Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Dionigi Galletto

Sul vettore caratteristico della rotazione nei moti rigidi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 205-218
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__205_0>

SUL VETTORE CARATTERISTICO DELLA ROTAZIONE NEI MOTI RIGIDI

DIONIGI GALLETTO *)

1. Premessa.

In meccanica l'orientamento di una terna mobile rispetto ad un'altra viene di solito fissato tramite l'uso degli angoli di Eulero. L'uso di tali angoli, se da un lato può presentare notevoli vantaggi di semplicità [1]), dall'altro presenta lo svantaggio che essi non hanno carattere intrinseco, nel senso che, se alla terna mobile se ne sostituisce un'altra ad essa solidale, i nuovi angoli di Eulero che individuano l'orientamento di questa non sono legati ai precedenti da relazioni del tipo di quelle che caratterizzano gli oggetti geometrici, quali sono, ad esempio, i vettori.

Può quindi essere utile, a volte, precisare l'orientamento della terna mobile ricorrendo, invece che agli angoli di Eulero, ad un conveniente vettore, quale può essere quello, ben noto, denominato vettore caratteristico della rotazione, considerato, ad es., in [2] (pp. 56, 75 e segg.) e in [1] e che viene qua ripreso, modificandone opportunamente la definizione.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo di ricerca n. 7 del Comitato per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

[1]) Si vedano, ad es., le espressioni che forniscono le componenti della velocità angolare rispetto a una qualunque delle due terne in funzione degli angoli di Eulero e delle loro derivate.

La velocità angolare del sistema rigido solidale alla terna mobile espressa in termini di esso, è data da [2])

$$\omega = \frac{2}{1+q^2}(\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}}), \tag{1}$$

dove con $\mathbf{q}$ si è appunto indicato tale vettore. In (1), naturalmente, con $\dot{\mathbf{q}}$ è da intendersi il derivato rispetto al tempo di $\mathbf{q}$ relativo alla terna fissa. L'espressione di ω in cui compare, in luogo di $\dot{\mathbf{q}}$, il derivato $\mathbf{q}'$ relativo alla terna mobile è data invece, come si proverà, da

$$\omega = \frac{2}{1+q^2}(\mathbf{q}' - \mathbf{q} \times \mathbf{q}'). \tag{2}$$

Da questa, come si vedrà, si deduce agevolmente che le componenti di ω rispetto alla terna mobile coincidono con le omonime componenti rispetto alla terna fissa del vettore

$$\bar{\omega} = \frac{2}{1+q^2}(\dot{\mathbf{q}} - \mathbf{q} \times \mathbf{q}). \tag{3}$$

Quest'ultima relazione, tenendo presente la detta proprietà di $\bar{\omega}$, può essere utile [3]) (essa, ad esempio, combinata con (1), permette immediatamente di escludere la possibilità di un moto rigido in cui le componenti della velocità angolare rispetto agli assi fissi siano le opposte di quelle rispetto agli assi solidali), fra l'altro perchè, una volta determinate (ad es., in un problema dinamico, tramite le equazioni di Eulero) le componenti di ω rispetto alla terna mobile, da essa, o, il che è lo stesso, da (2), segue il sistema di equazioni differenziali che ha per funzioni incognite le componenti [4]) del vettore $\mathbf{q}$ e che corrisponde a quello usuale che lega gli angoli di Eulero alle suddette componenti di ω.

---

[2]) Cfr. [1], § 1. In (1), come nel seguito, il prodotto vettoriale viene indicato con il simbolo $\times$. Il prodotto scalare verrà invece indicato con un punto.

[3]) Cfr. anche [2], 4.

[4]) Non si precisa di quali componenti di $\mathbf{q}$ si tratta in quanto detto vettore ha, sia rispetto alla terna fissa che rispetto alla terna mobile, le medesime componenti.

A proposito di detto sistema, stabilito nel presente lavoro, si osserva poi che è plausibile la presunzione che l'esistenza e l'unicità delle soluzioni sussista in grande. Ciò equivale alla presunzione che esso permetta di determinare l'orientamento della terra mobile ad ogni istante dell'intervallo ove si considera il moto, una volta che sia assegnato l'orientamento della terna nell'istante iniziale.

Accanto al vettore $\mathbf{q}$, nel presente lavoro si introduce infine un secondo vettore caratteristico, che, a differenza del precedente, è definito e continuo in tutto l'intervallo ove si considera il moto, e si estendono ad esso i risultati visti per $\mathbf{q}$.

2. Vettore caratteristico della rotazione.

Siano x^i e $x^{i'}$ due terne cartesiane trirettangole levogire, la seconda solidale a un sistema rigido mobile rispetto alla prima, terne che si riterranno fissate una volta per tutte.

È ovvio che, senza venir meno alla generalità, per lo studio delle proprietà della velocità angolare e per la determinazione delle sue varie espressioni ecc., si può ritenere che il sistema rigido mobile ammetta un punto fisso, O, e che detto punto sia la comune origine delle due terne x^i e $x^{i'}$. È inoltre ovvio che in tutto quanto segue si suppone che il moto ovvenga con regolarità.

Ciò premesso, sia a l'asse della rotazione $\mathbf{R}$ che permette di passare dalla posizione C del sistema rigido in cui le due terne risultano sovrapposte [5]) alla posizione attuale C' (posizione all'istante t). Su tale asse si fissi il versore $\mathbf{u}(t)$ in modo tale che risulti compresa fra 0 e π l'ampiezza $\chi(t)$ della rotazione che permette di passare da C a C', misurata in senso levogiro rispetto a $\mathbf{u}(t)$.

È evidente che il moto del sistema rigido individua univocamente la funzione vettoriale [6])

$$\mathbf{q}(t) = \operatorname{tg} \frac{\chi(t)}{2} \mathbf{u}(t). \tag{4}$$

---

[5]) Naturalmente può benissimo accadere che durante il moto il sistema rigido non assuma affatto tale posizione.

[6]) È evidente che per detta funzione può esistere un insieme discreto di valori di t per cui essa non è definita (valori per i quali è $\chi(t) = \pi$). In corri-

Ma, come agevolmente si può constatare, e come è naturale, vale anche il viceversa, nel senso che, assegnata la funzione vettoriale $\mathbf{q}(t)$ continua in un dato intervallo ad eccezione di un eventuale insieme discreto di valori in corrispondenza ai quali essa diverge, esiste uno ed un solo moto del sistema rigido attorno al punto fisso O la cui funzione individuata da (4) coincide con l'assegnata funzione vettoriale.

Ed infatti, per ogni valore di t per cui l'assegnata funzione è definita, risultano univocamente individuati il versore $\mathbf{u}(t)$ e l'angolo $\chi(t) = 2 \operatorname{arctg} q(t)$ [7], ossia la posizione C', ecc. Per quei valori di t in corrispondenza ai quali $\mathbf{q}(t)$ diverge la posizione del sistema si ottiene mediante un procedimento di passaggio al limite.

* * *

Come già si è osservato, le due funzioni $\mathbf{u}(t)$ e $\chi(t)$ in generale presentano delle discontinuità. A tale inconveniente però si può ovviare sostituendo sull'asse a a $\mathbf{u}(t)$ il versore $\overline{\mathbf{u}}(t)$, definito mediante la condizione di essere continuo sempre e di coincidere con $\mathbf{u}$ nell'istante iniziale del moto, e a $\chi(t)$ l'angolo $\overline{\chi}(t)$ di cui il sistema deve ruotare attorno ad a, ed in senso levogiro rispetto a $\overline{\mathbf{u}}(t)$, per passare da C a C' [8]. In base a tale convenzione, l'angolo $\overline{\chi}(t)$ risulta sempre non negativo e può quindi presentare ancora una discontinuità (di prima specie, con salto uguale a 2π) quando il sistema, durante il moto, passa per la posizione C e $\overline{\chi}(t)$ si annulla in corrispondenza (si tenga presente che il sistema occupa la posizione C non solo quando è $\overline{\chi} = 0$, ma anche quando è $\overline{\chi} = 2k\pi$, con $k = 1, 2, \ldots$). Tale discontinuità risulta però eliminabile non appena si convenga di permettere a $\overline{\chi}$ di assumere anche valori negativi, valori che corrisponderanno a misure (e quindi a rotazioni) effettuate

---

spondenza ad essi $\mathbf{u}(t)$ e $\chi(t)$ in generale presenteranno delle discontinuità. Inoltre $\mathbf{u}(t)$ presenta generalmente una discontinuità in corrispondenza a ogni valore di t per cui è $\chi(t) = 0$.

[7] È ovvio che $q(t)$ è il modulo di $\mathbf{q}(t)$.

[8] Naturalmente nella definizione della funzione $\overline{\chi}(t)$ ora data è implicito che essa può benissimo assumere valori superiori a 2π, per motivi di continuità.

in senso destrogiro rispetto a $\mathbf{u}(t)$, funzione vettoriale che, a norma di definizione, è sempre continua.

È evidente che, accanto a (4), si ha pure

$$\mathbf{q}(t) = \operatorname{tg} \frac{\bar{\chi}(t)}{2} \bar{\mathbf{u}}(t) \tag{4'}$$

ed in proposito è anche il caso di osservare che, una volta assegnata la funzione $\mathbf{q}(t)$, risultano individuate non solo $\chi(t)$ e $\mathbf{u}(t)$, ma anche $\bar{\chi}(t)$ e $\bar{\mathbf{u}}(t)$.

Ed infatti la conoscenza di $\mathbf{q}(t)$ determina, come già visto, il moto del sistema rigido e la conoscenza di questo e di $\mathbf{u}$ all'istante iniziale del moto a sua volta determina univocamente $\bar{\mathbf{u}}(t)$ e $\bar{\chi}(t)$.

*
* *

Al vettore $\mathbf{q}(t)$, già considerato, nella definizione data da (3), da vari autori [9], viene assegnata la *denominazione di vettore caratteristico della rotazione*. Qua si è voluto richiamarne la definizione per porre in rilievo il fatto che alle due funzioni $\mathbf{u}(t)$ e $\chi(t)$ si possono sostituire rispettivamente le funzioni $\bar{\mathbf{u}}(t)$ e $\bar{\chi}(t)$ senza che detto vettore cambi. Si è inoltre voluto porre in rilievo la proprietà che esso ha di caratterizzare il moto di un sistema rigido con un punto fisso perchè di essa si farà uso in seguito.

Il ruolo svolto dal vettore $\mathbf{q}(t)$ è sostanzialmente identico a quello svolto dagli angoli di Eulero e la considerazione di $\mathbf{q}(t)$ in luogo di questi ultimi può presentare a volte dei vantaggi, stante il carattere vettoriale di esso.

3. Alcune espressioni per la velocità angolare.

Il vettore $\dot{\mathbf{q}}$ che compare nella relazione (1) [10]) rappresenta, come già si è detto, il derivato rispetto al tempo del vettore $\mathbf{q}$ relativo

---

9) Cfr., ad es., [3], I, 11, 20, 24, 25, 26, ...; [1]; ecc.

10) Una semplice deduzione di (1), senza intervento del calcolo omografico, è la seguente.

Indicati con $\mathbf{k}_{i'}$ i versori della terna mobile e con $k^{i}_{i'}$ le loro componenti al riferimento fisso x^i ed ha per componenti rispetto a questo le quantità $\dot{q}^i = \frac{dq^i}{dt}$. Accanto a $\dot{\mathbf{q}}$ si può considerare il vettore $\mathbf{q}'$, derivato di $\mathbf{q}$ rispetto al riferimento mobile $x^{i'}$, che ha per componenti rispetto a questo le quantità $q'^{i'} = \frac{dq^{i'}}{dt}$, le quali, ovvia-

---

rispetto alla terna fissa, dalla ben nota formula $\omega = \frac{1}{2}\mathbf{k}_{i'} \times \mathbf{k}_{i'}$ (dove, come al solito, si è soppresso il simbolo di sommatoria rispetto agli indici ripetuti) si ha

$$\omega_i = \eta_{ihk}\, k^h{}_{i'}\, k^k{}_{i'}, \tag{a}$$

dove con η_{ihk} si sono indicate le componenti del tensore di Ricci (rispetto al riferimento x^i).

Siano poi P e P' le posizioni in C e C' di un punto solidale al sistema mobile. Indicati i vettori OP e OP' rispettivamente con $\mathbf{r}$ e $\mathbf{r}'$, risulta, con evidente significato dei simboli, $\mathbf{r}' = \mathbf{r}^{i'}\,\mathbf{k}_{i'}$, ossia $r'^i = r'^{i'}\, k^i{}_{i'}$, da cui, tenendo presente che le componenti $r^{i'}$ di $\mathbf{r}'$ rispetto al riferimento $x^{i'}$ coincidono con le omonime componenti r^i di $\mathbf{r}$ rispetto al riferimento x^i: $r'^{i'} = \delta^{i'}_i\, r^i$, si ottiene

$$r'^i = r^j\, \delta^{i'}_j\, k^i_{i'}. \tag{b}$$

D'altra parte risulta (cfr., ad es., [4], III, 6; [5], 10; ecc.)

$$\mathbf{r}' = \cos\chi\, \mathbf{r} + (1 - \cos\chi)\, \mathbf{u} \,.\, \mathbf{r}\, \mathbf{u} + \sin\chi\, \mathbf{u} \times \mathbf{r}, \tag{c}$$

da cui, passando alle componenti e raffrontando le relazioni che così si ottengono con (b), si deduce che l'espressione di $k^i{}_{i'}$ in funzione di χ e di $\mathbf{u}$ è data da

$$k^i{}_{i'} = [\cos\chi\, \delta^i_j + (1 - \cos\chi)\, u^i u_j - \sin\chi\, \eta^i_{jl}\, u^l]\, \delta^j_{i'}. \tag{d}$$

Da questa, ricordando le espressioni di $\sin\chi$ e $\cos\chi$ in funzione di $\operatorname{tg}\frac{\chi}{2}$ e la definizione (4) di $\mathbf{q}$, si ottiene

$$k^i{}_{i'} = \frac{1}{1+q^2}\,[(1 - q^2)\, \delta^i_j + 2q^i q_j - 2\eta^i_{jl}\, q^l]\, \delta^j_{i'}, \tag{e}$$

da cui, applicando (a), segue senza difficoltà la relazione (1).

mente, differiscono dalle componenti $\dot{q}^{i'}$ di $\mathbf{q}$ rispetto a tale riferimento e che con queste perciò non vanno confuse.

Ciò premesso, la via più semplice e più rapida per pervenire a una espressione di $\boldsymbol{\omega}$ in cui compaia, invece del derivato $\dot{\mathbf{q}}$, il derivato $\mathbf{q}'$ [11]), è quella di considerare il moto rispetto al riferimento $x^{i'}$ del sistema rigido costituito dallo spazio solidale al riferimento x^i. È ovvio che in tale moto il vettore $\mathbf{q}$ è sostituito dal vettore $\tilde{\mathbf{q}} = -\mathbf{q}$, $\boldsymbol{\omega}$ da $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = -\boldsymbol{\omega}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ dal vettore $\dot{\tilde{\mathbf{q}}} = -\mathbf{q}'$, ossia dal vettore che rispetto al riferimento $x^{i'}$ ha per componenti le quantità $\dot{\tilde{q}}^{i'} = \dfrac{d\tilde{q}^{i'}}{dt}$.

La relazione (1) in corrispondenza a tale moto si scrive

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \frac{2}{1+\tilde{q}^2}\,(\dot{\tilde{\mathbf{q}}} + \tilde{\mathbf{q}} \times \dot{\tilde{\mathbf{q}}})$$

e da questa si deduce immediatamente la relazione cercata, ossia (2). Da questa, proiettando sugli assi $x^{i'}$, seguono subito le seguenti espressioni per le componenti $\omega^{i'}$ di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al riferimento mobile (componenti che abitualmente vengono indicate con p, q, r):

$$\omega^{i'} = \frac{2}{1+q^2}\,(q'^{i'} - \eta^{i'h'k'}\, q_{h'}\, q'_{k'}), \tag{5}$$

dove, come al solito, con $\eta^{i'h'k'}$ si sono indicate le componenti del tensore di Ricci.

* * *

Il vettore $\mathbf{q}$, essendo parallelo all'asse a, ha le componenti rispetto alla terna $x^{i'}$ coincidenti con le omonime componenti rispetto alla terna x^i:

$$q^{i'} = \delta^{i'}_i\, q^i, \tag{6}$$

---

[11]) Il legame fra $\dot{\mathbf{q}}$ e $\mathbf{q}'$ essendo espresso da $\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{q}' + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{q}$, un altro fra i vari modi per pervenire alla cercata espressione di $\boldsymbol{\omega}$ è quello di sostituire il suddetto legame in (1), ecc.

e si ha quindi

$$q'^{i'} = \delta_i^{i'} \dot{q}^i, \tag{7}$$

ossia le componenti del vettore $\mathbf{q}'$ rispetto alla terna $x^{i'}$ coincidono con le omonime componenti del vettore $\dot{\mathbf{q}}$ rispetto alla terna x^i.

Da (5) si deduce perciò

$$\omega^{i'} = \frac{2}{1+q^2} (\dot{q}^i - \eta^{ihk} q_h \dot{q}_k) \delta_i^{i'}, \tag{8}$$

relazioni esprimenti le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna mobile in funzione delle componenti di $\mathbf{q}$ e $\dot{\mathbf{q}}$ rispetto alla terna fissa.

Pertanto, introdotto il vettore $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ definito da (3), si ha da (8) che, conformemente a quanto si era preannunciato, le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna mobile $x^{i'}$ coincidono con le omonime componenti di $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ rispetto alla terna fissa x^i, ossia è

$$\omega^{i'} = \delta_i^{i'} \overline{\omega}^i.$$

Detto risultato precisa il significato di $\overline{\boldsymbol{\omega}}$: esso è il corrispondente nella posizione C del vettore $\boldsymbol{\omega}$; si ha cioè, con evidente significato dei simboli,

$$\overline{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{R}^{-1} \boldsymbol{\omega}, \tag{9}$$

relazione analoga alla

$$\mathbf{q}' = \mathbf{R} \dot{\mathbf{q}},$$

che è conseguenza di (7).

Sostituendo (6), (7) nelle relazioni che si ottengono proiettando (1) sugli assi fissi, si ha poi

$$\omega^i = \frac{2}{1+q^2} (q'^{i'} + \eta^{i'h'k'} q_{h'} q'_{k'}) \delta_{i'}^i, \tag{10}$$

ossia le componenti del vettore $\boldsymbol{\omega}$ rispetto alla terna fissa coincidono con le omonime componenti del vettore

$$\overline{\overline{\boldsymbol{\omega}}} = \frac{2}{1+q^2} (\mathbf{q}' + \mathbf{q} \times \mathbf{q}')$$

rispetto alla terna mobile, risultato d'altra parte ormai ovvio.

* * *

Dal confronto delle relazioni (8) con le analoghe ottenute proiettando la (1) sugli assi fissi (o, il che è lo stesso, dal confronto di (10) con (5)), si ottengono le relazioni

$$\omega^i + \delta^i_{i'}\,\omega^{i'} = \frac{4}{1+q^2}\,\dot{q}^i, \tag{11}$$

le quali mettono in evidenza il legame tra le componenti della velocità angolare nei due riferimenti fisso e mobile.

Da (11), fra l'altro, segue immediatamente che non è possibile un moto rigido in cui le componenti della velocità angolare rispetto alla terna fissa siano le opposte di quelle rispetto alla terna mobile.

4. Sulla deduzione di $\mathbf{q}(t)$ da $\boldsymbol{\omega}(t)$.

Moltiplicando vettorialmente ambo i membri di (3) per $\mathbf{q}$ e sostituendo nella relazione che così si ottiene le espressioni di $\mathbf{q}\cdot\dot{\mathbf{q}}$ e di $\mathbf{q}\times\dot{\mathbf{q}}$ dedotte dalla (3) stessa, si ricava

$$\dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{\omega}} - \bar{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{q} + \bar{\boldsymbol{\omega}}\cdot\mathbf{q}\,\mathbf{q}), \tag{12}$$

relazione esprimente $\dot{\mathbf{q}}$ in funzione di $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ e $\mathbf{q}$. Analogamente, da (2) si ottiene

$$\mathbf{q}' = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{q} + \boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{q}\,\mathbf{q}). \tag{13}$$

Proiettando (12) sugli assi fissi, o, il che è lo stesso, (13) sugli assi mobili, si ottengono le relazioni

$$\dot{q}^i = \frac{1}{2}(\delta^i_{i'}\,\omega^{i'} - \delta^{h'}_h\,\omega_{h'}\,\eta^{ihk}\,q_k + \delta^{h'}_h\,\omega_{h'}\,q^h\,q^i), \tag{14}$$

le quali, note che siano le componenti di $\boldsymbol{\omega}$ rispetto al riferimento solidale (che, ovviamente, si supporranno continue), rappresentano un sistema di equazioni differenziali ordinarie e in forma normale in cui le funzioni incognite sono le componenti del vettore $\mathfrak{q}$, sistema per cui risultano verificate le condizioni del teorema di esistenza e di unicità nell'enunciato di Cauchy.

Pertanto, una volta determinate (ad es., in un problema dinamico, tramite le equazioni di Eulero) le componenti di ω rispetto alla terna $x^{i'}$, l'integrazione del sistema (14) individua, assegnata che sia la posizione iniziale del sistema mobile, la posizione attuale, almeno entro intervalli di tempo non troppo estesi (intervalli ove $\mathfrak{q}$ risulta limitato).

* * *

Come già si è detto, il sistema (16) soddisfa alle condizioni del teorema di esistenza e di unicità *in piccolo*. Esso però non soddisfa alle condizioni del teorema di esistenza e di unicità in grande, in quanto, fissato l'intervallo di tempo I di estremi t_0 e b ($b > t_0$) ove si considera il moto, nell'iperstrato

$$t_0 \leq t \leq b \qquad -\infty < q^i < +\infty$$

le derivate parziali prime rispetto a q^i delle funzioni che costituiscono i secondi membri delle equazioni (14) non sono limitate.

Nonostante ciò, si può presumere che, fissata la condizione iniziale

$$\mathfrak{q}(t_0) = \mathfrak{q}_0 \,, \tag{15}$$

esista una soluzione del sistema (14) che soddisfa a detta condizione ed è definita in tutto l'intervallo I, ad eccezione di un eventuale insieme discreto di valori di t, in corrispondenza ai quali essa diverge.

Ed infatti, per il teorema di esistenza e di unicità in piccolo, esiste una ed una sola soluzione $\mathfrak{q}_1(t)$ di (14), definita in un conveniente intorno destro, I_1, di t_0 e soddisfacente a (15), ossia a $\mathfrak{q}_1(t) = \mathfrak{q}_0$.

Se accade che l'intervallo I è contenuto in I_1, la suddetta presunzione risulta ovviamente provata. Si supponga quindi che non accada detta evenienza e sia t_1 un valore di t scelto in I_1 e in prossimità del suo estremo superiore e_1.

Si assuma ora come istante iniziale t_1 e come posizione di riferimento non più C, bensì la posizione C_1 del sistema all'istante t_1. La terna fissa x^i andrà quindi sostituita con la posizione assunta all'istante t_1 dalla terna mobile.

Ciò premesso, esiste una ed una sola soluzione $\mathbf{q}_2(t)$ del sistema (14) [12], definita in un conveniente intorno destro, I_2, di t_1 e soddisfacente alla condizione iniziale

$$\mathbf{q}_2(t_1) = \mathbf{0},$$

equivalente alla condizione che all'istante t_1 il sistema rigido si trovi proprio nella posizione C_1. Potendosi scegliere t_1 prossimo quanto si vuole a e_1, si può ritenere che I_2, almeno per t_1 sufficientemente prossimo a e_1, contenga punti di I che non appartengono a I_1.

Si supponga in un primo tempo che I sia contenuto nell'unione $I_1 \cup I_2$ di I_1 con I_2 e si indichi con $\mathbf{R}_1(t)$ la rotazione che porta il sistema rigido da C a C_1 (alla quale corrisponde il vettore $\mathbf{q}_1(t_1)$) e con $\mathbf{R}_2(t)$ la rotazione che, supposto $t \in I_2$, porta il sistema rigido dalla posizione C_1 alla posizione da esso assunta all'istante t (alla quale corrisponde il vettore $\mathbf{q}_2(t)$). In tal caso la funzione $\overline{\mathbf{q}}(t)$ che nell'intervallo di estremi t_0, t_1 coincide con $\mathbf{q}_1(t)$ e in I_2 con il vettore della rotazione prodotto di $\mathbf{R}_2(t_1)$ con $\mathbf{R}_1(t)$ [13]) è soluzione

---

[12]) Naturalmente il fatto che si cambi posizione di riferimento non altera afiatto il sistema (14), in quanto in esso compaiono le componenti di ω rispetto alla terna solidale al sistema rigido mobile, terna che rimane immutata.

[13]) Una nota formula (cfr., ad es., [3], I, 11) insegna a costruire detto vettore, una volta noti $\mathbf{q}_1(t_1)$ e $\mathbf{q}_2(t)$. Essa è data da

$$\mathbf{q}(t) = \frac{\mathbf{q}_1(t_1) + \mathbf{q}_2(t) - \mathbf{q}_1(t) \times \mathbf{q}_2(t)}{1 - \mathbf{q}_1(t) \cdot \mathbf{q}_2(t)}.$$

Da tale formula si vede che $\mathbf{q}$ diverge in quei punti (eventuali) di I_2 in corrispondenza ai quali risulta $\mathbf{q}_1(t_1) \cdot \mathbf{q}_2(t) = 1$.

del sistema (14)[14], soddisfa alla condizione iniziale (15) e, per il moto stesso con cui è stata costruita, è evidentemente unica[15].

Nel caso in cui I non appartenga a $I_1 \cup I_2$, si sceglierà t_2 in I_2 e in prossimità del suo estremo superiore, ecc., risultando ormai ovvio come si deve procedere.

È chiaro quali siano i problemi analitici aperti connessi ad una effettiva dimostrazione della presunzione supposta come vera.

*
* *

Nell'eventualità che siano note le componenti di ω rispetto al riferimento fisso, il sistema di equazioni differenziali determinante il vettore $\mathfrak{q}$ segue, in modo ormai ovvio, da (1).

Come già si è detto, il sistema (14) corrisponde a quello usuale che permette di determinare gli angoli di Eulero una volta note le componenti della velocità angolare rispetto alla terna mobile.

5. Un secondo vettore caratteristico della rotazione.

Accanto al vettore $\mathfrak{q}(t)$ si può considerare il vettore $\bar{x}(t)$ definito da

$$\bar{x}(t) = \bar{\chi}(t)\,\bar{\mathfrak{u}}(t), \tag{16}$$

e per il quale risulta[16])

$$\omega = \frac{1}{\bar{\chi}^2}\left[\left(1 - \frac{\sin\bar{\chi}}{\bar{\chi}}\right)\right] \bar{x}\cdot\dot{\bar{x}}\;\bar{x} + \bar{\chi}\sin\bar{\chi}\;\dot{\bar{x}} + (1-\cos\bar{\chi})\,\bar{x}\times\dot{\bar{x}}], \tag{17}$$

---

[14]) Per provare tale asserto è sufficiente tener presente che

1°) il moto corrispondente alla funzione $\bar{\mathfrak{q}}(t)$ è ottenuto tramite soluzioni di (14), e quindi ha la velocità angolare che coincide con quella che compare in detto sistema;

2°) che questo si ottiene dalla relazione (2). Scritta quest'ultima con $\mathfrak{q}(t) \equiv \bar{\mathfrak{q}}(t)$ ed esplicitando $\bar{\mathfrak{q}}'$, si deduce che $\bar{\mathfrak{q}}(t)$ soddisfa a (13), ossia l'asserto.

[15]) Risultando unico il moto individuato nell'intervallo di estremi t_0, t_1 da $\mathfrak{q}_1(t)$ e in I_2 da $\mathfrak{q}_2(t)$, è sufficiente ricordare il teorema dimostrato al n. 2 per avere l'asserto.

[16]) All'espressione (17) si può pervenire applicando le relazioni (d) e (a) della nota [9]), oppure, più semplicemente, partendo da (1) e tenendo presente che, stante (4′) e (16), risulta $\mathfrak{q} = \operatorname{tg}\frac{\bar{\chi}}{2}\,\frac{\bar{x}}{\bar{\chi}}$.

dove, come subito si può constatare, di $\overline{\chi}$ è necessaria solo la conoscenza del suo valore assoluto, che coincide con il modulo di $\overline{x}$.

A differenza di (1), l'espressione (17) ha significato per ogni valore di $\overline{\chi} \neq 0$. L'espressione di ω per $\overline{\chi} = 0$ si può ottenere da (17) mediante un passaggio al limite, ed è data da

$$\omega_{\chi=0} = \dot{\overline{\chi}}\, \overline{\mathbf{u}}_{\chi=0}\,,$$

con evidente significato dei simboli.

Per brevità si tralascia di scrivere l'espressione di ω in funzione di $\overline{x}$ e di $\overline{x}'$ $\left(\text{dove quest'ultimo è il vettore che ha per componenti rispetto al riferimento } x^{i'} \text{ le quantità } \chi'^{i'} = \dfrac{d\chi^{i'}}{dt}\right)$ e l'espressione di $\overline{\omega}$ in funzione di $\overline{x}$ e di $\overline{x}'$. Quest'ultima è data dal secondo membro di (17) nel quale si sostituisca al prodotto $\overline{x} \times \dot{\overline{x}}$ l'opposto. Sostituendo poi in essa a $\dot{\overline{x}}$ il vettore $\overline{x}'$, si ottiene l'espressione di ω in funzione di $\overline{x}$ e di $\overline{x}'$.

Infine, se in luogo del vettore $\overline{x}$ si introduce il vettore x, definito da

$$x(t) = \chi(t)\, \mathbf{u}(t)$$

(vettore che, a differenza del precedente presenta in generale delle discontinuità), l'espressione di ω che si ottiene in corrispondenza ad esso è, ovviamente, in tutto analoga a (17), ecc.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. FERRARESE: *Sulla velocità angolare nei moti rigidi e la rotazione locale nelle deformazioni finite,* Rend. di Mat. e delle sue Appl., S. V, Vol. XVIII (1959), pp. 169-177.

[2] D. GALLETTO: *Alcuni teoremi di cinematica dei sistemi rigidi,* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, questo stesso volume.

[3] A. SIGNORINI: *Trasformazioni termoelastiche finite* (*Mem. 1ª*), Ann. di Mat, S. IV, Vol. XXII (1943), pp. 33-143.

[4] A. SIGNORINI: *Meccanica razionale con elementi di statica grafica,* Vol. I, 2ª Ed., Roma, Perrella (1952).

[5] J. L. SYNGE: *Classical Dynamics,* Handbuch der Physik, Vol. III/1, Berlin, Springer-Verlag, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 13-2-68.