RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

DIONIGI GALLETTO

Alcuni teoremi di cinematica dei sistemi rigidi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 219-226

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__219_0>

ALCUNI TEOREMI DI CINEMATICA DEI SISTEMI RIGIDI

DIONIGI GALLETTO *)

Tramite l'intervento del vettore caratteristico della rotazione, vengono stabiliti alcuni semplici teoremi di cinematica dei sistemi rigidi. In particolare viene stabilita una proprietà caratteristica dei moti di precessione.

1. Siano x^i e $x^{i'}$ due terne cartesiane trirettangole levogire, la seconda solidale a un sistema rigido mobile rispetto alla prima, terne che si riterranno fissate una volta per tutte.

Sia $\mathbf{q}(t)$ il vettore caratteristico della rotazione, definito da

$$\mathbf{q}(t) = \operatorname{tg} \frac{\chi(t)}{2} \mathbf{u}(t), \tag{1}$$

dove $\mathbf{u}(t)$ è il versore dell'asse a della rotazione $\mathbf{R}$ che permette di passare da una posizione del sistema in cui le due terne risultano con gli assi paralleli e concordi a una posizione che differisca da quella attuale unicamente per una traslazione, versore orientato in modo tale che risulti compresa fra 0 e π l'ampiezza $\chi(t)$ della suddetta rotazione, misurata in senso levogiro rispetto ad esso.

Indicata con ω la velocità angolare del sistema mobile, risulta [1])

$$\omega = \frac{2}{1+q^2}(\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}), \tag{2}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) Cfr. [1], § 1.

dove $q\left(=\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}\right)$ è il modulo di $\mathbf{q}$, mentre $\dot{\mathbf{q}}$ rappresenta il derivato rispetto al tempo di $\mathbf{q}$ relativo alla terna fissa.

L'espressione delle componenti ω^i di ω rispetto al riferimento fisso x^i in funzione delle componenti dei vettori $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ rispetto al medesimo riferimento è fornita da (2), mentre l'espressione delle componenti $\omega^{i'}$ rispetto al riferimento solidale $x^{i'}$ in funzione delle suddette componenti di $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ è fornita dalle componenti del vettore

$$\bar{\omega} = \frac{2}{1+q^2}(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}) \tag{3}$$

rispetto al riferimento fisso, in quanto risulta [2])

$$\omega^{i'} = \delta_i^{i'} \bar{\omega}^i .$$

2. Da (2) segue pressochè immediatamente il teorema:

I. *Se nell'intervallo di tempo in cui si considera il moto le direzioni dei tre vettori* $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, ω *risultano appartenenti a una medesima giacitura, il moto risulta rototraslatorio.*

Ed infatti, se le direzioni di $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$ e ω appartengono a una stessa giacitura, da (2) segue che deve risultare $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} = 0$, ossia che $\dot{\mathbf{q}}$ deve essere parallelo a $\mathbf{q}$ e, per la (2) stessa, che $\dot{\mathbf{q}}$ deve essere parallelo a ω.

Inoltre, da (1) segue che il parallelismo di $\dot{\mathbf{q}}$ a $\mathbf{q}$ implica la costanza di $\mathbf{u}$, ossia, per quanto ora visto, la costanza di vers ω, ecc.

Si supponga poi che le due terne x^i e $x^{i'}$ siano state fissate in modo tale che all'istante iniziale del moto risulti nullo il vettore $\mathbf{q}$. In tale ipotesi è quasi ovvio che

II. *Se il moto è rototraslatorio, i vettori* ω *e* $\mathbf{q}$ *risultano paralleli.*

Ne segue che anche $\dot{\mathbf{q}}$ è parallelo a ω e si può quindi concludere che, con le due terne fissate nel modo suddetto, *il parallelismo di* ω *con* $\dot{\mathbf{q}}$ *è una proprietà caratteristica dei moti rototraslatori.*

---

[2]) Cfr. [2], 3.

3. Da (2), tenendo presente (1), si ottiene

$$\omega = \dot{\chi}\,\mathbf{u} + \sin\chi\,\dot{\mathbf{u}} + (1 - \cos\chi)\,\mathbf{u} \times \dot{\mathbf{u}}, \tag{4}$$

da cui segue, come in un semplice moto rotatorio:

III. *La componente di* ω *rispetto all'asse* a *orientato secondo il versore* $\mathbf{u}$ *eguaglia la derivata dell'ampiezza* χ *della rotazione* $\mathbf{R}$ [3]).

Tramite (4) si può agevolmente provare il teorema, analogo a quello che in luogo del vettore $\mathbf{q}$ fa intervenire la velocità angolare, e, d'altra parte, alquanto intuitivo:

IV. *Se il vettore* $\mathbf{q}$ *è di direzione costante rispetto alla terna solidale, il moto è rototraslatorio.*

Infatti, avendosi in tal caso $\dot{\mathbf{u}} = \omega \times \mathbf{u}$, la relazione (4) dà luogo alla [4])

$$\omega = \operatorname{tg}\chi\,\omega \times \mathbf{u} + \dot{\chi}\,\mathbf{u}, \tag{5}$$

---

[3]) Se invece di $\chi(t)$ e di $\mathbf{u}(t)$ si introducono l'angolo $\bar{\chi}(t)$ e il versore $\bar{\mathbf{u}}(t)$ (Cfr. [2] 2), continui in tutto l'intervallo di tempo ove si considera il moto, la componente di ω rispetto all'asse a orientato secondo $\bar{\mathbf{u}}$ eguaglia la derivata $\dot{\bar{\chi}}$. Detto risultato segue subito dall'eguaglianza

$$\omega = \dot{\bar{\chi}}\,\bar{\mathbf{u}} + \sin\bar{\chi}\,\dot{\bar{\mathbf{u}}} + (1 - \cos\bar{\chi})\,\bar{\mathbf{u}} \times \dot{\bar{\mathbf{u}}},$$

analoga alla (4), che segue da (2) e da $\mathbf{q} = \operatorname{tg}\dfrac{\bar{\chi}(t)}{2}\,\bar{\mathbf{u}}(t)$ (Cfr. [2], 2).

Stante la continuità di $\bar{\chi}$, risulta pertanto

$$\bar{\chi} = \int_{t_0}^{t} \bar{\mathbf{u}} \cdot \omega \, dt,$$

dove si è supposto che la terna x^i sia stata fissata in modo tale che all'istante iniziale t_0 del moto risulti $\bar{\chi} = 0$.

[4]) La relazione (5) ha naturalmente senso soltanto per $\chi \neq \dfrac{\pi}{2}$ e segue dalla

$$\sin\chi\,\omega \times \mathbf{u} - \cos\chi\,(\omega - \dot{\chi}\,\mathbf{u}) = \mathbf{0},$$

che per $\chi = \dfrac{\pi}{2}$ esprime subito che ω deve essere parallelo a $\mathbf{u}$, ecc.

ove si è pure tenuto conto del teorema III. Sostituendo in questa ultima relazione l'espressione che da essa si ottiene moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{u}$ ambo i membri, si ha in definitiva

$$\omega = \dot{\chi}\, \mathbf{u}$$

esprimente il parallelismo tra ω ed $\mathbf{u}$, ossia che ω ha direzione costante rispetto alla terna solidale, ecc.

4. D'ora in poi si supporrà che le direzioni dei tre vettori $\mathbf{q}$, $\dot{\mathbf{q}}$, ω non appartengono ad una stessa giacitura (ossia, per il teorema I, che risultino distinte). Ciò premesso, è interessante osservare che sussiste il seguente teorema:

V. *La conoscenza di* vers ω, *della direzione di* $\mathbf{q}$ *e della giacitura individuata da questa e dalla direzione di* $\dot{\mathbf{q}}$ *individua il vettore* $\mathbf{q}$.

Indicata con π_1 la suddetta giacitura e con π_2 quella individuata da $\dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}$, π_2 risulta ortogonale a π_1 e, stante (2), ω risulta parallelo a π_2. Ne segue che la conoscenza di vers ω e di π_1 individua π_2, e quindi la direzione di $\dot{\mathbf{q}}$, quale comune direzione di π_1 e π_2.

Dalla (2) segue poi che la conoscenza di vers ω, assieme a quella delle direzioni di $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$, individua univocamente il versore di $\dot{\mathbf{q}}$ e quello di $\mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}$, i quali a loro volta determinano univocamente il versore $\mathbf{u}$ di $\mathbf{q}$. Indicati pertanto con α_1 $(<\pi)$ l'angolo fra $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ e con $\beta\left(<\frac{\pi}{2}\right)$ quello fra $\dot{\mathbf{q}}$ e ω, angoli ormai noti, da (2) si deducono le relazioni

$$\omega \cos\beta = \frac{|\dot{\mathbf{q}}|}{1+q^2}, \qquad \omega \sin\beta = \frac{q\,|\dot{\mathbf{q}}|}{1+q^2} \sin\alpha_1,$$

da cui

$$q = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\sin\alpha_1}. \tag{6}$$

Il vettore $\mathbf{q}$ è perciò completamente individuato.

Ricordando che il legame fra q e χ è espresso da $q = \operatorname{tg} \frac{\chi}{2}$, da (6) si deduce la seguente espressione per l'ampiezza χ della rotazione **R**:

$$\chi = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha_1} .$$

OSSERVAZIONE I. All'espressione (6) si può pure pervenire considerando, accanto al vettore ω, il vettorr $\bar{\omega}$, il quale è il vettore che, sottoposto alla rotazione $\mathbf{R}$, dà luogo a un vettore equipollente a ω. Stante (3), esso è il simmetrico di ω rispetto alla giacitura π_1, e pertanto l'angolo di cui ruota qualora si sottoponga a $\mathbf{R}$ è 2β. Indicato con $\alpha_2 \left(< \frac{\pi}{2} \right)$ l'angolo fra $\mathbf{q}$ ed ω, risulta quindi

$$\sin \alpha_2 \sin \frac{\chi}{2} = \sin \beta, \tag{7}$$

$$\sin \alpha_2 \cos \frac{\chi}{2} = \sin \alpha_1 \cos \beta ,$$

da cui segue $\operatorname{tg} \frac{\chi}{2} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\sin \alpha_1}$, ossia (6).

Stante il significato di $\bar{\omega}$ e quanto visto circa $\dot{\mathbf{q}}$ e le giaciture π_1 e π_2 si ha inoltre

VI. *Il vettore $\dot{\mathbf{q}}$ è parallelo alla bisettrice dell'angolo fra i vettori $\bar{\omega} = \mathbf{R}^{-1} \omega$ e ω,*

risultato che, d'altra parte, segue pressochè immediatamente da (2), (3) [5]).

OSSERVAZIONE II. Nel caso in cui χ tenda a π, da (4) segue che la direzione di $\dot{\mathbf{q}}$ tende a diventare parallela a quella di $\mathbf{q}$, ossia che α_1 tende a zero, in accordo (6).

---

[5]) Infatti da (2), (3) segue che i vettori ω e $\bar{\omega}$ hanno la medesima grandezza e che la loro somma è parallela a $\dot{\mathbf{q}}$.

* * *

Accanto al teorema V sussiste il seguente, di dimostrazione in tutto analoga :

V'. *La conoscenza di* vers $\dot{\mathbf{q}}$, *della direzione di* $\mathbf{q}$ *e della giacitura individuata da questa e dalla direzione di* $\boldsymbol{\omega}$ *individua il vettore* $\mathbf{q}$.

Un corollario del teorema V è poi il seguente

VII. *La conoscenza delle direzioni di* $\mathbf{q}$ *e* $\boldsymbol{\omega}$ *e della giacitura individuata dalle direzioni di* $\mathbf{q}$ *e* $\dot{\mathbf{q}}$ *individua l'ampiezza* χ *della rotazione* $\mathbf{R}$.

Un corollario analogo segue dal teorema V'.

5. D'ora in poi si supporrà che il sistema rigido mobile ammetta un punto fisso, O. Si supporrà inoltre che le due terne fissa e mobile siano state scelte entrambe con l'origine in detto punto. Ciò premesso, sia p una retta fissa per O e f la retta per O solidale al sistema mobile che ha rispetto alla terna $x^{i'}$ la medesima posizione che p ha rispetto alla terna x^i. Su p si fissi il versore $\mathbf{k}$ e su f il versore $\mathbf{k}'$ in modo tale che risulti $\mathbf{k}' = \mathbf{R}\mathbf{k}$; si indichi poi con γ l'angolo ($\leq \pi$) fra $\mathbf{k}$ e $\mathbf{k}'$ e con α_3 ($\leq \pi$) l'angolo fra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{k}$.

Analogamente a (7), risulta

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha_3 \sin\frac{\chi}{2}, \tag{8}$$

o anche, per la (7) stessa,

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\beta\,\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}. \tag{8'}$$

Ciò premesso, se il moto risulta una precessione e p e f ne sono rispettivamente gli assi di precessione e di figura, risulta costante γ e quindi, per (8), risulta costante il prodotto [6] $\sin\alpha_3 \sin\frac{\chi}{2}$ o, anche, per (8'), la quantità $\sin\beta\,\frac{\sin\alpha_3}{\sin\alpha_2}$.

Viceversa, se esiste una retta fissa per O in corrispondenza alla quale risulti costante il prodotto $\sin \alpha_3 \sin \frac{\chi}{2}$ $\left(\text{ossia il prodotto } \sin \beta \frac{\sin \alpha_3}{\sin \alpha_2}\right)$, il moto risulta una precessione.

Ed infatti, stante (8), la quantità $\sin \alpha_3 \sin \frac{\chi}{2}$ fornisce il seno dell'angolo che $\mathbf{k}$, versore fissato su p, forma con $\mathbf{k}' = \mathbf{R}\mathbf{k}$, versore della retta f solidale al sistema mobile che ha rispetto alla terna $x^{i'}$ la medesima posizione che p ha rispetto alla terna x^i. E pertanto se è costante $\sin \alpha_3 \sin \frac{\chi}{2}$ è costante detto angolo, ecc.

Si può quindi concludere che

VIII. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto rigido con un punto fisso, O, risulti di precessione è che esista una retta fissa per O in corrispondenza alla quale risulti costante la quantità* $\sin \alpha_3 \sin \frac{\chi}{2}$.

Tenendo presente che risulta

$$\sin \alpha_3 = |\, \mathbf{k} \times \mathbf{u} \,|, \qquad \sin \frac{\chi}{2} = \frac{q}{\sqrt{1+q^2}},$$

si ha infine che tale teorema è equivalente al seguente:

VIII'. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un moto rigido con un punto fisso risulti di precessione è che esista un versore costante* $\mathbf{k}$ *tale che risulti di modulo costante il vettore* $\frac{q}{\sqrt{1+q^2}} \mathbf{k} \times \mathbf{u}$.

---

[6]) Si tenga presente che, data una qualsiasi precessione, si possono sempre fissare le due terne x^i e $x^{i'}$ in modo tale che la rotazione che ad ogni istante porta la terna x^i a sovrapporsi alla terna $x^{i'}$ porti l'asse di precessione p a sovrapporsi all'asse di figura f. Ed infatti è sufficiente scegliere, ad es., il terzo asse della terna x^i coincidente con p e il terzo asse della terna $x^{i'}$ coincidente con f.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FERRARESE: *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite,* **Rend. di Mat. e delle sue Appl., S. V, Vol. XVIII** (1959), pp. **169-177.**

[2] D. GALLETTO: *Sul vettore caratteristico della rotazione nei moti rigidi,* **Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova,** questo stesso volume.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13-2-68.