

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIUSEPPE DA PRATO

## **Somma di generatori infinitesimali di semigrupperi analitici**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 40 (1968), p. 151-161

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1968\\_\\_40\\_\\_151\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__151_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# SOMMA DI GENERATORI INFINITESIMALI DI SEMIGRUPPI ANALITICI

GIUSEPPE DA PRATO \*)

Siano  $X$  uno spazio di Banach:  $A$  e  $B$  generatori infinitesimali di semigrupperi analitici in  $X$  [6].

Sotto opportune condizioni proviamo (Teorema I) che  $A + B$  è prechiuso e che la sua minima estensione chiusa  $\overline{A + B}$  è ancora generatore infinitesimale di un semigruppero analitico.

Se uno soltanto dei due operatori  $A, B$  è generatore di un semigruppero analitico (e l'altro di un semigruppero di classe  $c_0$  [6]) allora proviamo (Teorema 2) che  $A + B$  è prechiuso e che il risolvente  $R(\lambda, \overline{A + B})$  verifica una maggiorazione del tipo:

$$(1) \quad \|R(\lambda, \overline{A + B})\| \leq M/(\operatorname{Re} \lambda - \omega) \quad \text{se } \operatorname{Re} \lambda > \omega,$$

con  $M$  e  $\omega$  opportuni numeri reali <sup>1)</sup>.

Se sono soddisfatte le ipotesi dei Teoremi 1 e 2 allora l'equazione:

$$(2) \quad \lambda x - Ax - Bx = y, \quad y \in X, \lambda \text{ opportuno}$$

ammette una e una sola soluzione debole  $x$ , cioè esiste una successione  $x_n$  in  $D_A \cap D_B$  tale che  $x_n$  converge a  $x$  e  $y_n = \lambda x_n - Ax_n - Bx_n$  converge a  $y$ .

---

\*) Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Università di Pisa.

Lavoro svolto nell'ambito dei gruppi di ricerca del C.N.R. Alcuni dei risultati qui pubblicati sono stati annunciati in [3].

<sup>1)</sup> Ciò non è sufficiente a garantire che  $\overline{A + B}$  è generatore di un semigruppero analitico.

Inoltre i Teoremi 3 e 4 danno informazioni sul dominio di  $\overline{A+B}$  e quindi forniscono risultati di regolarizzazione per le soluzioni di (2). Questi risultati possono essere applicati allo studio di molti problemi sulle equazioni differenziali astratte come mostreremo in un successivo lavoro.

Osserviamo infine che il caso in cui  $A$  e  $B$  sono generatori infinitesimali di semigruppì di classe  $c_0$  è stato studiato in [2] e che nel caso presente P. GRISVARD ha ottenuto risultati vicini ai nostri indipendentemente e con metodo diverso, che appariranno in [5].

Usiamo le notazioni seguenti:

$X$  è uno spazio di Banach complesso (con norma  $\| \cdot \|$ ); se  $L$  è un operatore lineare in  $XD_L$  è il dominio di  $L$ ,  $\rho(L)$  e  $\sigma(L)$  sono rispettivamente l'insieme risolvente e lo spettro di  $L$  e se  $\lambda \in \rho(L)$   $R(\lambda, L)$  è il risolvente di  $L$ .

Se  $L$  è generatore infinitesimale di un semigruppò di classe  $c_0$  diremo che  $L$  appartiene a  $(C_0)$  e indicheremo con  $e^{tL}$ ,  $t \geq 0$  il semigruppò generato da  $L$ ; se  $L$  è generatore infinitesimale di un semigruppò analitico diremo che  $L$  appartiene a  $(H_0)$  e indicheremo con  $e^{zL}$ ,  $z \in S_{\theta_L} = \{\lambda \neq 0; |\arg \lambda| < \theta\}$   $0 < \theta_L < \pi/2$ , il semigruppò generato da  $L$ .

**TEOREMA I.** *Siano  $A$  e  $B$  operatori lineari chiusi in  $X$  tali che  $A \in (H_0)$  e  $B \in (H_0)$ . Supponiamo inoltre che:*

(I)  $\exists \mu \in \rho(B)$  e due numeri positivi  $K$  e  $\alpha$ ,  $\alpha \leq 1$ , tali che se  $x \in D_B$ ,  $e^{zA} x \in D_B \forall z \in S_\theta$  e risulta:

$$(3) \quad \|(\mu - B) e^{zA} R(\mu, B) - e^{zA}\| \leq K |z|^\alpha \quad \forall z \in \theta_A.$$

Allora  $A + B$ , con dominio  $D_A \cap D_B$ , è prechiuso e la sua minima estensione chiusa  $\overline{A+B}$  appartiene a  $(H_0)$ .

Premettiamo alcuni lemmi alla dimostrazione del Teorema I; facciamo inoltre alcune ipotesi semplificative (che non sono restrittive), poniamo cioè  $\mu = 0$ ,  $S_{\theta_A} = S_{\theta_B} = S_\theta$  e supponiamo che valgano le maggiorazioni:

$$(4) \quad \|e^{zA}\| \leq M_A, \|e^{zB}\| \leq M_B, \|Be^{zB}\| \leq M'_B / \operatorname{Re} z \quad \forall z \in S_\theta$$

essendo  $M_A, M_B, M'_B$  numeri positivi opportuni.

LEMMA I. *L'applicazione  $z \rightarrow Be^{zA} B^{-1}$  è un semigruppone analitico  $e^{z\bar{A}}$  in  $X$  e si ha:*

$$(5) \quad \| e^{z\bar{A}} \| \leq M_A e^{K|z|^\alpha}$$

DIMOSTRAZIONE. E' intanto evidente che  $e^{z\bar{A}}$  è un semigruppone, inoltre da (3) segue  $\| e^{z\bar{A}} \| \leq \| e^{z\bar{A}} - e^{zA} \| + \| e^{zA} \| \leq K|z|^\alpha + M_A$  e quindi la (5)

Sia ora  $x \in X$ , proviamo che  $z \rightarrow e^{z\bar{A}} x$  è continua in  $\bar{S}_\theta$ ; infatti se  $z_1, z_2 \in \bar{S}_\theta$  e  $\text{Re}(z_1 - z_2) \geq 0$  posto  $\Delta z = z_1 - z_2$  si ha

$$\| e^{z_1\bar{A}} x - e^{z_2\bar{A}} x \| \leq \| e^{z_2\bar{A}} \| \| e^{\Delta z A} x - x \| \leq M_A e^{K|z_2|^\alpha} (\| e^{\Delta z A} x - e^{\Delta z A} x \| + \| e^{\Delta z A} x - x \|)$$

e da (3) e dalla continuità di  $z \rightarrow e^{zA} x$  segue la continuità di  $z \rightarrow e^{z\bar{A}} x$ .

Infine sia  $\Gamma$  una curva chiusa di Jordan in  $S_\theta$  e  $x \in X$ , si ha

$$\int_{\Gamma} e^{z\bar{A}} x dz = \int_{\Gamma} B e^{zA} B^{-1} x dz, \text{ gli integrali avendo senso per la conti-}$$

$$\text{nuità in } z \text{ di } e^{z\bar{A}} x; \text{ ne segue } \int_{\Gamma} e^{z\bar{A}} x dz = B \int_{\Gamma} e^{zA} B^{-1} x dz = 0 \text{ dato}$$

che  $B$  è chiuso e che  $e^{zA} B^{-1} x$  è analitica in  $z$ ; quindi  $z \rightarrow e^{z\bar{A}} x$  è analitica e il lemma è dimostrato.

Poniamo ora  $\forall n \in \mathbb{N}^2$ )

$$(6) \quad B_n = nBR(n, B)$$

e se  $\text{Re } \lambda > 0$

$$(7) \quad A_\lambda = A - \lambda, \bar{A}_\lambda = A - \lambda$$

$$(8) \quad T_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{tA_\lambda} e^{tB_n} dt$$

---

<sup>2)</sup>  $\mathbb{N}$  è l'insieme dei numeri naturali.

$$(9) \quad Q_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty (B_n e^{tA\lambda} B_n^{-1} - e^{tA\lambda}) B_n e^{tB_n} dt$$

$$(10) \quad S_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{tB_n} e^{tA\lambda} dt$$

$$(11) \quad P_\lambda^{(n)} = \int_0^\infty e^{tB_n} (B_n e^{tA\lambda} B_n^{-1} - e^{tA\lambda}) dt.$$

Usando l'identità di immediata verifica  $^3) B_n e^{tA} B_n^{-1} - e^{tA} = nR(n, B)(e^{tA} - e^{tA})$  si provano facilmente le maggiorazioni:

$$(12) \quad \| Q_\lambda^{(n)} \| \leq KM_B M'_B \Gamma(\alpha) / (\operatorname{Re} \lambda)^\alpha \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$(13) \quad \| P_\lambda^{(n)} \| \leq KM_B M'_B \Gamma(1 + \alpha) \| B_n \| / (\operatorname{Re} \lambda)^{1+\alpha} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

essendo  $\Gamma$  la funzione di Eulero e avendo supposto la costante  $M'_B$  scelta (il che è sempre possibile) in modo tale che  $\| B_n e^{tB_n} \| \leq M'_B/t$ .

**LEMMA 2.** Per ogni  $x \in X T_\lambda^{(n)} x \in D_A$  e risulta:

$$(14) \quad A_\lambda T_\lambda^{(n)} x = -x - \int_0^\infty e^{tA\lambda} B_n e^{tB_n} x dt$$

$$(15) \quad (\lambda - A - B_n) T_\lambda^{(n)} = 1 - Q^{(n)}.$$

Inoltre se  $x \in D_A$  si ha:

$$(16) \quad S_\lambda^{(n)} (\lambda - A - B_n) x = (1 + P_\lambda^{(n)}) x.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $x \in X$ , poniamo  $\varphi(t) = A_\lambda^{-1} e^{tA}$  e osserviamo che  $\frac{d}{dt} (\varphi(t) x) = e^{tA\lambda} x$ ; integrando per parti nella (8) si ottiene

<sup>3)</sup> Basta osservare che  $B_n^{-1} = B^{-1} - 1/n$ .

$T_\lambda^{(n)} x = A_\lambda^{-1} x - \int_0^\infty A_\lambda^{-1} e^{tA_\lambda} B_n e^{tB_n} dt x$  da cui  $T_\lambda^{(n)} x \in D_A$  e la (14);

la (15) segue ora facilmente e la (16) si prova in modo analogo.

LEMMA 3. Posto  $\bar{\lambda}_\alpha = (KM_B M'_B \Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$  e per ogni  $\lambda$  con  $\text{Re } \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$ :

$$(17) \quad F_\lambda^{(n)} = T_\lambda^{(n)} (1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1} \quad \forall n \in \mathfrak{N}$$

allora  $\rho(A + B_n)$  contiene il semipiano  $\text{Re } \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$  e si ha

$$(18) \quad F_\lambda^{(n)} = R(\lambda, A + B_n) \quad \forall n \in \mathfrak{N}.$$

DIMOSTRAZIONE. La (17) ha senso in virtù di (12); inoltre da (15) segue l'identità  $(\lambda - A - B_n) F_\lambda^{(n)} = 1$ .

Poniamo ora

$\tilde{\lambda}_\alpha = (KM_B M'_B \Gamma(1 + \alpha) \|B_n\|)^{1/(1+\alpha)}$  e  $L = F_\lambda^{(n)} (\lambda - A - B_n)$ ,  $\text{Re } \lambda > \tilde{\lambda}_\alpha$ ;

moltiplicando a sinistra ambo i membri dell'ultima eguaglianza per  $1 + P_\lambda^{(n)}$  si ottiene  $(1 + P_\lambda^{(n)})L = (1 + P_\lambda^{(n)})T_\lambda^{(n)}(1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1}(\lambda - A - B_n)$ ; se  $x \in D_A$  dalla (16) segue

$$(1 + P_\lambda^{(n)})Lx = S_\lambda^{(n)}(\lambda - A - B)T_\lambda^{(n)}(1 - Q_\lambda^{(n)})^{-1}(\lambda - A - B_n)x = \\ = (1 + P_\lambda^{(n)})x;$$

poichè  $1 + P_\lambda^{(n)}$  è invertibile in virtù di (13) si ottiene  $Lx = x$  cosicchè (18) è provata per  $\text{Re } \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$  e quindi per  $\text{Re } \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$  data l'analiticità del risolvente.

LEMMA 4. Posto:

$$(19) \quad T_\lambda = \int_0^\infty e^{tA_\lambda} e^{tB} dt$$

$$(20) \quad Q_\lambda = \int_0^\infty (e^{t\bar{A}_\lambda} - e^{tA_\lambda}) B e^{tB} dt$$

si ha per  $n \rightarrow \infty$ ,  $T_\lambda^{(n)} \rightarrow T_\lambda$ ,  $Q_\lambda^{(n)} \rightarrow Q_\lambda$  <sup>4)</sup>.

<sup>4)</sup> La freccia indica la convergenza forte in  $X$ .

Inoltre se  $x \in D_A \cap D_B$ ,  $T_\lambda x \in D_A \cap D_B$  e si ha:

$$(21) \quad (\lambda - A - B) T_\lambda x = x - Q_\lambda x.$$

Infine se  $\lambda > 0$  si ha  $\lambda T_\lambda \rightarrow 1$  per  $\lambda \rightarrow \infty$ .

DIMOSTRAZIONE. Ricordando [7] che per  $n \rightarrow \infty$   $e^{tB_n} \rightarrow e^{tB}$  e se  $t > 0$   $B_n e^{tB_n} \rightarrow B e^{tB}$ , e passando al limite in (7) e (8) per  $n \rightarrow \infty$  si prova la prima parte del lemma.

Sia ora  $x \in D_A \cap D_B$ , in virtù dell'ipotesi (I)  $e^{tA} e^{tB} x \in D_B$  e  $B e^{tA} e^{tB} x = e^{tA} e^{tB} B x$ ; ne segue  $T_\lambda x \in D_B$ , inoltre passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  nella (14) si trova  $T_\lambda x \in D_A$  e la (21).

Infine dalla (21) si deduce che  $\lambda T_\lambda x \rightarrow x \forall x \in D_A \cap D_B$  e, poichè  $\|\lambda T_\lambda\|$  è limitata si ha la tesi.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Sia  $\operatorname{Re} \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$ , poniamo  $F_\lambda = T_\lambda (1 - Q_\lambda)^{-1}$ , ciò ha senso in virtù di (12); si ha evidentemente  $F_\lambda^{(n)} \rightarrow F_\lambda$  cosicchè  $F_\lambda$  è un pseudo-risolvente, inoltre se  $x_0 \in X$  e  $\lambda_0 > \operatorname{Re} \lambda_\alpha$  sono tali che  $F_\lambda x_0 = 0$  si ha anche  $F_{\lambda_0}^{(k)} x_0 = (-1)^k k! F_{\lambda_0}^k x_0 = 0$  cosicchè per un noto principio di identità delle funzioni analitiche si ha  $F_\lambda x_0 = 0 \forall \lambda > \operatorname{Re} \bar{\lambda}_\alpha$ ; ne segue  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda F_\lambda x_0 = 0$  e quindi  $x_0 = 0$  in virtù dell'ultima affermazione del lemma 4. Quindi  $F_\lambda$  è iniettivo e esiste un operatore lineare chiuso  $\overline{A + B}$  tale che  $F_\lambda = R(\lambda, \overline{A + B})$ , [6].  $\overline{A + B}$  è un'estensione di  $A + B$ , infatti se  $x \in D_A \cap D_B$  si ha, tenuto conto di (18)  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} F_\lambda^{(n)} (\lambda - A - B_n) x = F_\lambda (\lambda - A - B) x$ , da cui  $\overline{A + B} x = Ax + Bx \cdot A + B$  è prechiuso, infatti se  $\{x_n\}$  è una successione in  $D_A \cap D_B$  convergente a 0 e tale che  $(A + B) x_n \rightarrow y$  si ha  $x_n = F_\lambda (A + B) x_n \rightarrow F_\lambda y = 0$  e quindi  $y = 0$ . Proviamo ora che  $\overline{A + B}$  è la minima estensione chiusa di  $A + B$ ; per questo cominciamo con l'osservare che se  $\operatorname{Re} \lambda > \bar{\lambda}_\alpha$   $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$  è denso in  $X$ , infatti  $D_A \cap D_B$  è denso in  $X$ <sup>5)</sup> e se  $x \in D_A \cap D_B$  dalla (21) segue  $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B) \supset (1 - Q_\lambda)(D_A \cap D_B)$  che, in virtù dell'invertibilità di  $(1 - Q_\lambda)$  implica la tesi.

Sia ora  $y \in D_{\overline{A+B}}$  e  $\{y_n\}$  una successione in  $(\lambda - A - B)(D_A \cap D_B)$  convergente a  $y$ ; posto  $x_n = F_\lambda y_n$  si ha  $x_n \in D_A \cap D_B$ ,  $x_n \rightarrow F_\lambda y$  e  $(A+B)x_n \rightarrow -y + x$  cosicchè  $x$  appartiene al dominio della minima estensione chiusa  $\overline{A+B}$  di  $A+B$  e risulta  $(\overline{A+B})x = \overline{A+B}x$ .

Resta da provare che  $\overline{A+B} \in (H_0)$ , per questo sia  $0 < \varphi < \theta$  e  $I_\varphi$  la semiretta  $I_\varphi = \{z; z = \tau e^{i\varphi}, \tau \geq 0\}$  si ha allora eviedentemente

mente  $T_\lambda = \int_{I_\varphi} e^{zA} e^{zB} dz = e^{i\varphi} \int_0^\infty e^{-\lambda \tau e^{i\varphi}} e^{\tau e^{i\varphi} A} e^{\tau e^{i\varphi} B} dz$  da cui  $\|T_\lambda\| \leq M_A M_B / \operatorname{Re}(\lambda e^{i\varphi})$  se  $\operatorname{Re}(\lambda e^{i\varphi}) > 0$ ; ne segue che esiste un numero positivo  $M$  tale che  $\|T_\lambda\| \leq M/|\lambda|$  e allora, in virtù di (12) e della relazione  $F_\lambda = T_\lambda(1 - Q_\lambda)^{-1}$  si ha la tesi.

**OSSERVAZIONE I.** Se  $A$  e  $B$  verificano le ipotesi del Teorema I e  $\varrho(A)$  e  $\varrho(B)$  sono contenuti in  $S_\theta$  si ha, come segue facilmente dalla (19),  $\varrho(\overline{A+B}) \subset \lambda_\alpha + S_\theta$  essendo  $\lambda_\alpha = (KM'_B \Gamma(\alpha))^{1/\alpha}$ .

**OSSERVAZIONE 2.** Se  $A$  e  $B$  verificano le ipotesi del Teorema I e se in più sono generatori infinitesimali di semigruppì di contrazione tali che  $\|R(\lambda, A)\| \leq 1/\lambda$ ,  $\|R(\lambda, B)\| \leq 1/\lambda$  per  $\lambda > 0$  allora  $\varrho(\overline{A+B})$  contiene la semiretta  $\lambda > 0$  e si ha  $\|R(\lambda, \overline{A+B})\| \leq 1/\lambda$ ; infatti in virtù della Proposizione [1. I] in [2] si ha  $\|R(\lambda, A+B_n)\| \leq 1/\lambda$ .

**OSSERVAZIONE 3.** Siano  $A$  e  $B$  generatori infinitesimali di semigruppì analitici di crescita 1 [1] e supponiamo che esistano nu-

5) Infatti se  $x \in D_B$  e  $t > 0$ ,  $(1/t) \int_0^t e^{sA} x ds \in D_A \cap D_B$  in virtù dell'ipotesi (I)

e si ha  $\lim_{t \rightarrow 0} (1/t) \int_0^t e^{sA} x ds = x$  cosicchè  $D_A \cap D_B$  è denso in  $X$ .



meri positivi  $M_A, M_B, M'_B, a$  e  $b$  con  $a, b < 1$  tali che  $\|e^{zA}\| \leq M_A/|z|^a, \|e^{zB}\| \leq M_B/|z|^b, \|Be^{zB}\| \leq M'_B/|z|^{1+b}$  e che valga l'ipotesi (I).

Allora si prova in modo analogo al Teorema I che  $A + B$  è prechiuso e  $\overline{A + B}$  è generatore infinitesimale di un semigruppone analitico di crescita 1.

Il Teorema seguente riguarda il caso in cui uno soltanto dei due operatori  $A$  e  $B$  appartiene a  $(H_0)$  mentre l'altro appartiene a  $(C_0)$  e si prova in modo del tutto analogo al Teorema I.

**TEOREMA 2.** *Siano  $A$  e  $B$  operatori lineari chiusi in  $X$  tali che  $A \in (C_0)$  e  $B \in (H_0)$ . Supponiamo inoltre che valga una delle due ipotesi seguenti :*

(II)  $\exists \mu \in \rho(B)$  e due numeri positivi  $K$  e  $\alpha, \alpha \leq 1$ , tali che se  $x \in D_B, e^{tA}x \in D_B \forall t \geq 0$  e risulta :

$$(22) \quad \|(\mu - B)e^{tA}R(\mu, B) - e^{tA}\| \leq Kt^\alpha \quad \forall t \geq 0.$$

(III)  $\exists \mu' \in \rho(A)$  e due numeri positivi  $K'$  e  $\alpha', \alpha' \leq 1$  tali che se  $x \in D_A, e^{tB}x \in D_A \forall t \geq 0$  e risulta :

$$(23) \quad \|(\mu' - A)e^{tB}R(\mu', A) - e^{tB}\| \leq K't^{\alpha'} \quad \forall t \geq 0.$$

Allora  $A + B$ , con dominio  $D_A \cap D_B$ , è prechiuso e, detta  $\overline{A + B}$  la sua minima estensione chiusa, esiste un numero reale  $\lambda_\alpha$  e un numero positivo  $M$  tali che  $\rho(\overline{A + B})$  contiene la semiretta  $\lambda > \lambda_\alpha$  e risulta :

$$(24) \quad \|R(\lambda, \overline{A + B})\| \leq M/(\operatorname{Re} \lambda - \lambda_\alpha) \quad \text{se} \quad \operatorname{Re} \lambda > \lambda_\alpha.$$

Dal fatto che  $\overline{A + B}$  è la minima estensione chiusa di  $A + B$  segue facilmente il

**COROLLARIO.** *Siano  $A$  e  $B$  operatori lineari chiusi in  $X$  verificanti le ipotesi del Teorema 1 o del Teorema 2. Allora esiste un numero reale  $\lambda_\alpha$  tale che l'equazione :*

$$(25) \quad \lambda x - Ax - Bx = y \quad y \in X, \quad \operatorname{Re} \lambda > \lambda_\alpha$$

ammette una soluzione debole unica, cioè esiste una successione  $\{x_n\}$  in  $D_A \cap D_B$  convergente a  $x$  e tale che  $\lambda x_n - Ax_n - Bx_n$  converge a  $y$ .

Proviamo infine due Teoremi di regolarizzazione:

**TEOREMA 3.** Siano  $A$  e  $B$  operatori lineari chiusi verificanti oltre alle ipotesi del Teorema 1 o del Teorema 2 (con l'ipotesi (II)) la seguente:

(IV)  $\exists \mu_1 \in \rho(B)$  e due numeri positivi  $K_1$  e  $\alpha_1$ ,  $\alpha_1 \leq 1$  tali che se  $x \in D_{B^2}$ ,  $e^{tA} x \in D_{B^2} \forall t \geq 0$  e risulta:

$$(26) \quad \|(\mu_1 - B) e^{tA} R(\mu_1, B) - e^{tA}\| \leq K_1 t^{\alpha_1} \quad \forall t \geq 0.$$

Allora esiste un numero reale  $\lambda_1$  tale che l'equazione:

$$(27) \quad \lambda x - Ax - Bx = y, \quad y \in D_B, \quad \operatorname{Re} \lambda > \lambda_1$$

ammette una soluzione unica  $x$  appartenente a  $D_A \cap D_B$ .

**DIMOSTRAZIONE.**  $t \rightarrow B^2 e^{tA} B^{-2}$  è un semigruppato di classe  $c_0$  che indichiamo con  $e^{t\tilde{A}}$ . In virtù dell'ipotesi (IV) si può porre

$$\begin{aligned} T_\lambda^1 &= B T_\lambda B^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{t\tilde{A}} e^{tB} dt, \quad Q_\lambda^1 = B Q_\lambda B^{-1} = \\ &= \int_0^\infty e^{-\lambda t} (e^{t\tilde{A}} - e^{t\bar{A}}) B e^{tB} dt, \quad F_\lambda^1 = B F_\lambda B^{-1}; \end{aligned}$$

sia ora  $y \in D_B$  e  $x = F_\lambda y$  la soluzione debole della (27), si ha  $x = F_\lambda y = F_\lambda B^{-1} B y$  e quindi  $x \in D_B$  e  $Bx = F_\lambda^1 B y$ , inoltre  $x \in D_A$  essendo  $Ax = \lambda x - Bx - y$ .

**TEOREMA 4.** Siano  $A$  e  $B$  operatori lineari chiusi in  $X$  verificanti oltre alle ipotesi del Teorema 1 o del Teorema 2 (con l'ipotesi 2) la seguente:

(V)  $\exists \mu_2 \in \rho(B)$  e tre numeri positivi  $K_2, \omega, \nu$  con  $0 \leq \nu < 1$  tali che se  $x \in D_{B^\nu}$ ,  $e^{tA} x \in D_{B^\nu} \forall t \geq 0$  e si ha <sup>6)</sup>:

$$(28) \quad \| B^\nu e^{tA} B^{-\nu} \| \leq K_2 e^{\omega t} \quad \forall t \geq 0.$$

Allora la soluzione debole dell'equazione (25) appartiene a  $D_{B^\nu}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Basta osservare che, in virtù dell'ipotesi (V) si ha per ogni  $x \in X$   $F_\lambda x \in D_{B^\nu}$  con  $B^\nu F_\lambda = \int_0^\infty (B^\nu e^{tA} B^{-1}) B^\nu e^{tB} dt$  quindi la soluzione della (25) appartiene a  $D_{B^\nu}$ .

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 gennaio 1968.

---

<sup>6)</sup> Per la definizione della potenza frazionaria  $B^\nu$  vedi [7].

## BIBLIOGRAFIA

- [1] G. DA PRATO, *Nouveau type de semi-groupe*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 262 996-998 (1966).  
*Semigruppì di crescita  $n$* , Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, XX, 753-782, (1966).
- [2] G. DA PRATO, *Equations operationelles dans les espaces de Banach et applications*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 60-62 (1968).  
*Somma di generatori infinitesimali di semi-gruppì di contrazione e equazioni di evoluzione in spazi di Banach* (in corso di stampa su Annali di Matematica).
- [3] G. DA PRATO, *Equations operationelles dans les espaces de Banach*, (cas analytique), C. R. Acad. Sc. Paris, t. 266, 277-79 (1968).
- [4] P. GRISVARD, *Equations operationelles abstraites dans les espaces de Banach et problemes aux limites dans des ouverts cylindriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa XXI, 307-347 (1967).
- [5] P. GRISVARD, Cours Peccot 1968.
- [6] H. HILLE-R. S. PHILLIPS, *Functional Analysis and semi-groups*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI (1957).
- [7] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer-Verlag (1965).