RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

Sopra un problema di immersione per certi fasci algebrici coerenti su una varietà affine

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 400-411
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__400_0>

SOPRA UN PROBLEMA DI IMMERSIONE PER CERTI FASCI ALGEBRICI COERENTI SU UNA VARIETÀ AFFINE

di CLAUDIO MARGAGLIO *)

È noto (cfr. [5]) che su una varietà algebrica irriducibile affine normale (su un corpo K commutativo e algebricamente chiuso), ogni fascio algebrico coerente $\mathbf{F}$ che soddisfi alla proprietà di estensione, (cfr. [1], [2]), risulta isomorfo con il nucleo di un omomorfismo algebrico del tipo $\mathbf{A}^p \longrightarrow \mathbf{A}^q$, essendo $\mathbf{A}$ il fascio degli anelli locali della varietà considerata, e si vede immediatamente che se il rango di $\mathbf{F}$ è eguale a s non è restrittivo supporre $q = p - s$. Due questioni che si presentano sono allora le seguenti:

1) si può migliorare il risultato indebolendo le ipotesi sulla varietà algebrica?

2) qual'è il minimo intero p per il quale si ottiene una sequenza esatta:

$$\text{(i)} \qquad O \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}^p \longrightarrow \mathbf{A}^{p-s} \,?$$

Con riferimento alla prima questione, porgo un esempio di varietà affine irriducibile non normale, sulla quale esistono fasci soddisfacenti alla proprietà di estensione che non risultano isomorfi con nessun nucleo d'omomorfismo $\mathbf{A}^p \longrightarrow \mathbf{A}^q$; con riferimento alla seconda questione, dimostro che qualora vi sia per il fascio $\mathbf{F}$ una sequenza esatta

*) Indirizzo dell'A.: Departamento de Matemàticas. Universidad de Oriente. Cumaná. Venezuela.

del tipo:

$$O \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}^s \to \mathbf{F} \to \mathbf{T} \to O$$

ove il supporto del fascio **T** abbia codimensione > 1, si può direttamente costruire una sequenza esatta:

(ii) $$O \to \mathbf{F} \to \mathbf{A}^s \to \mathbf{A}.$$

Da ciò segue, utilizzando un risultato dimostrato da Santuzza Baldassarri-Ghezzo in [3], che se la varietà considerata è a « forme intersezioni complete » allora per ogni fascio **F** soddisfacente alla proprietà di estensione esiste una sequenza esatta del tipo (ii).

n. 1. PROPOSIZIONE 1. *Se A è l'anello delle coordinate di una curva algebrica piana, allora ogni A-modulo di rango s che sia nucleo di un omomorfismo $A^p \to A^{p-s}$ si può generare con $s+1$ elementi.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $R = K[X, Y]$ e sia P un polinomio che generi in R l'ideale principale associato con la curva piana in questione.

Allora $A = R/(P)$.

Si consideri una sequenza esatta di A-moduli:

$$O \to F \xrightarrow{\alpha} A^p \xrightarrow{\beta} A^{p-s},$$

e se $\beta(a_1, \dots, a_p) = (t_1, \dots, t_{p-s})$, con $t_i = {}_1^p\Sigma_j\, a_{ij}\, a_j$, si definisca un omomorfismo R-moduli $\beta' : R^{p+1} \to R^{p-s}$ ponendo:

$$\beta'(r_0, r_1, \dots, r_p) = (f_1, \dots, f_{p-s}), \quad f_i = r_0 P + {}_1^p\Sigma_j\, a'_{ij}\, r_j,$$

essendo a'_{ij} un polinomio di R rappresentante di a_{ij}.

È allora immediato che tutti e soli gli elementi di $Nc(\beta)$ sono rappresentati dagli elementi di $Nc(\beta')$, non considerando la prima coordinata.

Si osservi ora (cfr. [7]) che in R ogni catena di sizigie per un modulo M di tipo finito e senza torsione, è del tipo:

$$O \longrightarrow R^n \longrightarrow R^p \longrightarrow M \longrightarrow O,$$

tenuto anche conto del noto fatto che ogni R-modulo proiettivo è libero (cfr. [9]).

Dunque l'R-modulo $Nc(\beta')$ è libero di rango $s+1$ e generabile pertanto con $s+1$ elementi: di conseguenza $Nc(\beta)$ risulta un A-modulo generabile con $s+1$ elementi.

Esempio 1. Il fascio $\mathbf{F}$ di $\mathbf{A}$-moduli sulla curva piana $V(X^3 - Y^4)$, associato con l'ideale generato dai tre elementi $[X^2]$, $[X \cdot Y]$, $[Y^2]$ soddisfa (in modo triviale) alla proprietà di estensione ma non è isomorfo con il nucleo di nessun omomorfismo del tipo $\mathbf{A}^p \longrightarrow \mathbf{A}^q$ (e di conseguenza non è neppure riflessivo).

Applicando il risultato ottenuto più sopra, con $P = X^3 - Y^4$, è sufficiente verificare che l'ideale $\{[X^2], [X \cdot Y], [Y^2]\}$ non è generabile con meno di tre elementi in $A = \dfrac{K[X, Y]}{(P)}$ è ciò risulta dal fatto che se per tre elementi a_1, a_2, a_3 di A risulta $a_1[X^2] + a_2[X \cdot Y] + a_3[Y^2] = 0$ allora necessariamente la terna ordinata a_1, a_2, a_3 è combinazione lineare delle tre terne: $([X], [O], -[Y^2])$, $([Y], -[X], [O])$, $([O], [Y], -[X])$ i cui elementi appartengono tutti all'ideale massimale dalla localizzazione di $\mathbf{A}$ nell'origine.

Esempio 2. Per ottenere un esempio più interessante si può passare alla superficie di equazione $X^3 - Y^4 = 0$ in K^3 e trasformarla per esempio per mezzo dell'isomorfismo biregolare $K^3 \longrightarrow K^3$ definito con: $X = X' + Z'$, $Y = Y'$, $Z = Z'$. Si ottiene in tal modo che il fascio associato con l'ideale generato con gli elementi $[(X+Z)^2]$, $[(X+Z)\,Y]$, $[Y^2]$, sulla superficie algebrica (in K^3) di equazione $(X+Z)^3 - Y^4 = 0$ soddisfa alla proprietà di estensione ma non è isomorfo con il nucleo di nessun omomorfismo $\mathbf{A}^p \longrightarrow \mathbf{A}^q$.

n. 2. Proposizione 2. *Sia* $\mathbf{F}$ *una fascio algebrico coerente soddisfacente alla proprietà di estensione, definito su una varietà algebrica irriducibile affine e normale* V; *ogniqualvolta sia data una se-*

quenza esatta del tipo:

$$O \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{A}^s \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{T} \longrightarrow O,$$

ove il supporto di T abbia codimensione > 1, si può costruire un'altra sequenza esatta del tipo:

$$O \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}^s \longrightarrow \mathbf{A}.$$

DIMOSTRAZIONE. Come dimostreremo più avanti (cfr. n. 4 lemma 4), non è restrittivo supporre che nell'anello A delle coordinate di V, gli elementi $r_1, r_2, \dots, r_s$ corrispondenti alle coordinate della sezione $\alpha(1)$ in $\mathbf{A}^s$, generino a due a due ideali di altezza due; costruiremo, in questa ipotesi, una sequenza:

$$O \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha} \mathbf{A}^s \xrightarrow{\beta} \mathbf{A}^s \xrightarrow{\gamma} \mathbf{A}$$

che risulterà a localizzazioni esatte fuori di un chiuso di V con codimensione > 1. Ne seguirà, allora giacchè $\mathbf{F}$ è isomorfo con $\mathbf{C}nc(\alpha)$ fuori di un chiuso di codimensione > 1, che $\mathbf{F}$ e $\mathbf{N}c(\gamma)$ sono isomorfi fuori di un chiuso di codimensione > 1, e poichè entrambi soddisfano alla proprietà di estensione ne segue che sono globalmente isomorfi e pertanto si ottiene una sequenza esatta:

$$O \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}^s \xrightarrow{\gamma} \mathbf{A}.$$

Sia: $\alpha(1) = (r_1, \dots, r_s)$ ed indicando con $u_1 = (1, 0, \dots, 0), \dots, u_s = (0, 0, \dots, 0, 1)$ gli elementi della base canonica di $\mathbf{A}^s$, $\beta(u_i) = s$-upla che nei posti $(i-1)$-esimo ed $(i+1)$-esimo ha gli elementi r_{i+1}, $-r_{i-1}$ rispettivamente e nei restanti posti zero, (con la convenzione se $i-1$ è negativo o $i+1$ supera s, si sostituisce rispettivamente con $i-1+s$, $i+1-s$); $\gamma(u_i) = \dfrac{r_1 \cdot r_2 \dots r_s}{r_{i-1} \cdot r_{i+1}}$, con la stessa convenzione.

Si verifica immediatamente che la sequenza è d'ordine due; dal fatto che gli elementi $r_1, \dots, r_s$ generano a due a due ideali di altezza due segue poi che $\mathbf{I}m(\alpha) = \mathbf{N}c(\beta)$ ed infine risulta che se in un dato punto x dalla varietà V la localizzazione di $\gamma(u_i)$ non appartiene all'ideale massimale di $\mathbf{A}_x$, ivi il nucleo di γ_x è generato dagli elementi $\beta(u_j)_x$ con $j \neq i$ e pertanto risulta $\mathbf{I}m(\beta)_x = \mathbf{N}c(\gamma)_x$; d'altra parte, se uu ideale primo di $\mathbf{A}$ contiene tutti gli elementi di $\mathbf{A}$ che corrispondono alle s sezioni $\gamma(u_i)$, tale primo contiene necessariamente una coppia di elementi, $r_i, r_j, (i \neq j)$ ed ha pertanto altezza maggiore di uno. Ne segue che le localizzazioni $\mathbf{I}m(\beta)_x$, $\mathbf{N}c(\gamma)_x$ coincidono fuori di un chiuso di codimensione > 1.

n. 3.

Sia ora in particolare V una varietà affine irriducibile a « forme intersezioni complete », ovvero sia l'anello A delle coordinate di V una K-algebra di tipo finito, senza divisori propri dello zero, a fattorizzazione unica. Sussiste allora la seguente:

PROPOSIZIONE 3. *Per ogni fascio algebrico coerente senza torsione,* $\mathbf{F}$, *definito su* V *esiste una sequenza esatta del tipo*:

$$O \to \mathbf{A} \to \mathbf{A}^s \to \mathbf{F} \to \mathbf{T} \to O$$

ove $\mathbf{T}$ è un fascio il cui supporto ha codimensione > 1.

DIMOSTRAZIONE. Se $dim(V) \leq 1$, l'enunciato è banale: se $dim(V) > 1$, precederemo per induzione sul rango $s - 1$ del fascio $\mathbf{F}$, utilizzando anche il seguente risultato dimostrato da S. Baldassarri-Ghezzo:

TEOREMA (S. Baldassarri-Ghezzo, [3], teor. 3).

Sia V *una varietà affine irriducibile ad algebra fatttoriale di dimensione* > 1, *ed* $\mathbf{F}_t$ *un fascio algebrico coerente e senza torsione su* V *di rango* $t > 1$. *Allora esiste una sequenza esatta del tipo*:

$$O \to \mathbf{A} \to \mathbf{F}_t \to \mathbf{F}_{t-1} \to O$$

di fasci senza torsione.

Se $\mathbf{F}$ è un fascio di ideali non è restrittivo supporre che $\mathbf{F}$ sia sottofascio di $\mathbf{A}$ e che il $Supp\,(\mathbf{A}/\mathbf{F})$ abbia codimensione > 1, ovvero che l'ideale I associato in A con $\mathbf{F}$ abbia altezza > 1, (A essendo per ipotesi a fattorizzazione unica).

Allora, scelti in I un elemento non nullo r ed un altro elemento s che non appartenga a nessun divisore primo (necessariamente di altezza uno) di r, il conucleo dell'omomorfismo $\varphi : \mathbf{A}^2 \longrightarrow \mathbf{A}$ definito con $\varphi\,(r_1, r_2) = r_1 \cdot r + r_2 \cdot s$ risulta un fascio con supporto di $cd > 1$.

Definendo allora anche $\varphi_1 :\ \mathbf{A}^2 \longrightarrow \mathbf{F}$ con $\varphi_1\,(r_1, r_2) = \varphi\,(r_1, r_2)$, possiamo costruire il diagramma commutativo ed esatto :

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbf{A}^2 & \xrightarrow{\varphi_1} & \mathbf{F} & \longrightarrow & \mathbf{T} & \longrightarrow & O \\ {\scriptstyle g_1}\downarrow & & {\scriptstyle g_2}\downarrow & & {\scriptstyle g_3}\downarrow & & \\ \mathbf{A}^2 & \xrightarrow{\varphi} & \mathbf{A} & \longrightarrow & \mathbf{S} & \longrightarrow & O \end{array}$$

ove g_1 è l'identità in $\mathbf{A}^2$ e g_2 è l'inclusione di $\mathbf{F}$ in $\mathbf{A}$.

Risulta allora che g_3 è iniettivo e perciò si ha per le codimensioni dei supporti di $\mathbf{S}, \mathbf{T}$:

$$Cd\,(Supp\,(\mathbf{T})) \geq Cd\,(Supp\,(\mathbf{S})) > 1\ ;$$

si osservi pure che essendo A a fattorizzazione unica, il $\mathbf{N}c\,(\varphi_1)$ risulta isomorfo con $\mathbf{A}$.

Se il rango di $\mathbf{F}$ è $s - 1 > 1$, si hanno due sequenze esatte :

(1) $$O \longrightarrow \mathbf{A} \xrightarrow{\alpha_s} \mathbf{F} \xrightarrow{\beta_s} \mathbf{G} \longrightarrow O,$$

con $\mathbf{G}$ di rango $s - 2$, senza torsione (per il teorema più sopra enunciato) ;

(2) $$O \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}^s \xrightarrow{\varphi_s} \mathbf{G} \longrightarrow \mathbf{T}_s \longrightarrow O,$$

per ipotesi induttiva.

Con queste due sequenze esatte si può costruire il seguente diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{array}{ccccccccc}
O & \longrightarrow & \mathbf{A} & \xrightarrow{\gamma'} & \mathbf{A}\oplus\mathbf{A}^s & \xrightarrow{\gamma} & \mathbf{A}^s & \longrightarrow & O \\
 & & \downarrow{\scriptstyle i_{\mathbf{A}}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_{s+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varphi_s} & & \\
O & \longrightarrow & \mathbf{A} & \xrightarrow{\alpha_s} & \mathbf{F} & \xrightarrow{\beta_s} & \mathbf{G} & \longrightarrow & O \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & \mathbf{T}_{s+1} & & \mathbf{T}_s & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & O & & O & &
\end{array}$$

dove $\varphi_{s+1}(r_0, r_1, \ldots, r_s) = \alpha_s(r_0) + \varphi'_s(r_1, \ldots, r_s)$; $\beta_s \cdot \varphi'_s = \varphi_s$, (possibile giacchè $\mathbf{A}^s$ è libero).

Risulta allora che $\mathbf{T}_{s+1}$ e $\mathbf{T}_s$ sono isomorfi e pertanto

$$Cd\,(Supp\,(\mathbf{T}_{s+1})) = Cd\,(Supp\,(T_s)) > 1.$$

Corollario 3.1 *Se V è una varietà algebrica affine a «forme intersezioni complete» allora per ogni fascio algebrico coerente $\mathbf{F}$ di rango $s-1$ soddisfacente alla proprietà di estensione, esiste una sequenza esatta del tipo*:

$$O \longrightarrow \mathbf{F} \longrightarrow \mathbf{A}^s \longrightarrow \mathbf{A}.$$

Infatti: il risultato della proposizione 3 fornisce proprio l'ipotesi per la proposizione 2.

Osservazione. Al risultato enunciato nell'ultimo corollario si può giungere anche applicando la proposizione 3 al duale $\mathbf{F}^* = \mathbf{H}om_{\mathbf{A}}(\mathbf{F}, \mathbf{A})$ di $\mathbf{F}$, in modo da ottenere la sequenza esatta:

$$O \longrightarrow \mathbf{A} \longrightarrow \mathbf{A}^s \longrightarrow \mathbf{F}^* \longrightarrow \mathbf{T} \longrightarrow O,$$

con $Cd\,(Supp\,(T)) > 1$, e dualizzando quest'ultima, giacchè $\mathbf{T}^* = 0$ e, (essendo V a forme intersezioni complete ed a maggior ragione normale), $\mathbf{F}^{**} = \mathbf{F}$ (cfr. [5]).

n. 4. Appendice. Dimostreremo qui alcuni lemmi, per giustificare l'affermazione fatta all'inizio della dimostrazione della proposizione 2.

Utilizzeremo il seguente lemma dimostrato da Tomaso Millevoi in [4]:

LEMMA 1. (T. Millevoi, [4], lemma 1).

Siano a, b due elementi di un anello R e $P_1, \dots, P_n$ ideali primi di R non contenenti l'ideale (a, b); allora esiste un elemento del tipo $a + r \cdot b$, $(r \in R)$, non contenuto in $\bigcup_{i=1}^{n} P_i$.

Supporremo ora che R sia un dominio d'integrità noetheriano; consideriamo un insieme ordinato di n elementi di R; $S = \{r_1, \dots, r_n\}$.

DEFINIZIONE. Chiameremo *trasformazione elementare* dell'insieme ordinato S, una sostituzione nella quale restino invariati tutti gli elementi di S meno uno, r_i, il quale venga cambiato in un elemento del tipo: $r_i' = \overset{n}{\underset{1}{}} \Sigma_j \lambda_j r_j$, ove $\lambda_i = 1$.

Ordiniamo i divisori primi di altezza uno dei vari elementi r_i, in modo che, per esempio, i divisori primi di altezza uno di r_k si indicheranno con $P_{k1}, P_{k2}, \dots, P_{ks}, \dots$.

DEFINIZIONE. Definiamo la funzione $f(i, j; k)$ per valori interi positivi di i, j, k, nel modo seguente:

1) se $i < j$ e se r_i appartiene a P_{jk}, k-esimo divisore primo di altezza uno di r_j, allora $f(i, j; k) = 1$;

2) se $i \geq j$, oppure se r_i non appartiene a P_{jk}, oppure se k è maggiore del numero di divisori primi di altezza uno di r_j, allora $f(i, j; k) = 0$.

Indicheremo con $n(S)$ il numero intero non negativo $\sum_{ijk} f(i, j; k)$.

OSSERVAZIONE. $n(S) = 0$ se e solo se nessuno degli elementi r_i appartiene a qualche divisore primo di altezza uno di un altro r_j. (Si noti pure che se $i > j$ e se $r_i \in P_{jk}$, allora $f(j, i; k') = 1$ con un opportuno k', giacchè se $r_i \in P_{jk}$ allora r_i, r_j appartengono ad un medesimo ideale primo di altezza uno e d'altra parte ogni ideale primo di altezza uno che contiene r_i è necessariamente un divisore primo di r_i).

Dimostreremo ora il seguente:

LEMMA 2. *Se per un certo insieme ordinato* $S = \{r_1, \dots, r_n\}$ *di elementi di un dominio d'integrità noetheriano* R *risulta* $n(S) > 0$ *e se l'ideale* I *generato da* S *ha altezza* $h(I) > 1$, *allora esiste una trasformazione elementare di* S *in* S' *in modo che* $n(S') < n(S)$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $h(I) > 1$, $n(S) > 0$. Allora per lo meno un elemento di S, per esempio r_1, appartiene a qualche divisore primo di altezza uno di qualche altro elemento di S, per esempio a P_{21}, divisore primo di r_2.

Applichiamo allora il lemma 1 alla famiglia di ideali primi composta con: i) P_{21}, ii) tutti gli ideali primi del tipo P_{st} ai quali non appartenga r_1, con riferimento agli elementi $a = r_1$, $b = r_s$ essendo r_s uno degli r_i che non appartengono a P_{21} (un siffatto elemento esiste, poichè $h(I) > 1$);

Per il lemma 1 esiste allora $r \in R$, tale che $r_1 + r \cdot r_s$ non è contenuto in nessuno degli ideali menzionati in i), ii). Posto allora $s' = \{r'_1, r_2, \dots, r_n\}$, risulta, essendo $r'_1 = r_1 + r \cdot r_s$: $n(S') < n(S)$. Infatti, dei vari numeri $f(i, j; k)$, risulta, giacchè si cambiò solamente r_1 in r'_1:

1) se $i, j > 1$ allora $f'(i, j; k) = f(i, j; k)$;

2) se $i = l$, $1 > 1$ allora $f'(1, j; k) = f(1, j; k) = 0$ per quelle coppie ordinate j, k per le quali r_1 non apparteneva a P_{jk} ed inoltre ora risulta: $f'(1, 2; 1) = 0$ mentre prima si aveva $f(1, 2; 1) = 1$.

LEMMA 3. *Sia* R *un dominio d'integrità noetheriano e sia* $S = \{r_1, \dots, r_n\}$ *un insieme ordinato di elementi di* R *che generi un ideale* I *di altezza* > 1; *esiste allora un automorfismo* $R^n \longrightarrow R^n$ *che trasforma l'elemento* $(r_1, \dots, r_n)$ *in un altro elemento* $(r'_1, \dots, r'_n)$ *in modo che*:

i) *due qualunque* r'_i, r'_k *con* $i \neq k$ *generino un ideale di altezza due*;

ii) *l'ideale generato dagli elementi* r'_i *sia ancora* I.

DIMOSTRAZIONE. Per il lemma 2, con un numero finito di trasformazioni elementari si giunge da S a un insieme ordinato S' per il quale risulti $n(S') = 0$.

D'altra parte un automorfismo di R^n definito per mezzo di una matrice quadrata ad n righe ed n colonne nella quale tutti gli elementi della diagonale principale valgono 1 e tutti gli elementi non appartenenti nè alla diagonale principale, nè ad una fissata riga i-esima valgano zero, trasforma l'elemento $(a_1, \dots, a_n)$ nell'elemento

$$(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i', a_{i+1}, \dots, a_n), \text{ dove } a_i' = \sum_{1}^{n}{}_j \lambda_j a_j, \text{ con } \lambda_i = 1.$$

Pertanto si constata che per ogni trasformazione elementare $S \to S'$ esiste un automorfismo $R^n \to R^n$ nel quale S, pensato come elemento di R^n, si trasforma in S'.

È poi anche ovvio che l'ideale generato dagli elementi di S' è eguale all'ideale generato dagli elementi di S.

LEMMA 4. *Sia R l'anello delle coordinate di una varietà algebrica irriducibile affine e normale e sia $M = Cnc(\varphi)$ il conucleo di un omomorfismo $\varphi : R \to R^n$, tale che M risulti senza torsione. Allora esiste un altro omomorfismo $\varphi' : R \to R^n$ tale che:*

i) *M risulti isomorfo con $Cnc(\varphi')$;*

ii) *qualunque coppia di coordinate differenti di $\varphi'(1)$ in R^n genera in R un ideale di altezza due.*

DIMOSTRAZIONE. Osserviamo anzitutto che l'ideale generato da tutte le coordinate di $\varphi(1)$ ha altezza maggiore di uno, giacchè se così non fosse, risulterebbe, localizzando in un punto x non singolare delle varietà nel quale la localizzazione dell'ideale abbia ancora altezza uno ([0]), che ivi la localizzazione di M avrebbe torsione (giacchè in un punto regolare la localizzazione di R risulta a fattorizzazione unica ed in un anello a fattorizzazione unica ogni ideale primo di altezza uno risulta principale).

Applicando allora il lemma 3 si può costruire un diagramma commutativo ed esatto:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & R & \xrightarrow{\varphi} & R^n & \to & M & \to & 0 \\ & & \downarrow i_R & & \downarrow \psi & & & & \\ 0 & \to & R & \xrightarrow{\varphi'} & R^n & \to & Cnc(\varphi') & \to & 0 \end{array}$$

ove $\varphi'(1) = (r'_1, \dots, r'_n)$ e ψ è l'automorfismo del quale si disse nell'enunciato del lemma 3. Segue così che $Cnc(\varphi')$ è isomorfo con M ed anche (lemma 3) che due differenti degli elementi r'_i generano un ideale di altezza due.

(^{0}) PRECISAZIONE.

Essendo la varietà V normale, il chiuso V_0 dei suoi punti singolari ha codimensione > 1 ovvero l'ideale $I(V_0)$ associato con V_0 ha altezza > 1 (cfr. [10] pag. 337). Allora, se un ideale J ha altezza $= 1$, esiste necessariamente un ideale primo massimale che contiene J ma non $I(V_0)$; infatti, tenuto conto del teorema degli Zeri di Hilbert, in base al quale ogni ideale primo è intersezione di ideali massimali (cfr. [7]), se ogni primo massimale che contiene J contenesse anche $I(V_0)$ ne seguirebbe, per il radicale $r(I)$: che $r(J) \supseteq I(V_0)$ e per le altezze risulterebbe $h(J) = h(r(J)) \geq h(I(V_0)) > 1$.

Infine, localizzando R in un punto x della varietà V il cui ideale massimale contenga J ma non contenga $I(V_0)$, risulta appunto come si è detto, che R_x è a fattorizzazione unica e che J_x ha altezza uno (cfr. [6] pag. 57 prop. 3).

BIBLIOGRAFIA

[1] M. BALDASSARRI : *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica di Torino del 1961.

[2] S. BALDASSARRI-GHEZZO, C. MARGAGLIO, T. MILLEVOI : *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M. Baldassarri a Torino nel 1961 : Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci.* Rendiconti del Seminario Matematico dell'università di Padova. 1965.

[3] S. BALDASSARRI GHEZZO : *Sui fasci algebrici coerenti e lisci sopra varietà affini.* Cedam, Casa Editrice Milani. Padova 1964.

[4] T. MILLEVOI : *Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay.* Rend. Sem. mat. Univ. Padova 1965.

[5] C. MARGAGLIO : *Una caratterizzazione di certi fasci algebrici coerenti ad una ulteriore applicazione della proprietà di estensione.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1964.

[6] D. G. NORTHCOTT : *Ideal Theory.* Cambridge University Press 1960.

[7] P. SAMUEI, O. ZARISKI : *Commutative Algebra* Vol. II. Van Nostrand.

[8] J. P. SERRE : *Faisceaux algébriques cohérents.* Ann. of Math. 61.

[9] C. S. SESHANDRI : *Triviality of vector bundles over the affine space K^2.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 44 (1958).

[10] A. WEIL : *Foundations of algebraic geometry.* Amer. Math. Soc. 1962.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 ottobre 1967