T}} = \widetilde{\mathbf{T}}\,\mathbf{C}, \tag{1.9}$$

la quale a sua volta implica che la (o una) terna principale per il tensore $\mathbf{C}$ sia anche terna principale per il tensore $\widetilde{\mathbf{T}}$.

Stante quanto visto sino ad ora, si può concludere che *le seguenti quattro condizioni sono equivalenti*:

I) *la potenza dello stress ha l'espressione* (1.5);

II) *il tensore* $\mathbf{T}^*$ *è simmetrico*;

III) *la* (*o una*) *terna principale per il tensore* $\mathbf{B}$ *è anche terna principale per il tensore* $\mathbf{T}$;

IV) *la* (*o una*) *terna principale per il teorema* $\mathbf{C}$ *è anche terna principale* per *il tensore* $\widetilde{\mathbf{T}}$.

d) Sia $\mathbf{V}$ il tensore di dilatazione sinistro, per il quale risulta

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2. \tag{1.10}$$

---

[4]) È ovvio che per «terna principale» si intende «terna ortogonale di assi principali».

Il verificarsi di (1.6), cioè di

$$\mathbf{B}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\mathbf{B}^{-1}$$

implica, come facilmente si può verificare [5]),

$$\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\,\mathbf{V}^{-1}. \tag{1.11}$$

Perciò si ha, nel caso in cui sia verificata la condizione (1.6),

$$\mathbf{T}^{*} = \mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{T}\,\mathbf{V}^{-1}, \tag{1.12}$$

ossia *l'ipotesi che il tensore* $\mathbf{T}^{*}$ *sia simmetrico implica che risulti verificata la condizione* (1.12). Il viceversa, naturalmente, è ovvio.

Nell'ipotesi quindi che $\mathbf{T}^{*}$ sia simmetrico, per P si ha pure l'espressione

$$P = \frac{1}{2}\, tr\,[\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{T}\,\mathbf{V}^{-1}\,\dot{\mathbf{B}}]. \tag{1.13}$$

2. Caso dei materiali iperelastici.

a) Si supponga ora che il materiale sia iperelastico, ossia che esista per esso una funzione σ, energia di deformazione, per la quale si abbia

$$\varrho\,\dot{\sigma} = P, \tag{2.1}$$

dove con ϱ si è indicata la densità nella configurazione attuale.

Nell'ipotesi che in corrispondenza a un qualsiasi moto P abbia l'espressione (1.5), da (2.1) segue che σ è una funzione di $\mathbf{B}$ [6]): $\sigma = \bar{\sigma}(\mathbf{B})$.

---

5) È sufficiente osservare che ogni asse principale di $\mathbf{B}$ è anche asse principale di $\mathbf{V}$ (e viceversa) per avere che il verificarsi di (1.8) implica il verificarsi di $\mathbf{VT} = \mathbf{TV}$, ossia di (1.11).

6) Si tenga presente che risulta $\varrho = \dfrac{1}{\det \|\mathbf{F}\|}\,\varrho_R = \dfrac{1}{\sqrt{\det \|\mathbf{B}\|}}\,\varrho_R$, con ϱ_R densità in $\mathbf{x}$.

Come agevolmente si può vedere, tale evenienza implica necessariamente che σ sia una funzione isotropa di $\mathbf{B}$.

Ed infatti l'energia di deformazione è funzione del gradiente $\mathbf{F}$: $\sigma = \sigma(\mathbf{F})$, e soddisfa al principio dell'indifferenza materiale, ossia soddisfa all'identità [7])

$$\sigma(\mathbf{F}) = \sigma(\mathbf{Q}\,\mathbf{F})$$

per ogni $\mathbf{F}$ del suo dominio di definizione e qualunque sia il tensore ortogonale $\mathbf{Q}$. Perciò risulta, ricordando (1.2),

$$\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = \bar{\sigma}(\mathbf{F}\,\mathbf{F}^T) = \bar{\sigma}(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}\,(\mathbf{Q}\,\mathbf{F})^T) = \sigma(\mathbf{Q}\,\mathbf{F}\,\mathbf{F}^T\,\mathbf{Q}^T),$$

ossia

$$\bar{\sigma}(\mathbf{B}) = \bar{\sigma}(\mathbf{Q}\,\mathbf{B}\,\mathbf{Q}^T), \tag{2.2}$$

relazione che prova l'asserto.

E' sufficiente poi a questo punto ricordare un noto teorema [8]) per avere che il verificarsi di (2.2) implica che $\bar{\sigma}$ dipenda da $\mathbf{B}$ unicamente per il tramite dei suoi invarianti principali, invarianti che non differiscono da quelli di $\mathbf{C}$ [9]).

Sempre nell'ipotesi che valga la relazione (1.5), da quanto ora visto, da (1.3) e (2.1) si deduce subito che per $\mathbf{T}$ deve valere un'espressione del tipo di (1.7), ossia l'isotropia del materiale (con $\mathbf{x}$ stato indeformato).

Viceversa, si è già visto al n. 1, *b*) che se il materiale isotropo (con $\mathbf{x}$ stato indeformato) P ha l'espressione (1.5), da cui segue che, se esso è anche iperelastico, stante (2.1) deve essere $\sigma = \sigma(\mathbf{B})$.

Quanto visto ora e al n. 1 permette quindi di concludere che, *nell'ipotesi che il materiale sia iperelastico, le seguenti sei condizioni sono equivalenti*:

I) *la potenza dello stress ha l'espressione* (1.5);

II) *il tensore* $\mathbf{T}^*$ *è simmetrico*;

---

[7]) Cfr. [3], 84.

[8]) Cfr. [3], 10.

[9]) Ne segue che risulta $\bar{\sigma}(\mathbf{B}) \equiv \bar{\sigma}(\mathbf{C})$, ossia che $\bar{\sigma}$ si può pensare anche funzione isotropa di $\mathbf{C}$, risultato d'altra parte ben noto.

III) *la (o una) terna principale per il tensore* $\mathbf{B}$ *(o, il che è lo stesso, per il tensore* $\mathbf{V}$*) è anche terna principale per il tensore* $\mathbf{T}$;

IV) *la (o una) terna principale per il tensore* $\mathbf{C}$ *è anche terna principale per il tensore* $\tilde{\mathbf{T}}$;

V) *l'energia di deformazione è una funzione di* $\mathbf{B}$;

VI) *il materiale è isotropo (con* $\mathbf{x}$ *stato indeformato).*

b) Da (1.3), (1.5), (2.1) segue subito la ben nota relazione [10])

$$\mathbf{T} = 2\varrho\, \mathbf{B}\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B}) \equiv 2\varrho\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})\, \mathbf{B}, \tag{2.3}$$

dove con $\bar{\sigma}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})$ si è indicato il tensore simmetrico le cui componenti sono le derivate di σ rispetto alle componenti di $\mathbf{B}$, componenti queste pensate, agli effetti della derivazione, come indipendenti (ossia senza tener conto del fatto che sono simmetriche).

A proposito di (2.3) è il caso di osservare che il verificarsi di

$$\mathbf{T} = 2\varrho\, \mathbf{B}\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}} \tag{2.3'}$$

(oppure $\mathbf{T} = 2\varrho\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}}\, \mathbf{B}$) implica che il materiale sia isotropo (e che quindi necessariamente risulti $\sigma = \bar{\sigma}(\mathbf{B})$) Infatti (2.3′) implica che risulti $\mathbf{T}^* = 2\varrho\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}}$, e questa a sua volta implica la simmetria di $\mathbf{T}^*$, ossia l'isotropia del materiale iperelastico, a norma del teorema stabilito in *a*).

Ricordando che nelle attuali ipotesi sussiste la relazione (1.12), risulta pure

$$\mathbf{T} = 2\varrho\, \mathbf{V}\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}}(\mathbf{B})\, \mathbf{V}. \tag{2.4}$$

E' questa una relazioue sulla cui forma si ritornerà in seguito, a parte [11]). Per ora si avverte soltanto che, a differenza di (2.3′), la relazione

$$\mathbf{T} = 2\varrho\, \mathbf{V}\, \bar{\sigma}_{\mathbf{B}}\, \mathbf{V}, \tag{2.4'}$$

---

[10]) Cfr. [3], 85.

[11]) Cfr. [2], 2.

come si vedrà [11]), non è caratteristica dei materiali iperelastici isotropi. In altri termini, il verificarsi di (2.4′) non esclude affatto per $\bar{\sigma}$ la possibilità di dipendere, oltre che da **B**, da altri parametri dipendenti da **F**.

Tenendo infine presente (1.10) e (1.13), si ha che la relazione (1.5) si può trasformare in

$$P = tr\,[\mathbf{V}^{-1}\,\mathbf{T}\,\dot{\mathbf{V}}], \tag{2.5}$$

da cui, ricordando (2.1), segue subito un'altra nota relazione [12]) per la forma della quale, analogamente a (2.4′), si può provare che è caratteristica dei materiali iperelastici isotropi.

c) Qualora si faccia intervenire, in luogo dello spostamento diretto, lo spostamento inverso, al gradiente **F** andrà sostituito $\mathbf{F}^{-1}$ e a **B** e **C** andranno sostituiti rispettivamente

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{F}^{-1}\,(\mathbf{F}^{-1})^T = \mathbf{C}^{-1}$$

e

$$\tilde{\mathbf{C}} = (\mathbf{F}^{-1}\,)^T\,\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{B}^{-1}. \tag{2.6}$$

Da $\mathbf{B}\,\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{1}$, si deduce $\dot{\mathbf{B}} = -\,\mathbf{B}\,\dot{\tilde{\mathbf{C}}}\,\mathbf{B}$ e la relazione (1.5), tenendo presente che il suo verificarsi implica (1.8), si trasforma in

$$P = -\,\frac{1}{2}\,tr\,[\mathbf{B}\,\mathbf{T}\,\dot{\tilde{\mathbf{C}}}]. \tag{2.7}$$

Questa, sostituita in (2.1), permette di concludere che si può ritenere anche, ricordando (2.6), $\sigma = \tilde{\sigma}\,(\mathbf{B}^{-1})$, come d'altronde è ovvio.

Quanto visto in *a*) per la funzione $\bar{\sigma}\,(\mathbf{B})$ si trasferisce sostanzialmente immutato alla funzione $\tilde{\sigma}(\mathbf{B}^{-1})$.

---

[12]) Cfr. [3], 85.

Da (2.1) si deduce subito che per un materiale iperelastico isotropo sussiste pure la relazione ben nota [13])

$$\mathbf{T} = -\,2\varrho\,\mathbf{B}^{-1}\,\tilde{\sigma}_{\mathbf{B}^{-1}}(\mathbf{B}^{-1}) = -\,2\varrho\,\tilde{\sigma}_{\mathbf{B}^{-1}}(\mathbf{B}^{-1})\,\mathbf{B}^{-1}. \tag{2.8}$$

Anche per la forma di questa si può provare, in modo ormai ovvio, che è caratteristica dei materiali iperelastici isotropi.

Ricordando che nelle attuali ipotesi è verificata la condizione (1.11), che equivale a $\mathbf{V}\,\mathbf{T} = \mathbf{T}\,\mathbf{V}$, la relazione (2.7) si può anche scrivere

$$P = -\,\frac{1}{2}\,tr\,[\mathbf{V}\,\mathbf{T}\,\mathbf{V}\,\dot{\tilde{\mathbf{C}}}], \tag{2.9}$$

da cui segue che risulta anche

$$\mathbf{T} = -\,2\varrho\;\mathbf{V}^{-1}\,\tilde{\sigma}_{\mathbf{B}^{-1}}(\mathbf{B}^{-1})\,\mathbf{V}^{-1}. \tag{2.10}$$

La forma di questa relazione, analogamente a (2.5′), non è, come si vedrà [14]), caratteristica dei sistemi iperelastici isotropi.

E' infine il caso di osservare che (2.7), (2.8), (2.9) (2.10) differiscono rispettivamente da (1.5), (2 3), (1.13), (2.4) unicamente per lo scambio di $\mathbf{B}$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{V}$, $\mathbf{V}^{-1}$, rispettivamente con $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{V}^{-1}$, $\mathbf{V}$.

---

13) Cfr. [3], 85.
14) Cfr. [2], 2.

BIBLIOGRAFIA

[1] GALLETTO, D. : *Sulla condizione di isotropia per i sistemi continui a trasformazioni reversibili*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, Vol. XXXVII (1967), pp. 246-257.

[2] GALLETTO, D. : *Sui materiali elastici anisotropi*, Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova (in questo volume).

[3] TRUESDELL, C. e NOLL, W. : *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Handbuch der Physik, Vol. III/3, Berlin, Springer-Verlag (1966).

[4] TRUESDELL, C. e TOUPIN, R. : *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Vol. III/1, Berlin Springer-Verlag (1960).

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 marzo 1968.