

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SERGIO SPAGNOLO

**Una caratterizzazione degli operatori differenziali
autoaggiunti del 2° ordine a coefficienti
misurabili e limitati**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 56-64

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__56_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

UNA CARATTERIZZAZIONE DEGLI
OPERATORI DIFFERENZIALI AUTOAGGIUNTI
DEL 2° ORDINE A COEFFICIENTI
MISURABILI E LIMITATI.

SERGIO SPAGNOLO *)

Sono state più volte date delle caratterizzazioni astratte di carattere generale degli operatori differenziali lineari (vedi ad es. [3], [4]); in questa nota viene caratterizzata una classe particolare di operatori differenziali aventi notevole interesse per la teoria delle equazioni alle derivate parziali (cfr. [1] e [2]), precisamente gli operatori del tipo :

$$\sum_1^n a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \right) \quad a_{ij} = a_{ji}$$

dove i coefficienti a_{ij} sono funzioni reali misurabili e limitate.

Questa ricerca mi è stata proposta dal Prof. E. de Giorgi che ringrazio per gli utili colloqui avuti sull'argomento.

NOTAZIONI. n è un numero intero ≥ 1 ; \mathbb{R}^n è lo spazio euclideo n -dimensionale.

Se $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ è una n -pla di interi ≥ 0 , si pone :

$$|r| = r_1 + \dots + r_n$$
$$D^r = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{r_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)^{r_n}$$

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore. Pisa.

Per ogni k intero ≥ 0 , si considerano gli spazi lineari sul corpo reale:

$\mathcal{C}_0^k = \mathcal{C}_0^k(\mathbf{R}^n)$ (risp.: $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$) = spazio delle funzioni reali su \mathbf{R}^n con derivate di ordine $\leq k$ (risp.: di ogni ordine) continue ed aventi supporto compatto.

$\mathcal{D}' = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ è lo spazio delle distribuzioni reali su \mathbf{R}^n .

Per k intero ≥ 1 :

$L^k = L^k(\mathbf{R}^n)$ (risp.: $L^\infty = L^\infty(\mathbf{R}^n)$) = spazio delle funzioni reali misurabili su \mathbf{R}^n aventi la k -ma potenza sommabile (risp.: essenz. limitate).

$$H^1 = H^1(\mathbf{R}^n) = \left\{ u \in L^2 : \frac{\partial u}{\partial x_j} \in L^2 ; j = 1, 2, \dots, n \right\}.$$

Tutti questi spazi si intendono dotati delle usuali strutture topologiche.

Una forma bilineare α agente su spazi di distribuzioni si dice *locale* se

$$\alpha(u, v) = 0 \text{ quando } \text{supp}(u) \cap \text{supp}(v) = \emptyset.$$

Diremo che α è *D-locale* se è verificata la condizione più forte:

$$\alpha(u, v) = 0 \text{ quando } \text{supp}(\text{grad } u) \cap \text{supp}(\text{grad } v) = \emptyset.$$

L'applicazione

$$(u, v) \sim \rightarrow \sum_1^n \int_{\mathbf{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \quad (a_{ij} \in L^\infty)$$

definisce una forma bilineare e continua su $H^1 \times H^1$, simmetrica se $a_{ij} = a_{ji}$, che è certamente *D-locale*.

Mostreremo (Teorema 1) che questa è l'espressione più generale di una forma bilineare, continua, simmetrica e *D locale* su $H^1 \times H^1$, e caratterizzeremo poi (Teorema 2) il caso in cui le matrici $\|a_{ij}(x)\|$ hanno (per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$) spettro contenuto in un comune intervallo $[\lambda_0, A_0]$ con $\lambda_0 > 0$.

TEOREMA 1. « Sia $\alpha : H^1 \times H^1 \rightarrow \mathbf{R}$ una forma bilineare, continua e simmetrica, tale che $\alpha(u_1, u_2) = 0$ quando $u_1, u_2 \in \mathcal{D}$ sono tali che u_1 è costante in un intorno del supporto di u_2 .

Allora α ammette la seguente rappresentazione :

$$(1) \quad \alpha(u, v) = \sum_{ij} \int_{\mathbf{R}^n} a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} dx \quad u, v \in H^1$$

per certe funzioni $a_{ij} \in L^\infty$ tali che $a_{ij} = a_{ji}$.

DIMOSTRAZIONE. Consideriamo la restrizione di α a $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$: si tratta di una forma bilineare e separatamente continua (che indicheremo ancora α) e pertanto rappresentabile in virtù del teorema dei nuclei di Schwartz ([4]) nel modo seguente :

$$\alpha(u, v) = \langle T, u \otimes v \rangle \quad u, v \in \mathcal{D}$$

dove $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^{2n})$ e $(u \otimes v)(x, y) = u(x) \cdot v(y)$.

Ma la nostra ipotesi su α implica in particolare che $\alpha(u, v) = 0$ quando u e v sono tali che $\text{supp}(u) \cap \text{supp}(v) = \emptyset$ e da questo segue facilmente che la distribuzione T ha supporto contenuto nella diagonale Δ di \mathbf{R}^{2n} .

Si ha allora, tenendo conto che Δ è un supporto regolare ([5], Teor. XXXIV) :

$$T = \sum_{pq} D_x^p D_y^q \mu_{pq}$$

dove $\{\mu_{pq}\}$ è una famiglia *loc. finita* (cioè su ogni parte compatta di \mathbf{R}^{2n} si ha $\mu_{pq} \equiv 0$ per $|p| + |q|$ abbastanza grande) di misure aventi supporto in Δ .

Proiettando le μ_{pq} su \mathbf{R}_x^n ⁽¹⁾ si arriva all'espressione

$$\alpha(u, v) = \sum_{pq} \langle \tilde{\mu}_{pq}, D^p u \cdot D^q v \rangle$$

¹⁾ Se σ è una di tali misure, indicheremo $\tilde{\sigma}$ la sua proiezione, cioè la misura \mathbf{R}^n definita dall'espressione

$$\langle \tilde{\sigma}, w \rangle = \langle \sigma, \tilde{w} \rangle \quad w \in \mathcal{C}_0^0(\mathbf{R}^n)$$

essendo $\tilde{w}(x, y)$ una qualsiasi funzione continua su \mathbf{R}^{2n} tale che

$$\tilde{w}(x, x) = w(x) \quad \forall x.$$

e quindi alla

$$(2) \quad \alpha(u, v) = \sum_r \langle T_r, D_r u \cdot v \rangle \quad u, v \in \mathcal{D}$$

dove $\{T_r\}$ è una famiglia loc. finita di distribuzioni su \mathbf{R}^n .

Mostreremo ora che la continuità della α , e cioè l'esistenza di una costante $M > 0$ per cui

$$(3) \quad |\alpha(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall u, v \in \mathcal{D}$$

implica

$$T_r = 0 \quad \text{per } |r| > 2.$$

In corrispondenza di un'arbitraria $w \in \mathcal{D}$, scegliamo una $\psi \in \mathcal{D}$ tale che $\psi \equiv 1$ in un intorno di $\text{supp}(w)$, e, per ogni vettore $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n) \in \mathbf{R}^n$ con $\eta_j \geq 1, \forall j$, consideriamo le funzioni

$$\begin{cases} u_\eta(x) = \psi(x) \text{sen} \langle \eta, x \rangle \\ v_\eta(x) = w(x) \text{cos} \langle \eta, x \rangle \\ \tilde{u}_\eta(x) = \psi(x) \text{cos} \langle \eta, x \rangle \\ \tilde{v}_\eta(x) = -w(x) \text{sen} \langle \eta, x \rangle. \end{cases}$$

Si ha allora

$$\|u_\eta\|_{H^1}^2, \|v_\eta\|_{H^1}^2, \|\tilde{u}_\eta\|_{H^1}^2, \|\tilde{v}_\eta\|_{H^1}^2 \leq C |\eta|^2$$

(essendo $|\eta|^2 = \langle \eta, \eta \rangle$) dove la costante C dipende solo da w e da ψ .

D'altra parte, osservando che $u_\eta \equiv \text{sen} \langle \eta, x \rangle$ e $\tilde{u}_\eta \equiv \text{cos} \langle \eta, x \rangle$ in un intorno di $\text{supp}(w)$, si ricava dalla (2):

$$\alpha(u_\eta, v_\eta) + \alpha(\tilde{u}_\eta, \tilde{v}_\eta) = \sum_{|r| \text{ dispari}} (-1)^{\frac{|r|-1}{2}} \langle T_r, w \rangle \eta^r.$$

La (3) conduce allora alla disuguaglianza, valida per ogni $\eta \in \mathbf{R}^n$ con $\eta_j \geq 1$,

$$\left| \sum_{|r| \text{ dispari}} (-1)^{\frac{|r|-1}{2}} \langle T_r, w \rangle \eta^r \right| \leq 2MC |\eta|^2$$

da cui segue che tutte le parti omogenee di grado > 2 del polinomio nella η che compare al 1° membro (la somma è finita perchè la famiglia $\{T_r\}$ è loc. finita) sono identicamente nulle, e quindi :

$$\langle T_r, w \rangle = 0 \quad \text{per } |r| \text{ dispari } > 2.$$

In modo analogo (scegliendo $u_\eta = \psi \cos \langle \eta, x \rangle$, $v_\eta = w \cos \langle \eta, x \rangle$, $\tilde{u}_\eta = \psi \sin \langle \eta, x \rangle$, $\tilde{v}_\eta = w \sin \langle \eta, x \rangle$) si ottiene :

$$\langle T_r, w \rangle = 0 \quad \text{per } |r| \text{ pari } > 2.$$

Data l'arbitrarietà di w si ha pertanto $T_r = 0$ per $|r| > 2$, cioè :

$$\alpha(u, v) = \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r, D^r u \cdot v \rangle.$$

Utilizzando ora l'ipotesi che α è una forma simmetrica, si ha

$$\alpha(u, v) = \frac{1}{2} (\alpha(u, v) + \alpha(v, u)) = \frac{1}{2} \sum_{|r| \leq 2} \langle T_r, D^r u \cdot v + u \cdot D^r v \rangle.$$

Ma essendo :

$$D^r (u \cdot v) = D^r u \cdot v + u \cdot D^r v \quad \text{per } |r| = 1$$

$$D^r (u \cdot v) = D^r u \cdot v + u \cdot D^r v + \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} + \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

$$\text{per } r = (0, \dots, \underset{(i)}{1}, \dots, 0, \dots, \underset{(j)}{1}, \dots, 0)$$

si ricava

$$\begin{aligned} \alpha(u, v) &= \frac{1}{2} \sum_{|r| \leq 2} (-1)^{|r|} \langle D^r T_r, u \cdot v \rangle + \frac{1}{2} \sum_1^n \langle T_{ij} + T_{ji}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle \\ &= \langle A, u \cdot v \rangle + \sum_1^n \langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle, \end{aligned}$$

dove A e B_{ij} sono distribuzioni su \mathbf{R}^n e $B_{ij} = B_{ji}$.

Se ora, per ogni $u \in \mathcal{D}$, si sceglie $\tilde{u} \in \mathcal{D}$ in modo che $\tilde{u} \equiv 1$ in un intorno di $\text{supp}(u)$, si ottiene $u \tilde{u} = u$, $\frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_j} = 0$; ne segue,

per l'ipotesi che α è D -locale, $0 = \alpha(u, \tilde{u}) = \langle A, u \rangle$ e quindi, data l'arbitrarietà di u ,

$$A = 0.$$

Il teorema sarà allora interamente provato se si mostrerà che le B_{ij} sono delle funzioni misurabili ess. limitate su \mathbf{R}^n .

Infatti in tal caso l'espressione

$$(u, v) \rightsquigarrow \sum_1^n \int_{\mathbf{R}^n} B_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_j} dx$$

definisce manifestamente una forma bilineare e continua su $H^1 \times H^1$ che coincide con la α su $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$ e quindi su tutto $H^1 \times H^1$.

Resta quindi da provare il seguente

LEMMA. Sia $\alpha: \mathcal{D} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{R}$ un'applicazione bilineare tale che, $\forall u, v \in \mathcal{D}$:

$$(i) \quad \alpha(u, v) = \sum_1^n \langle B_{ij}, \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_j} \rangle \quad B_{ij} = B_{ji} \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$$

$$(ii) \quad |\alpha(u, v)| \leq M \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}.$$

Allora si ha $B_{ij} \in L^\infty \quad \forall i, j$.

DIMOSTRAZIONE (del Lemma).

In corrispondenza di una $w \in \mathcal{D} (w \neq 0)$ e agli interi $k, s \in \{1, 2, \dots, n\}$, definiamo le funzioni seguenti:

$$w_1(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \operatorname{sen}(\varrho x_k) \operatorname{sen}(\varrho x_s)$$

$$w_2(x) = -\frac{1}{\varrho} w(x) \cos(\varrho x_k) \cos(\varrho x_s)$$

$$w_3(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \operatorname{sen}(\varrho x_k) \cos(\varrho x_s)$$

$$w_4(x) = \frac{1}{\varrho} w(x) \cos(\varrho x_k) \operatorname{sen}(\varrho x_s)$$

dove $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ e $\varrho = \frac{\|w\|_{H^1}}{\|w\|_{L^2}}$.

Si ottiene allora con facili calcoli :

$$\|w_j\|_{H^1}^2 \leq 4 \|w\|_{L^2}^2 + \frac{2}{\rho^2} \|w\|_{H^1}^2 = 6 \|w\|_{L^2}^2 \quad j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\alpha(w_1, w_2) + \alpha(w_3, w_4) = \langle B_{ks}, w^2 \rangle$$

da cui per la (ii)

$$|\langle B_{ks}, w^2 \rangle| \leq 12 M \|w\|_{L^2}^2 = 12 M \|w^2\|_{L^1}.$$

Si ha in conclusione la maggiorazione seguente :

$$(4) \quad |\langle B_{ks}, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_{L^1} \quad \forall \varphi = w^2 \text{ con } w \in \mathcal{D}.$$

Ma ogni $u \in \mathcal{D}$ che sia ≥ 0 è limite, in \mathcal{D} , di una successione di funzioni del tipo w^2 con $w \in \mathcal{D}$ [scelta invero una $\psi \in \mathcal{D}$, $\psi \geq 0$, che valga 1 in un intorno di $\text{supp}(u)$ si ha che $\left\{ \left(\psi \cdot \sqrt{u + \frac{1}{j}} \right)^2 \right\} \xrightarrow{j} u$]; pertanto la (4) vale per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$ che sono ≥ 0 e quindi anche per tutte le $\varphi \in \mathcal{D}$.

Ciò implica che il funzionale B_{ks} si estende con continuità allo spazio L^1 , i. e. $B_{ks} \in L^\infty$.

Facendo variare fra 1 ed n gli interi k, s si ottiene la tesi del Lemma e quindi del Teorema 1.

Osserviamo infine che, nel caso che la forma α sia coercitiva, i coefficienti a_{ij} della rappresentazione (1) si possono ulteriormente precisare.

TEOREMA 2. « Se α è come nell'enunciato del Teor. 1 e inoltre :

$$(5) \quad A_0 \sum_1^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2}^2 \geq \alpha(u, u) \geq \lambda_0 \sum_1^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in \mathcal{D} \quad (\lambda_0 > 0)$$

le a_{ij} che compaiono nella rappresentazione (1) della forma α , sono tali che

$$(6) \quad A_0 |\xi|^2 \geq \sum_1^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \lambda_0 |\xi|^2$$

per ogni $\xi \in \mathbf{R}^n$ e per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$ ».

DIMOSTRAZIONE: Poichè le *funzioni a scalino* sono dense in L^∞ , basta provare il Teorema nel caso particolare che le a_{ij} siano funzioni a scalino.

La (6) equivale al fatto che, per quasi ogni $x \in \mathbf{R}^n$, la matrice $\|a_{ij}(x)\|$ ha tutti i suoi autovalori compresi fra λ_0 e Λ_0 .

Proviamo che essi sono $\geq \lambda_0$, l'altra prova essendo analoga.

Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme S di \mathbf{R}^n di misura non-nulla tale che per ogni $x \in S$ la matrice $\|a_{ij}(x)\|$ ha un autovalore $< \lambda_0$.

Restringendo eventualmente S , possiamo supporre che le funzioni $a_{ij}(x)$ abbiano su S il valore costante $a_{ij}^{(0)}$; indichiamo $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di $\|a_{ij}^{(0)}\|$ e supponiamo ad esempio che $\lambda_1 < \lambda_0$.

Non è inoltre restrittivo supporre S compatto.

Fissato $\varepsilon > 0$, sia S_ε un aperto contenente S e tale che $\text{mis}(S_\varepsilon - S) \leq \varepsilon$. Si ottiene allora dalla (5):

$$\sum_1^n a_{ij}^{(0)} \int_S \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} dx \geq \lambda_0 \sum_1^n \int_S \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2 dx - \varepsilon K \sum_1^n \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_j} \right|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{D}$ con $\text{supp}(u) \subseteq S_\varepsilon$ (la cost. K dipendendo solo dalle a_{ij}).

Eseguendo il cambiamento di coordinate $\mu: x \sim \rightarrow y = Mx$, dove M è una matrice ortogonale che diagonalizza la $\|a_{ij}^{(0)}\|$, e ponendo $T = \mu(S)$, $T_\varepsilon = \mu(S_\varepsilon)$, tale diseuguaglianza diventa:

$$(7) \quad \sum_1^n \lambda_j \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy \geq \lambda_0 \sum_1^n \int_T \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2 dy - \varepsilon K \sum_1^n \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial u}{\partial y_j} \right|^2$$

per ogni $u \in \mathcal{D}$ con $\text{supp}(u) \subseteq T_\varepsilon$.

Scelta ora una $w \in \mathcal{D}$ tale che $|w| \leq 1$, $w \equiv 0$ su $\mathbf{R}^n - T_\varepsilon$, $w \equiv 1$ in un intorno di T , applichiamo la (7) alle funzioni

$$u_k(y) = \frac{1}{k} w(y) \text{sen}(ky_1)$$

$$v_k(y) = -\frac{1}{k} w(y) \cos(ky_1).$$

Sommando membro a membro le due disequaglianze relative allo stesso valore di k , ed osservando che

$$\sum_1^n \left(\left| \frac{\partial u_k}{\partial y_j} \right|^2 + \left| \frac{\partial v_k}{\partial y_j} \right|^2 \right) = w^2 + \frac{1}{k^2} \sum_1^n \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right|^2$$

si ha:

$$\lambda_1 \text{ mis}(T) \geq \lambda_0 \text{ mis}(T) - \varepsilon K \left(1 + \frac{1}{k^2} \sum_1^n \sup_{\mathbf{R}^n} \left| \frac{\partial w}{\partial y_j} \right|^2 \right).$$

Da ciò, dividendo per $\text{mis}(T)$ e passando al limite per $k \rightarrow +\infty$, segue

$$\lambda_1 \geq \lambda_0 - \varepsilon K$$

che porta, data l'arbitrarietà di ε , ad una contraddizione con l'ipotesi fatta $\lambda_1 < \lambda_0$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] DE GIORGI, E. « Sulla differenziabilità e l'analicità degli estremali degli integrali multipli regolari ». Mem. Acad. Sci. Torino Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3) 3 (1957) 25-43.
- [2] NASH, J. « Parabolic equations ». Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A 43 (1957) 754-758.
- [3] PEETRE, J. « Rectification à l'article : Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels ». Math. Scand. Vol. 7 Fasc. 1 (1960) 116-120.
- [4] SCHWARTZ, L. « Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles ». J. d'Analyse Math. 4 (1954-55) 88-148.
- [5] SCHWARTZ, L. « Théorie des distributions ». t. 1. Paris, Hermann, 1951.

[Pervenuto alla redazione il 20 marzo 1967].