

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DOMENICO BOCCIONI

**Struttura degli anelli generati dai loro
elementi unità sinistri**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 86-101

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__86_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

STRUTTURA DEGLI ANELLI GENERATI DAI LORO ELEMENTI UNITÀ SINISTRI

DOMENICO BOCCIONI *)

Com'è ben noto, un anello 1-generato A (cioè un anello A dotato di un elemento unità bilatero 1 , e generato da 1) è isomorfo all'anello, $I/(\text{car } A)$, degli interi modulo $\text{car } A$ ($\text{car } A =$ caratteristica di A). Quindi un anello 1-generato è univocamente determinato (a meno di isomorfismi) dalla sua caratteristica (≥ 0).

D'altra parte, è pure noto (e fu osservato per primo dal Baer nel 1942: v. [2]**)) che un anello A è dotato di 1 se, e solo se, esso è dotato di un unico elemento unità sinistro.

Si presenta quindi, in modo naturale, il problema di mettere in luce la struttura di un anello A che sia E_s -generato (cioè di un anello A che contenga almeno un elemento unità sinistro e che sia generato dall'insieme $E_s = E_s(A)$, finito o infinito, di tutti i suoi elementi unità sinistri).

Questo problema viene studiato e risolto nel presente lavoro. Come risultati principali, si è trovato (n.º 5, teor. 2 e coroll.) che *la struttura di un anello E_s -generato A è univocamente determinata dalla sua caratteristica, $\text{car } A$, e dalla struttura additiva del suo annihilatore sinistro $Z_s(A)$ (n.º 1), ed inoltre (n.º 6, teor. 3) che l'in-*

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

***) I numeri fra parentesi quadre rimandano alla bibliografia alla fine del lavoro.

tero $\text{car } A (\geq 0)$ e lo zero-anello $Z_s(A)$ possono essere del tutto arbitrari, con l'unica restrizione (evidentemente necessaria) che $\text{car } A$ sia un multiplo di $\text{car } Z_s(A)$.

È da rilevare (n.º 1, prop. II) che, se un anello A è dotato di elementi unità sinistri, il loro numero cardinale $|E_s(A)|$ coincide con l'ordine $|Z_s(A)|$ dell'annichilatore sinistro di A .

In base ai suddetti risultati si può dunque dire che, mentre l'ordine $|A|$ di un anello E_s -generato A è sempre univocamente determinato da $\text{car } A$ e $|E_s(A)|$ (infatti, per il teor. 2 del n.º 5, $|A|$ è il prodotto dei due numeri cardinali $|I/(\text{car } A)|$ e $|Z_s(A)| = |E_s(A)|$), non lo è invece in generale (a meno di isomorfismi) l'anello A stesso, (perché in generale lo zero-anello $Z_s(A)$ non è determinato dal suo ordine $|E_s(A)|$).

Il fatto (ricordato all'inizio) che un anello E_s -generato A sia univocamente determinato (a meno di isomorfismi) da $\text{car } A$ e $|E_s(A)|$ quando $|E_s(A)| = 1$ (cioè quando A è 1-generato), è dovuto appunto alla circostanza che lo zero-anello $Z_s(A)$ è, in tal caso, univocamente determinato (a meno di isomorfismi) dal suo ordine ($= 1$).

Questa stessa circostanza si presenta anche quando $|E_s(A)| = p = \text{numero primo}$ (poiché in tal caso $Z_s(A)$ è lo zero-anello col gruppo additivo ciclico di ordine p). Quindi dal teor. 3 del n.º 6 risulta in particolare che: Per ogni numero primo p , e per ogni multiplo intero $m \geq 0$ di p , esiste uno e (a meno di isomorfismi) un solo anello E_s -generato di caratteristica m , che contiene esattamente p elementi unità sinistri.

1. Sia A un anello (associativo) qualsiasi. Ricordiamo ([7], pp. 53, 55, 22) che un elemento e di A dicesi una *identità sinistra* (oppure un *elemento unità sinistro*: [11], pp. 62, 45) di A , se

$$ex = x \quad \text{per ogni } x \in A.$$

L'insieme di tutte le identità sinistre dell'anello A verrà denotato nel seguito con

$$E_s(A).$$

Ricordiamo poi ([11], pp. 47, 62, 395) che un elemento z dell'anello A dicesi un *annullatore sinistro* di A , se

$$zx = 0 \quad \text{per ogni } x \in A.$$

L'insieme di tutti gli annullatori sinistri dell'anello A verrà denotato nel seguito con

$$Z_s(A).$$

Tale insieme $Z_s(A)$ (che è detto *l'annichilatore sinistro* di A : [8], p. 92, cfr. [7], pp. 83, 82) è notoriamente un ideale (bilatero) di A ([7], p. 83, [11], p. 395).

Si verifica subito che:

I. Se $E_s(A) \neq \emptyset$ ¹⁾, allora $E_s(A)$ è un laterale dell'ideale $Z_s(A)$, cioè ([7], p. 64):

$$E_s(A) = e + Z_s(A),$$

qualunque sia $e \in E_s(A)$.

Dalla I risulta che ([7], p. 38):

II. Se $E_s(A) \neq \emptyset$, allora $E_s(A)$ e $Z_s(A)$ sono equipotenti ([6], p. 54), cioè²⁾:

$$|E_s(A)| = |Z_s(A)|.$$

III. Se A non è nullo³⁾, allora:

$$E_s(A) \cap Z_s(A) = \emptyset.$$

Infatti da $a \in E_s(A) \cap Z_s(A)$ seguirebbe $x = ax = 0$ per ogni $x \in A$, cioè $A = \{0\}$, contro l'ipotesi.

IV. Sia $E_s(A) \neq \emptyset$. Allora l'anello A è nullo se, e solo se, l'anello (quoziente) $A/Z_s(A)$ è nullo.

Infatti, se A non è nullo, allora (v. I e III) $A/Z_s(A)$ contiene almeno i due elementi (distinti) $E_s(A)$ e $Z_s(A)$, quindi non è nullo.

V. Se $e \in E_s(A)$, allora $(a, b \in A)$:

$$ae \in E_s(A) \quad \text{implica} \quad a \in E_s(A),$$

$$be \in Z_s(A) \quad \text{implica} \quad b \in Z_s(A).$$

¹⁾ \emptyset = insieme vuoto.

²⁾ Se M è un insieme qualsiasi, denoteremo con $|M|$ il numero cardinale (la potenza) di M .

³⁾ Dicendo che un anello A è nullo, intendiamo dire che $A = \{0\}$, cioè che A contiene un solo elemento (lo zero).

Infatti, per ogni $x \in A$: $ax = a(ex) = (ae)x = x$, $bx = b(ex) = (be)x = 0$.

VI. Se $E_s(A) \neq \emptyset$, allora $E_s(A)$ è l'identità (bilatera: [7], pp. 53, 22) dell'anello $A/Z_s(A)$.

Infatti, $E_s(A) \neq \emptyset$ implica intanto

$$(1) \quad |Z_s(A/Z_s(A))| = 1,$$

cioè che $A/Z_s(A)$ ha un unico annullatore sinistro (il suo zero $Z_s(A)$);
invero, posto $\bar{a} = a + Z_s(A)$ ($a \in A$), se

$$\bar{a} \in Z_s(A/Z_s(A)),$$

cioè se $\bar{a}\bar{x} = Z_s(A)$ per ogni $x \in A$, allora $ax \in Z_s(A)$ per ogni $x \in A$, quindi in particolare $ae \in Z_s(A)$ con $e \in E_s(A) (\neq \emptyset)$, quindi (per la V): $a \in Z_s(A)$, da cui

$$\bar{a} = Z_s(A),$$

dunque appunto vale la (1). D'altra parte

$$E_s(A/Z_s(A)) \neq \emptyset,$$

poiché evidentemente (v. I) $E_s(A)$ è una identità sinistra di $A/Z_s(A)$. Ma allora dalla (1) risulta (per la II) che $E_s(A)$ è l'unica identità sinistra di $A/Z_s(A)$. Ne segue, per un noto risultato di Baer ([2], p. 631, Lemma 2; v. [7], p. 55, ex. 6), che $E_s(A)$ è appunto l'identità di $A/Z_s(A)$, (cfr. pure [3], p. 1, *terzult. capov.*).

2. Sia G un qualsiasi gruppo additivo (non necessariamente abeliano). Se $x \in G$, chiameremo nel seguito *ordine di x* , e lo denoteremo col simbolo

$$\text{ord } x,$$

il minimo intero $r > 0$ tale che $rx = 0$ (= zero di G), se un tale r esiste (cfr. [7], p. 33), ed altrimenti il numero zero, cioè converremo (con Zassenhaus: [13], pp. 15 e 3) che

$$\text{ord } x = 0$$

significhi che il sottogruppo (ciclico) generato da x sia infinito. Dunque, per ogni fissato $x \in G$, si ha $0 \leq \text{ord } x \in I^4$, ed $\text{ord } x$ coincide (v. [7], p. 32) col generatore ≥ 0 dell'ideale (principale) di I costituito da quei $q (\in I)$ tali che $qx = 0$, cioè ⁵⁾:

$$(2) \quad qx = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \text{ord } x \mid q \quad (q \in I).$$

Ricordiamo che l'*esponente* del gruppo G , che denoteremo con $\text{esp } G$,

si può definire (v. [13], p. 108, ex. 2b) come l'intero ≥ 0 che è il minimo comun multiplo degli ordini di tutti gli elementi x di G :

$$(3) \quad 0 \leq \text{esp } G = \text{mcm}(\text{ord } x)_{x \in G}.$$

Ciò equivale a dire che $\text{esp } G$ coincide col generatore ≥ 0 dell'ideale intersezione di tutti gli ideali principali ($\text{ord } x$) di I generati dai numeri $\text{ord } x$ ($x \in G$):

$$(3') \quad (\text{esp } G) = \bigcap_{x \in G} (\text{ord } x),$$

cioè che (v. (2)) ⁶⁾:

$$(3'') \quad qx = 0 \quad \forall x \in G \quad \text{se e solo se} \quad \text{esp } G \mid q \quad (q \in I).$$

Ne segue (poiché si verifica subito direttamente che i $q \in I$ tali che $qx = 0 \quad \forall x \in G$ costituiscono un ideale di I : cfr. [13], p. 108, ex. 2a) la seguente altra equivalente definizione ([13], p. 108, ex. 3, cfr. [12], p. 92): $\text{esp } G$ è il minimo intero $m > 0$ tale che $mx = 0 \quad \forall x \in G$, se un tale m esiste, altrimenti $\text{esp } G = 0$.

Se A è un anello qualsiasi, è allora chiaro (ricordando la sua definizione più diffusa: v., ad es., [10], p. 24) che la caratteristica

⁴⁾ I denotata (qui e nel seguito) l'anello dei numeri interi.

⁵⁾ $a \mid b$ significa: a è un divisore di b .

⁶⁾ \forall significa: per ogni.

di A , che denoteremo nel seguito con

$$\text{car } A,$$

coincide con l'esponente di A^+ ⁷⁾):

$$(4) \quad \text{car } A = \text{esp } A^+,$$

(la definizione (4)-(3'') è ad es. adottata in [4], p. 114). Ricordiamo inoltre ([9], cfr. [1], pp. 31, 20) che la definizione (4) è equivalente ad un'altra ben nota definizione di $\text{car } A$: quella adottata da Jacobson in [7], p. 74, (una affermazione analoga vale pure per la definizione di $\text{esp } G$, se G è un gruppo abeliano).

Dalle (4)-(3) risulta evidentemente che (cfr. [13], p. 108, ex. 4):

VII. *Se S è un qualsiasi sottoanello di un anello A , allora $\text{car } S \mid \text{car } A$.*

Si osservi inoltre che (v. n.^o 1):

VIII. *Se $e \in E_s(A)$, allora $\text{ord } e = \text{car } A$.*

Infatti, poiché (cfr. [7], p. 74):

$$qe = 0 \quad \text{se e solo se} \quad qx = 0 \quad \forall x \in A \quad (q \in I),$$

la conclusione segue subito dalle (2) e (4)-(3'').

Ciò premesso, proviamo che (v. n.^o 1):

IX. *Se $E_s(A) \neq \emptyset$, allora $\text{car } A = \text{car } A/Z_s(A)$.*

Infatti, se $e \in E_s(A)$, risulta intanto

$$(5) \quad qe = 0 \quad \text{se e solo se} \quad qe \in Z_s(A) \quad (q \in I),$$

poiché $qe \in Z_s(A)$ implica appunto $qe = q(ee) = (qe)e = 0$. D'altra parte (si pensi all'omomorfismo canonico di A sopra $A/Z_s(A)$ ricordando la I): $qe \in Z_s(A)$ se e solo se $qE_s(A) = Z_s(A)$, quindi (per la (5)):

$$qe = 0 \quad \text{se e solo se} \quad qE_s(A) = Z_s(A) \quad (q \in I),$$

⁷⁾ A^+ denota (qui e nel seguito) il gruppo additivo dell'anello A ([7], p. 50, cfr. [11], p. 62).

donde (v. (2)): $\text{ord } e = \text{ord } E_s(A)$. E da questa segue appunto la conclusione, in base alle VI e VIII.

3. Osserviamo ora che (v. n.^o 1):

X. Se $E_s(A) \neq \emptyset$, e se A' è un sottoanello di A , allora:

$$E_s(A) \subseteq A' \text{ implica } Z_s(A) \subseteq A'.$$

Infatti, se $e \in E_s(A)$, sappiamo che (v. I): $E_s(A) = e + Z_s(A)$, da cui (cfr. [7], p. 38): $Z_s(A) = -e + E_s(A)$, donde appunto la conclusione.

XI. Se $E_s(A) \neq \emptyset$, e se A' è un sottoanello di A contenente $E_s(A)$:

$$E_s(A) \subseteq A' \subseteq A,$$

allora risulta

$$E_s(A) = E_s(A'), \quad Z_s(A) = Z_s(A').$$

Infatti (si ricordi la X), è chiaro intanto che

$$E_s(A) \subseteq E_s(A'), \quad Z_s(A) \subseteq Z_s(A').$$

Sia $e \in E_s(A)$ ($\subseteq A'$). Allora $e' \in E_s(A')$ ($\subseteq A'$), cioè $e'x' = x' \forall x' \in A'$, implica $e'e = e$ ($\in E_s(A)$), donde (per la V) $e' \in E_s(A)$, quindi appunto

$$E_s(A') \subseteq E_s(A),$$

mentre $z' \in Z_s(A')$ ($\subseteq A'$), cioè $z'x' = 0 \forall x' \in A'$, implica $z'e = 0$ ($\in Z_s(A)$), donde (per la V) $z' \in Z_s(A)$, quindi appunto

$$Z_s(A') \subseteq Z_s(A).$$

Possiamo ora riassumere i risultati fin qui ottenuti (nei n.ⁱ 1-3) nel seguente

TEOREMA 1: *Supponiamo che non sia vuoto l'insieme $E_s(A)$ delle identità sinistre (n.^o 1) di un anello A , e denotiamo con $Z_s(A)$ l'annichilatore sinistro (n.^o 1) di A .*

Allora $E_s(A)$ è un laterale dell'ideale $Z_s(A)$ di A (quindi i due insiemi $E_s(A)$ e $Z_s(A)$ sono equipotenti). $E_s(A)$ è l'identità (bilatera) dell'anello quoziente $A/Z_s(A)$ (il cui zero è $Z_s(A)$), e le caratteristiche dei due anelli A ed $A/Z_s(A)$ sono eguali. Inoltre l'anello $A/Z_s(A)$ non è nullo (n.º 1), se (e solo se) l'anello A non è nullo.

Infine $E_s(A)$ e $Z_s(A)$ coincidono rispettivamente con l'insieme $E_s(A')$ delle identità sinistre e con l'annichilatore sinistro $Z_s(A')$ di ogni sottoanello A' di A che contenga $E_s(A)$.

4. Diremo che un anello A è E_s -generato, se l'insieme $E_s = E_s(A)$ delle sue identità sinistre (n.º 1) non è vuoto :

$$E_s(A) \neq \emptyset ,$$

e se inoltre A è generato da $E_s(A)$ ⁸⁾ :

$$A = [[E_s(A)]].$$

Diremo che un anello A è 1-generato, se A è dotato di una identità (bilatera) 1, cioè ([7], p. 22, 3º capov., p. 55, ex. 6) se $E_s(A)$ contiene uno e un solo elemento (l'identità 1) :

$$E_s(A) = \{1\} ,$$

e se inoltre A è generato da 1 :

$$A = [[1]].$$

La struttura degli anelli 1-generati è ben nota. Ricordiamo infatti che (v. ad es. [7], pp. 70-71) :

XII. Se un anello A è 1-generato, allora (v. n.º 2) ⁹⁾ :

$$A \cong I/(\text{car } A).$$

⁸⁾ Se M è un sottoinsieme di un anello A , denoteremo con $[[M]]$ il sottoanello di A generato da M ([7], p. 63), e con $[[a]]$ il sottoanello di A generato da $a \in A$ (cioè generato da $M = \{a\}$: cfr. [7], pp 103, 31)

⁹⁾ \cong significa : isomorfo.

Viceversa, se $A \cong I/(m)$, con $0 \leq m \in I$, allora A è 1-generato e $\text{car } A = m$.

La XII si può esprimere dicendo che, per ogni intero $m \geq 0$, esiste uno e (a meno di isomorfismi) un solo anello 1-generato di caratteristica m : l'anello $I/(m)$ degli interi modulo m .

Poiché un anello 1-generato non è altro che un anello E_s -generato con $|E_s| = 1$ (cioè contenente una sola identità sinistra), è naturale porsi il problema di determinare la struttura degli anelli E_s -generati con $|E_s| > 1$ (cioè contenenti almeno due identità sinistre). Allo studio di questo problema è appunto dedicato il presente lavoro.

Proviamo che (v. n.ⁱ 1 e 2):

XIII. *Sia $E_s(A) \neq \emptyset$. Allora A è E_s -generato se, e solo se, $A/Z_s(A)$ è 1-generato.*

Infatti, consideriamo l'omomorfismo canonico f di A sopra $A/Z_s(A)$. Se B è un qualsiasi sottoanello di A contenente $Z_s(A)$, allora l'applicazione

$$Z_s(A) \subseteq B \rightarrow f(B) = B/Z_s(A)$$

è notoriamente una biiezione dell'insieme dei sottoanelli di A che contengono $Z_s(A)$ sull'insieme di tutti i sottoanelli di $A/Z_s(A)$ ([5], p. 127, Théor. 4); ed è chiaro (ricordando le I e X) che

$$(6) \quad E_s(A) \subseteq B \quad \text{se e solo se} \quad E_s(A) \in f(B).$$

Dalla (6) risulta che: A è l'unico sottoanello di A contenente $E_s(A)$ se, e solo se, $A/Z_s(A)$ ($= f(A)$) è l'unico sottoanello di $A/Z_s(A)$ contenente la sua identità $E_s(A)$ (si ricordi la VI). Ma ciò prova appunto la XIII ([7], p. 63).

XIV. *Sia $E_s(A) \neq \emptyset$. Allora A è E_s -generato se, e solo se, $A/Z_s(A) \cong I/(\text{car } A)$.*

Infatti, ciò segue immediatamente dalle IX, XII e XIII.

XV. *Se A è E_s -generato, allora $A/Z_s(A)$ è 1-generato. Ma il viceversa non è vero.*

In base alla XIII (che prova la 1^a affermazione) la 2^a affermazione della XV equivale a dire che: Esiste un anello A con

$$(7) \quad E_s(A) = \emptyset$$

(cioè privo di identità sinistre) e tale che

$$(8) \quad A/Z_s(A) \text{ è } 1\text{-generato.}$$

Infatti un qualsiasi zero-anello ¹⁰⁾ non nullo A soddisfa evidentemente le (7) e (8). Un esempio meno banale di anello A soddisfacente le (7) e (8) è l'anello prodotto (cartesiano) $A = B \times C$ ([5], p. 129), con B anello degli interi modulo 2 e C zero-anello di ordine 2, come subito si verifica. Più in generale, non è difficile verificare che ogni anello prodotto $A = B \times C$, con B anello E_s -generato e C zero-anello non nullo arbitrari, soddisfa le (7) e (8) (i due esempi precedenti son casi particolari di quest'ultimo).

5. Proviamo che (v. n.ⁱ 1, 2, 4):

XVI. Se $e \in E_s(A)$, allora e è l'identità (bilatera) di $[[e]]$, per il quale risulta ¹¹⁾:

$$(9) \quad Ie = [[e]] \cong I/(\text{car } A).$$

Infatti, poiché $e^2 = e$, si ha

$$(10) \quad (q_1 e)(q_2 e) = (q_1 q_2) e \quad \forall q_1, q_2 \in I,$$

donde appunto l'eguaglianza (9), e quindi la prima affermazione poiché il sottoanello $[[e]]$ di A risulta commutativo (v. (10)). Infine l'isomorfismo (9) si ottiene subito dalle VIII e XII.

XVII. Se A è un anello E_s -generato ed $e \in E_s(A)$, allora ¹²⁾:

$$(11) \quad A^+ = [[e]]^+ \oplus Z_s(A)^+.$$

¹⁰⁾ Chiamiamo zero-anello ([7], p. 74, cfr. [5], p. 115) un anello A in cui $xy = 0 \quad \forall x, y \in A$. Com'è ben noto, ogni gruppo abeliano è il gruppo additivo A^+ di uno zero-anello A .

¹¹⁾ Se A è un anello, ed $a \in A$, denoteremo con Ia l'insieme di tutti gli elementi qa di A ($q \in I$), (cfr. [7], p. 71). Ia è dunque l'insieme degli elementi del sottogruppo (ciclico) di A^+ generato da a .

¹²⁾ \oplus denota somma diretta.

Infatti, $e \in E_s(A)$ implica intanto (si pensi all'omomorfismo canonico di A sopra $A/Z_s(A)$ ricordando la I):

$$(12) \quad qe \in qE_s(A) \quad \forall q \in I.$$

D'altra parte, poiché A è E_s -generato, allora (v. XV) $A/Z_s(A)$ è 1-generato, quindi notoriamente risulta (si ricordi la VI):

$$(13) \quad A/Z_s(A) = IE_s(A).$$

Se $a \in A$, allora $a \in a + Z_s(A) \in A/Z_s(A)$, quindi (per la (13)) esiste un $q \in I$ tale che (v. (12)):

$$a + Z_s(A) = qE_s(A) = qe + Z_s(A),$$

e perciò $a \in qe + Z_s(A)$, ossia esiste pure uno $z \in Z_s(A)$ tale che

$$(14) \quad a = qe + z;$$

poiché $qe \in Ie$, ciò appunto significa che intanto (v. (9)): $A^+ = [[e]]^+ + Z_s(A)^+$. Per provare che questa somma è diretta, basta dunque provare che

$$[[e]] \cap Z_s(A) = \{0\}.$$

E invero, se $x \in [[e]] \cap Z_s(A)$, allora (v. (9)) esiste un $q' \in I$ tale che $x = q'e \in Z_s(A)$, da cui (per la (5) del n.º 2) segue appunto $x = q'e = 0$. Dunque la (11) è provata.

XVIII. Sia A un anello E_s -generato ed $e \in E_s(A)$. Allora $[[e]]$ coincide con l'ideale (principale) sinistro di A generato da e ([7], p. 77);

$$(15) \quad [[e]] = Ae.$$

$[[e]]$ non è un ideale destro di A se, e solo se, $|E_s(A)| > 1$.

Infatti, se $a \in A$, allora vale la (14) con $q \in I$, $z \in Z_s(A)$, quindi $ae = (qe + z)e = (qe)e + ze = qe + 0$, cioè

$$(14') \quad ae = qe,$$

ossia $Ae \subseteq Ie$, donde appunto la (15) (v. (9)). Inoltre, se $[[e]]$ è un ideale destro di A , allora esso contiene tutti i prodotti $ex = x$ ($x \in A$), quindi $[[e]] = A$, quindi (v. XVI e [7], p. 22, 3^o capov.) $|E_s(A)| = 1$; viceversa, se $|E_s(A)| = 1$, allora $A = [[e]]$, quindi $[[e]]$ è un ideale destro di A .

XIX. Se A è E_s -generato ed $e \in E_s(A)$, allora la (11) coincide con la « decomposizione sinistra di Peirce » dell'anello A relativa all'elemento idempotente e di A (v. [8], p. 48).

Infatti, ciò è appunto provato dalla (15) e dal fatto che $Z_s(A)$ coincide evidentemente (poiché $e \in E_s(A)$) col sottoinsieme di A costituito da tutte le differenze $a - ae$ ($a \in A$).

In base ai risultati ottenuti in questo n.^o 5, vale dunque il seguente

TEOREMA 2: Sia A un anello generato dall'insieme $E_s(A)$, supposto non vuoto, delle sue identità sinistre (n.^o 1, 4):

$$A = [[E_s(A)]],$$

ed e sia una fissata identità sinistra di A :

$$e \in E_s(A).$$

Allora l'anello A è somma diretta gruppale (cfr. [5], p. 131) del suo sottoanello Ie (generato da e), isomorfo ad $I/(\text{car } A)$ ($I =$ anello dei numeri interi, $0 \leq \text{car } A =$ caratteristica di A), e del suo annichilatore sinistro $Z_s(A)$ (n.^o 1). L'anello A è dunque l'insieme di tutte le somme:

$$(16) \quad qe + z \quad (q \in I, z \in Z_s(A)),$$

per le quali si hanno le seguenti regole di calcolo ($q_1, q_2 \in I, z_1, z_2 \in Z_s(A)$):

$$(17) \quad q_1 e + z_1 = q_2 e + z_2$$

se, e solo se, valgono entrambe le seguenti (17'):

$$(17') \quad q_1 \equiv q_2 \pmod{\text{car } A}, \quad z_1 = z_2;$$

$$(18) \quad (q_1 e + z_1) + (q_2 e + z_2) = (q_1 + q_2) e + (z_1 + z_2);$$

$$(19) \quad (q_1 e + z_1)(q_2 e + z_2) = (q_1 q_2) e + q_1 z_2.$$

Da questo teorema 2 si ottiene subito il seguente

COROLLARIO: *Affinché due anelli E_s -generati (n.^o 4) A ed A' siano isomorfi, è necessario e sufficiente che siano soddisfatte le due seguenti condizioni (n.ⁱ 2, 1):*

$$(20) \quad \text{car } A = \text{car } A'$$

$$(21) \quad Z_s(A) \cong Z_s(A').$$

Infatti, la necessità è evidente. Per provare la sufficienza delle (20), (21), basta osservare che, se f è un isomorfismo di $Z_s(A)$ sopra $Z_s(A')$, fissati a piacere $e \in E_s(A)$ ed $e' \in E_s(A')$ (n.^o 1), allora la corrispondenza

$$qe + z \rightarrow qe' + f(z) \quad (q \in I, z \in Z_s(A))$$

risulta appunto (in virtù del teor. 2 e della (20)) un isomorfismo di A sopra A' .

6. In base al teorema 2, la struttura di un anello E_s -generato (n.^o 4) è del tutto nota, quando sia nota la struttura additiva del suo annichilatore sinistro (n.^o 1) $Z_s(A)$ (si osservi infatti che $Z_s(A)$, essendo uno zero-anello, è univocamente determinato dal suo gruppo additivo $Z_s(A)^+$). Naturalmente (v. VII e (4)):

$$(22) \quad \text{esp } Z_s(A)^+ \mid \text{car } A,$$

(questa (22) vale anche per un anello A qualsiasi). Ebbene, a parte la necessaria condizione (22), vedremo in questo n.^o che la struttura del gruppo abeliano $Z_s(A)^+$ può essere del tutto arbitraria. Ciò verrà provato dal seguente teorema 3, il quale da un lato è un teorema d'immersione (di un qualsiasi zero-anello come annichilatore sinistro in un anello E_s -generato), d'altro lato è appunto un teorema di esistenza (di anelli E_s -generati aventi caratteristiche ed annichilatori sinistri arbitrari, a parte la (22)).

TEOREMA 3: *Sia Z uno zero-anello ¹⁰⁾ qualsiasi, ed $m \geq 0$ sia un qualsiasi multiplo (intero) della sua caratteristica (n.^o 2):*

$$(23) \quad \text{car } Z \mid m.$$

Allora esiste un anello E_s -generato (n.^o 4) A , il cui annichilatore sinistro $Z_s(A)$ (n.^o 1) è isomorfo a Z , e la cui caratteristica è m :

$$(24) \quad Z_s(A) \cong Z, \quad \text{car } A = m.$$

Tale anello E_s -generato A è univocamente determinato, a meno di isomorfismi, dallo zero-anello Z e dall'intero m soddisfacenti la (23), e contiene esattamente $|Z|$ ²⁾ identità sinistre (n.^o 1):

$$(25) \quad |E_s(A)| = |Z|.$$

Ammissa l'esistenza di un tale anello A , le ultime due affermazioni del teor. 3 seguono immediatamente dal precedente corollario (n.^o 5) e dalla II (n.^o 1). L'esistenza di un tale A (e quindi la prova del teorema 3) risulta poi della seguente proposizione XX.

XX. *Siano dati uno zero-anello Z ed un numero intero $m \geq 0$ soddisfacenti la (23). Allora l'insieme prodotto cartesiano $(I/(m)) =$ anello degli interi modulo m):*

$$(26) \quad (I/(m)) \times Z$$

è un anello, che denotiamo con A , rispetto alle seguenti addizione e moltiplicazione ($q_i \in I, \bar{q}_i = q_i + (m) \in I/(m), z_i \in Z; i = 1, 2$):

$$(27) \quad (\bar{q}_1, z_1) + (\bar{q}_2, z_2) = (\bar{q}_1 + \bar{q}_2, z_1 + z_2),$$

$$(28) \quad (\bar{q}_1, z_1)(\bar{q}_2, z_2) = (\bar{q}_1 \bar{q}_2, q_1 z_2),$$

(dove $\bar{q}_1 + \bar{q}_2$ e $\bar{q}_1 \bar{q}_2$ sono calcolati nell'anello $I/(m)$, $z_1 + z_2$ e $q_1 z_2$ nel gruppo Z). Questo anello A è E_s -generato (n.^o 4) e soddisfa le due condizioni (24).

Infatti, che l'insieme (26) sia un gruppo abeliano rispetto alla (27) è ben noto (si tratta del gruppo prodotto cartesiano dei gruppi $(I/(m))^+$ e Z^+ : [5], p. 73).

Osserviamo allora che $(q_1, q'_1 \in I, z_2 \in Z)$:

$$q_1 \equiv q'_1 \pmod{m} \text{ implica } q_1 z_2 = q'_1 z_2,$$

poiché (in virtù dell'ipotesi (23)): $\text{ord } z_2 \mid m$ (n.º 2); quindi il 2º membro della (28) è univocamente determinato dai due fattori a 1º membro, cioè la (28) definisce effettivamente una moltiplicazione nell'insieme (26). Si verifica facilmente che tale moltiplicazione (28) è associativa, e che essa è distributiva, a sinistra e a destra, rispetto all'addizione (27), provando così la prima affermazione della XX.

È chiaro che $(\bar{1}, 0)$ ($0 = \text{zero di } Z$) è una identità sinistra dell'anello A così ottenuto (anzi è chiaro che le identità sinistre di A sono le $|Z|$ coppie $(\bar{1}, z_1)$, con z_1 arbitrario $\in Z$) e che $\text{ord } (\bar{1}, 0) = m$ (n.º 2); quindi appunto (v. VIII):

$$(29) \quad E_s(A) \neq \emptyset, \quad \text{car } A = m.$$

È pure chiaro (poiché $\bar{0}$ è l'unico annullatore sinistro dell'anello $I/(m)$: v. II) che $Z_s(A)$ è costituito dalle $|Z|$ coppie $(\bar{0}, z_1)$, con z_1 arbitrario $\in Z$, e che la biiezione $(\bar{0}, z_1) \rightarrow z_1$ è un isomorfismo di $Z_s(A)$ sopra lo zero-anello Z ; quindi appunto

$$Z_s(A) \cong Z.$$

Infine l'applicazione $(\bar{q}_1, z_1) \rightarrow \bar{q}_1$ è evidentemente un omomorfismo dell'anello A sopra l'anello $I/(m)$, il cui nucleo è $Z_s(A)$; quindi $A/Z_s(A) \cong I/(\text{car } A)$ (v. (29)), e perciò appunto (v. XIV) A è E_s -generato. Dunque la XX è provata. Si osservi che l'eguaglianza

$$(\bar{q}, z) = q(\bar{1}, 0) + (\bar{0}, z),$$

valida per ogni $(\bar{q}, z) \in A$, non è altro che la decomposizione (14), relativa ad $e = (\bar{1}, 0) \in E_s(A)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] ALBERT, A. A.: *Fundamental concepts of higher algebra*, The University of Chicago Press (1956).
- [2] BAER, R.: *Inverses and zero-divisors*, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 48, pp. 630-638 (1942).
- [3] BAER, R.: *Kriterien für die Existenz eines Einselements in Ringen*, Math. Zeitschrift, Bd. 56, pp. 1-17 (1952).
- [4] BARSOTTI, I: *Appunti di algebra*, Università di Pisa (1965).
- [5] BOURBAKI, N.: *Algèbre, Chap. 1*, Hermann (1958).
- [6] BOURBAKI, N.: *Théorie des ensembles, Chap. III*, Hermann (1956).
- [7] JACOBSON, N.: *Lectures in abstract algebra, Vol. I*, Van Nostrand (1951).
- [8] JACOBSON, N.: *Structure of rings*, Amer. Math. Soc. (1956).
- [9] KHAN, N. A.: *The characteristic of a ring*, The Amer. Math. Monthly, Vol. 70, p. 736 (1963).
- [10] MCCOY, N. H.: *Rings and ideals*, The Math. Assoc. of America (1948).
- [11] RÉDEI, L.: *Algebra, Teil 1*, Akad. Verlagsg. (1959).
- [12] SCOTT, W. R.: *Group theory*, Prentice-Hall (1964).
- [13] ZASSENHAUS, H. J.: *The theory of groups*, Chelsea (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18 luglio 1967.