RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CARMELO TOTARO

Precessioni generalizzate regolari ellittiche per un solido pesante asimmetrico

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 40 (1968), p. 144-150

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1968__40__144_0>

PRECESSIONI GENERALIZZATE REGOLARI ELLITTICHE PER UN SOLIDO PESANTE ASIMMETRICO

CARMELO TOTARO *)

Si possono definire, seguendo G. Grioli [1]), certi movimenti di un corpo rigido $\mathcal{C}$, intorno ad un suo punto 0, generalizzando il classico concetto di moto di precessione.

Sia $\varepsilon = \| \varepsilon_{rs} \|$ $(r, s = 1, 2, 3)$ una matrice di ordine tre ad elementi indipendenti dal tempo, $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare di $\mathcal{C}$ nel suo moto intorno ad 0 e rispetto ad un riferimento $\mathcal{S}$, $\mathbf{k}$ un versore solidale con $\mathcal{C}$, $\mathbf{c}$ un versore solidale con $\mathcal{S}$, μ e ν due quantità scalari dipendenti, al più, dal tempo.

Si dicono moti [1]) di *precessione generalizzata* tutti e solo quelli per i quali

$$\varepsilon \boldsymbol{\omega} = \nu \mathbf{c} + \mu \mathbf{k}. \tag{1}$$

In particolare, se ν e μ sono indipendenti dal tempo, si dirà che il movimento è una *precessione generalizzata regolare.*

Senza diminuire la generalità le precessioni generalizzate regolari non degeneri si possono caratterizzare con la condizione [2]):

$$\varepsilon \boldsymbol{\omega} = \mathbf{c} + \mathbf{K}, \tag{2}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 7.

Indirizzo dell'Autore: Via Pietro Castelli, 8   98100 Messina.

[1]) G. GRIOLI, *Qualche teorema di cinematica dei moti rigidi,* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, vol. XXXIV, fasc. 6 (1963).

[2]) Basta in (1) mutare $(1/\nu)\varepsilon$ e $\mu\mathbf{k}/\nu$ rispettivamente in ε e $\mathbf{K}$.

ove **K** è un vettore, in generale non unitario, solidale con $\mathcal{C}$. Esistono esempi di moti dinamicamente possibili descrivibili come precessioni generalizzate [1]).

In questa nota, senza entrare, per brevità, nei dettagli dimostrativi, descriverò alcuni moti dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico soddisfacenti alla condizione di essere precessioni generalizzate regolari.

Tali movimenti godono anche della proprietà che l'estremo del vettore velocità angolare, applicato nel punto fisso 0, descrive una ellisse appartenente ad uno dei due piani in cui si spezza, nel caso in esame, il cono di Staude. In qualche caso, detti movimenti tendono rapidamente a differire di poco da moti rotatori uniformi.

In una ricerca di carattere generale tendente a determinare precessioni generalizzate regolari per un solido pesante, sono stato condotto a fissare l'attenzione su un sottoinsieme di moti che si ottengono da (2) imponendo per ω l'ulteriore condizione

$$\omega = \omega^* + \mathbf{a} \cos \chi + \mathbf{b} \sin \chi, \qquad (\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0) \tag{3}$$

ove i vettori del secondo membro sono solidali con $\mathcal{C}$ e χ è un parametro dipendente dal tempo. È facile riconoscere che l'estremo P di 0, ω al variare di χ descrive nello spazio solidale con $\mathcal{C}$ una ellisse; ω^* è il vettore che conduce da 0 al centro di questa ellisse, **a** e **b** una possibile coppia di semiassi concepiti vettorialmente.

Con una trasformazione ben nota [3]), si può pure scrivere

$$\omega = \frac{\mathbf{A}_2\tau^2 + \mathbf{A}_1\tau + \mathbf{A}_0}{\tau^2 + 1}, \tag{3'}$$

ove

$$\mathbf{A}_2 = \omega^* - \mathbf{a}, \quad \mathbf{A}_1 = 2\mathbf{b}, \quad \mathbf{A}_0 = \omega^* + \mathbf{a} \tag{4}$$

e con τ parametro dipendente dal tempo.

I movimenti di un $\mathcal{C}$ che avvengono in conformità alla (2) e alla (3) possono dirsi *precessioni generalizzate regolari ellittiche* o brevemente *moti* $\mathcal{P}_e$.

---

[3]) $\cos \chi = (1 - \tau^2)/(1 + \tau^2), \quad \sin \chi = 2\tau/(1 + \tau^2)$.

Sia $\mathcal{T} = 0\xi\eta\zeta$ la terna degli assi principali d'inerzia di $\mathcal{C}$ relativi ad 0; A, B, C $(A < B < C)$ i rispettivi momenti principali d'inerzia, p, q, r le componenti rispetto alla $\mathcal{T}$ di ω e a_i, b_i, K_i $(i = 1, 2, 3)$ le componenti dei vettori $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{K}$. Inoltre, a partire da qui, $\mathbf{c} \equiv \equiv (c_1, c_2, c_3)$ avrà il significato di versore della verticale discendente; OG^* è il prodotto del modulo del peso per la coordinata vettoriale OG del baricentro G di $\mathcal{C}$.

Sia

$$(5) \qquad \begin{cases} n^2 = a^2 \cos^2 \widehat{\mathbf{aK}} = \dfrac{(C-A)(C-B)}{AB} a_3^2, \qquad M = 2m + n \\[2ex] R = \pm \sqrt{\dfrac{C(C-B)}{A(B-A)}}, \qquad \beta = A - B + C, \end{cases}$$

con m parametro arbitrario e si supponga che i vettori $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ e $\mathbf{K}$ e la matrice ε verifichino le condizioni

$$(6) \qquad \begin{cases} a_1 = -Ra_3, \qquad a_2 = 0 \\[1ex] b_1 = 0, \qquad b_2 = \dfrac{nAR}{C-B}, \qquad b_3 = 0 \\[1ex] K_1 = \dfrac{C}{AR} K_3, \qquad K_2 = 0, \qquad OG^* = -\dfrac{M^2 B}{K^2} \mathbf{K} \\[1ex] \cos \widehat{\mathbf{aK}} = \mp \sqrt{\dfrac{(B-A)(C-B)}{B\beta}} = \mp \sqrt{1 - \dfrac{AC}{B\beta}} \\[2ex] \varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & 0 & R\left(\varepsilon_{11} + \dfrac{A}{C-B}\dfrac{nK_3}{Ma_3}\right) \\[2ex] \varepsilon_{21} & -\dfrac{C-A}{MnA} a_3 K_3 & R\,\varepsilon_{21} \\[2ex] \varepsilon_{31} & 0 & R\left(\varepsilon_{31} - \dfrac{C}{R(C-B)}\dfrac{nK_3}{Ma_3}\right) \end{vmatrix}. \end{cases}$$

Con un procedimento, che per brevità ometto, ho trovato che per il solido considerato sono dinamicamente possibili i movimenti definiti dalle uguaglianze:

$$
\left\{
\begin{aligned}
& p = -Ra_3\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \qquad q = \frac{nAR}{C-B}\frac{2\tau}{1+\tau^2}, \qquad r = a_3\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2} \\
& c_1 = \frac{-K_3R}{M(C-B)(1+\tau^2)}\{[M(B-A)+nA]\tau^2+[M(B-A)-nA]\} \\
& c_2 = \frac{-K_3R}{M(C-B)(1+\tau^2)}\,2(C-A)\,a_3\tau \\
& c_3 = \frac{-K_3}{M(C-B)(1+\tau^2)}\{[M(C-B)-nC]\tau^2+[M(C-B)+nC]\},
\end{aligned}
\right. \tag{7}
$$

ove τ è una qualsiasi soluzione dell'equazione

$$\dot{\tau} + m\,\tau^2 + (m+n) = 0. \tag{8}$$

I moti (7) sono moti $\mathcal{P}_e$ e si può agevolmente provare che sono pure moti di Hess, cioè $OG \times \sigma\omega = 0$.

La eliminazione di τ da $(7_{1,2,3})$ porta alle equazioni non parametriche della traiettoria, rispetto a $\mathcal{C}$, dell'estremo P di $0, \omega$:

$$p = -Rr, \qquad \frac{q^2}{\frac{C(C-A)}{B(B-A)}a_3^2} + \frac{r^2}{a_3^2} = 1. \tag{9}$$

Al variare delle condizioni iniziali varia in generale a_3 e si ha una famiglia ∞^1 di *ellissi omotetiche* col centro in 0, con l'asse maggiore nel piano $0\xi\zeta$ e con l'asse minore posto sull'asse medio 0η. Più compiutamente si può affermare che a_3 ed m sono i soli parametri che restano liberi e che possono determinarsi attraverso le condizioni iniziali. È possibile scrivere le formule che legano detti parametri all'energia meccanica totale E ed a K_z, momento delle quantità di moto rispetto alla verticale discendente:

$$(10)\qquad E=\frac{C\,(C-A)}{2\,(B-A)}\,a_3^2-BM^2,\quad K_z=-\frac{BC\,(C-A)}{(C-B)(B-A)}\,\frac{K_3na_3}{M}\,.$$

K_3 non è arbitrario perché, dalla condizione $c^2=1$, segue:

$$(11)\qquad K_3^2=\frac{M^2\,(C-B)^2\,A\,(B-A)}{B\,(C-A)\,[M^2\,(B-A)\,(C-B)+n^2AC]}\,.$$

Dal punto di vista della teoria delle precessioni generalizzate occorre osservare che restano pure arbitrari ε_{11}, ε_{21}, ε_{31}.

È interessante osservare che il piano π, che contiene l'ellisse (9), è *uno dei due piani in cui si spezza il cono di Staude* [4]), nel caso in esame.

Lo studio di (8) porta a distinguere tre casi:

$$(12)\qquad 1+\frac{n}{m}\gtreqless 0.$$

a) Nel primo caso, posto $\tau_1^2=1+n/m$ si trova

$$(13)\qquad \tau=-\tau_1\operatorname{tag} m\,\tau_1\,(t-t_0),$$

ove t_0 è una costante d'integrazione. Si ottengono movimenti in cui *P descrive l'intera ellisse* (9) ed ω ha andamento *periodico*. Tali movimenti si hanno con queste condizioni iniziali

$$(14)\qquad \begin{cases} p_0=-Ra_3 & q_0=0,\ r_0=a_3 \\ c_{10}=-K_3R\,\dfrac{M(B-A)-nA}{M\,(C-B)}, & c_{20}=0,\ c_{30}=-K_3\,\dfrac{M(C-B)+nC}{M(C-B)}, \end{cases}$$

ove l'indice $_0$ serve appunto ad indicare che le grandezze sono calcolate ad un prefissato istante t_0.

---

[4]) Cfr. ad es. E. LEIMANIS, *The General Problem of The Motion of Coupled Rigid Bodies about a Fixed Point,* Chap. I, § 8.3. Ed. Springer (1965).

b) Nel secondo caso, $1 + n/m = 0$, da (8) si ottiene

$$\tau = \frac{1}{m(t - t_0)}. \tag{15}$$

Si trovano *movimenti a meta asintotica*. Le corrispondenti condizioni iniziali sono:

$$\left\{\begin{aligned} & p_0 = Ra_3, \qquad q_0 = 0, \qquad r_0 = -a_3 \\ & c_{10} = \pm \frac{2A - B}{B}\sqrt{\frac{C(C-B)}{\beta(C-A)}}, \quad c_{20} = 0, \\ & c_{30} = \mp \frac{2C - B}{B}\sqrt{\frac{A(B-A)}{\beta(C-A)}}, \end{aligned}\right. \tag{16}$$

mentre per $t \to +\infty$ si ottiene

$$\left\{\begin{aligned} & p_\infty = -Ra_3, \qquad q_\infty = 0, \qquad r_\infty = a_3 \\ & c_{1\infty} = \mp\sqrt{\frac{C(C-B)}{\beta(C-A)}}, \quad c_{2\infty} = 0, \quad c_{3\infty} = \pm\sqrt{\frac{A(B-A)}{\beta(C-A)}}. \end{aligned}\right. \tag{17}$$

Ovviamente, come si è già avvertito, ω ad ogni istante appartiene al piano π di Staude. Precisamente, coincide inizialmente con un estremo dell'asse maggiore dell'ellisse (9) e tende a raggiungere l'estremo opposto. Invece $\mathbf{c}$ non appartiene a π, ma vi tende asintoticamente. Tale tendenza asintotica, per un dato $\mathcal{C}$, è tanto più rapida quanto maggiore è m, ossia, in definitiva, quanto maggiore è a_3.

c) Nel terzo caso, si ponga $\tau_2^2 = -(1 + n/m)$.

Evidentemente $\tau = \pm \tau_2$ è soluzione di (8) e dà luogo a ben note rotazioni uniformi. Ma si ha pure

$$\tau = -\tau_2 \frac{1 - e^{2m\tau_2(t-t_0)}}{1 + e^{2m\tau_2(t-t_0)}}. \tag{18}$$

Corrispondentemente si ottengono movimenti ad ancor più rapida tendenza asintotica un po' meno particolari dei precedenti, come si riconosce attraverso le seguenti formule

$$
(19)\quad \begin{cases}
p_0 = -Ra_3 & q_0 = 0,\ r_0 = a_3 \\[2ex]
c_{10} = -K_3R\,\dfrac{M(B-A)-nA}{M(C-B)},\ c_{20} = 0,\ c_{30} = -K_3\,\dfrac{M(C-B)+nC}{M(C-B)} \\[2ex]
p_\infty = Ra_3\,\dfrac{M}{n},\quad q_\infty = \mp A\,\dfrac{2Rm}{C-B}\sqrt{-\left(1+\dfrac{n}{m}\right)},\quad r_\infty = -a_3\,\dfrac{M}{n} \\[2ex]
c_{1\infty} = -R\,\dfrac{K_3B}{C-B},\ c_{2\infty} = \pm\,\dfrac{K_3a_3(C-A)}{Mn}\,\dfrac{2Rm}{C-B}\sqrt{-\left(1+\dfrac{n}{m}\right)},\ c_{3\infty} = \dfrac{K_3B}{C-B}.
\end{cases}
$$

Le soluzioni dei casi *b*) e *c*), a prescindere dalle rotazioni uniformi, sono altri esempi di moti che tendono asintoticamente a diventare rotazioni permanenti [5]).

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 gennaio 1968.

---

[5]) Cfr. ad es. G. Grioli, *Movimenti dinamicamente possibili per un solido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla,* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, Vol. XXII, fasc. 4 (1957) [n. 4].

C. Totaro, *Su una particolare classe di movimenti di un corpo rigido asimmetrico soggetto a forze di potenza nulla,* « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », ser. VIII, Vol. XL fasc. 3 (1966) [n. 4].