

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

CLAUDIO MARGAGLIO

Alcune proprietà delle R -coppie in un dominio d'integrità

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 389-399

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__389_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ALCUNE PROPRIETÀ DELLE R -COPPIE IN UN DOMINIO D'INTEGRITÀ

di CLAUDIO MARGAGLIO *).

INTRODUZIONE.

È noto che in un dominio d'integrità R , (a, b) è una R -successione se e solo se lo è (b, a) , (cfr. per es. [7]), ed in tal caso diremo che la coppia (non ordinata) $\{a, b\}$ è una R -coppia.

Nel presente lavoro, R sarà costantemente un dominio d'integrità.

Dopo aver verificato (lemma 1) che $\{a, b\}$ è una R -coppia se e solo se non è contenuta in nessun ideale principale proprio ed inoltre il nucleo dell'omomorfismo $\varphi: R^2 \rightarrow R$ definito con $\varphi(f, g) = a \cdot f - b \cdot g$ è isomorfo con R , si dà una caratterizzazione della proprietà di estensione, (cfr. [1], [2], [5]), in termini di R -coppie, dimostrando che: *un dominio d'integrità R soddisfa alla proprietà di estensione se e solo se ogni suo ideale di altezza due contiene almeno una R -coppia*, (proposizione 2).

Si dimostra poi che per ogni R -modulo M , privo di torsione, ed ogni ideale I generato da una R -coppia, si ha una sequenza esatta:

$$0 \rightarrow M \rightarrow (M : I) \rightarrow t(I \otimes M) \rightarrow 0, \quad (\text{proposizione 3}),$$

e da ciò segue fra l'altro che: *l' R -modulo senza torsione M soddisfa alla proprietà di estensione se e solo se risulta privo di torsione ogni*

*) Indirizzo dell'A.: Departamento de Matemáticas. Escuela de Ciencias. Universidad de Oriente. Cumaná. Venezuela.

suo prodotto tensoriale per un ideale generato da una R -coppia, (Corollario 3.3). Nella proposizione 4 si verifica che se I è un ideale generato da una R -coppia, si ha: $\bigotimes_s I \approx I_s \oplus (R/I)^{n(s)}$, ove I_s è la immagine canonica di $\bigotimes_s I$ in I ed $n(s) = 2^s - s - 1$. Infine, nell'appendice, applicando un corollario della proposizione 3, si deducono alcune proprietà delle R -coppie in un dominio d'integrità noetheriano.

SIMBOLI E DEFINIZIONI.

1. R dominio d'integrità (cioè anello commutativo, con unità, privo di divisori propri dello zero).
2. R/R corpo dei quozienti di R .
3. \rightarrow omomorfismo (R -lineare).
4. $\langle \longrightarrow \rangle, \approx$ isomorfismo (R -lineare).
5. M^p R -modulo ottenuto con la somma diretta di p copie di M .
6. u_i i esimo elemento della base canonica di R^p ;
 $u_1 = (1, 0, \dots, 0), u_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, u_p = (0, \dots, 0, 1)$.
7. $t(M)$ sottomodulo di torsione di M .
8. $rg(M)$ rango di M (= massimo numero di elementi linearmente indipendenti).
9. M^* $= Hom_R(M, R) =$ duale di M .
10. $M \otimes N$ prodotto tensoriale su R (degli R -moduli M, N).
11. JM immagine canonica di $J \otimes M$ in M , essendo J un ideale.
12. J_n $J_1 = J, J_s = JJ_{s-1}$ se $s > 1$.
13. $T. F.$ « di tipo finito », ossia finitamente generato (secondo il proprio tipo di struttura).
14. $h(J)$ altezza dell'ideale J (cfr. « rank » in [8]).
15. $Ann(M)$ annullatore di M .

16. $M : J$ (definito se $t(M) = 0$): sopra modulo senza torsione di M , determinato a meno di isomorfismi e definito, con riferimento ad una iniezione di M in $(R/R)^p$, $p = rg(M)$, con: $\{f \in (R/R)^p \mid f \cdot J \subseteq M\}$.
17. R -successione: si dice che s elementi r_1, \dots, r_s di un anello R formano (nell'ordine scritto) una R -successione, se per ogni $i = 1, 2, \dots, s$ si ha: $(r_1, \dots, r_{i-1}) : r_i = (r_1, \dots, r_{i-1})$.
18. *Elemento ammissibile* su un R -modulo M senza torsione: ogni elemento n di un sopra- R -modulo, senza torsione N , di M tale che l'ideale $M : n$ abbia altezza > 1 .
19. $gr(J)$ grado dell'ideale J : massimo numero di elementi di J formanti R -successione.
20. *Elemento fortemente ammissibile*: elemento ammissibile per il quale l'ideale $M : n$ abbia grado > 1 .
21. $R \in P. E.$ « R soddisfa alla proprietà di estensione » se ogni elemento ammissibile su R appartiene ad R .
22. $M \in P. E.$ « M soddisfa alla proprietà di estensione » se ogni elemento ammissibile su M appartiene ad M .

LEMMA 1. *Per una coppia ordinata (a, b) di elementi di un dominio d'integrità R risulta $aR : bR = aR$ se e solo se a, b non sono contenuti in un medesimo ideale principale distinto da R ed inoltre il nucleo dell'omomorfismo $\varphi : R^2 \rightarrow R$, definito con $\varphi(f, g) = a \cdot f - b \cdot g$ è isomorfo con R . (Da ciò segue in particolare il noto fatto che in un dominio d'integrità (a, b) è una R -successione se e solo se lo è (b, a)).*

DIMOSTRAZIONE. Se $aR : bR = aR$ risulta immediatamente che il nucleo di φ è generato dall'elemento $(b, a) \in R^2$ e che l'ideale generato da $\{a, b\}$ ha altezza due e non è quindi contenuto in nessun ideale principale proprio.

Viceversa, si supponga che a, b non siano contenuti in nessun ideale principale proprio e che $Nc(\varphi)$ sia generato dall'elemento (r, s) ;

giacchè $(b, a) \in Nc(\varphi)$ risulta allora $b = t \cdot r$, $a = t \cdot s$ e necessariamente $tR = R$ per cui sarà anche $(b, a) = t'(r, s)$ un generatore di $Nc(\varphi)$.

Se allora $g \in (aR : bR)$, segue $b \cdot g = a \cdot f$, $(f, g) \in Nc(\varphi)$, $(f, g) = h \cdot (b, a)$, $g = h \cdot a$ e dunque $aR : bR = aR$.

OSSERVAZIONE 1. È essenziale nella ipotesi del lemma che lo anello R sia privo di divisori propri dello zero. Infatti, si consideri il seguente esempio :

$A = K[X, Y, Z]/(X \cdot Y)$, $a = X$, $b = Z$; risulta allora :

$X \cdot A = X \cdot A : Z \cdot A$ mentre $Nc(\varphi)$, che risulta generato dagli elementi (Z, X) , $(Y, 0)$ non è isomorfo con A .

PROPOSIZIONE 1. *Ogni elemento ω , fortemente ammissibile su R appartiene necessariamente ad R .*

Infatti :

Se ω è fortemente ammissibile su R , esiste una R -coppia $\{a, b\}$ tale che $a \cdot \omega = r \in R$, $b \cdot \omega = s \in R$ ed allora $b \cdot r = a \cdot s$ da cui segue $r = r' \cdot a$, $s = r' \cdot b$, $\omega = r' \cdot a/a = r' \in R$.

COROLLARIO 1.1. *Per ogni ideale I di grado > 1 , l'inclusione $j : I \rightarrow R$ induce un isomorfismo $j^* : I^* \rightarrow R^*$ fra i duali, ovvero ogni omomorfismo R -lineare $f : I \rightarrow R$ si estende in uno ed un sol modo ad un endomorfismo $\bar{f} : R \rightarrow R$, (con $f = \bar{f} \cdot j$).*

Infatti :

Dato $f : I \rightarrow R$, sia $\{a, b\}$ una R coppia contenuta in I ; allora $f(a \cdot b) = a \cdot f(b) = b \cdot f(a)$ da cui segue $f(b) = r \cdot b$, $f(a) = r \cdot a$ il che permette di porre $\bar{f}(1) = r$. È immediato che \bar{f} soddisfi alle condizioni richieste.

PROPOSIZIONE 2. *Il dominio d'integrità R soddisfa alla proprietà di estensione se e solo se ogni suo ideale di altezza due contiene almeno una R -coppia (o equivalentemente, se e solo se ogni suo ideale di altezza due ha grado due).*

DIMOSTREZIONE. Se in R ogni ideale di altezza due contiene una R -coppia, allora ogni elemento ammissibile su R risulta fortemente ammissibile ed in base alla proposizione 1 appartiene quindi ad R .

Viceversa, se I è un ideale di altezza due, privo di R -coppie e se a, b sono elementi di I che generano un ideale di altezza due, allora esiste un elemento h_1 appartenente ad $aR : bR$ ma non ad aR e se $h_1 \cdot b = h_2 \cdot a$, h_2 non può appartenere a bR ed allora $h_1/a = h_2/b$ è un elemento di R/R , ammissibile su R , (giacchè $h(\{a, b\}) = 2$), ma non appartenente ad R , (giacchè $h_1/a = r \in R$ implicherebbe $h_1 \in aR$).

COROLLARIO 2.1. *Se R è un dominio d'integrità soddisfacente alla proprietà di estensione, allora ogni elemento ammissibile su R è necessariamente fortemente ammissibile su R ed ogni elemento ammissibile su un R -modulo senza torsione M è necessariamente fortemente ammissibile su M .*

PROPOSIZIONE 3. *Sia M un R modulo senza torsione ed I un ideale generato con una R -coppia $\{a, b\}$; allora si ha una sequenza esatta :*

$$0 \rightarrow M \rightarrow (M : I) \rightarrow t(I \otimes M) \rightarrow 0.$$

DIMOSTRAZIONE. Si definisca un omomorfismo $h : (M : I) \rightarrow I \otimes M$ con $h(\omega) = a \otimes b \cdot \omega - b \otimes a \cdot \omega$; basterà allora dimostrare che l'immagine di h è $t(I \otimes M)$ ed il nucleo di h è M .

Poichè l'immagine canonica di $h(\omega)$ in IM è nulla, l'immagine di h è certamente contenuta in $t(I \otimes M)$; inoltre ogni elemento di $t(I \otimes M)$ si può rappresentare nella forma $a \otimes m_1 - b \otimes m_2$, con $a \cdot m_1 = b \cdot m_2$ e pensando allora M immerso in $(R/R)^2$, con $p = \text{rg}(M)$, l'elemento $m_1/b = m_2/a$ risulta appartenere ad $M : I$ e la sua immagine per mezzo di h è proprio $a \otimes m_1 - b \otimes m_2$.

Infine, per determinare il nucleo di h , facciamo riferimento al diagramma commutativo ed esatto :

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \rightarrow & R \otimes M & \xrightarrow{j \otimes M} & R^2 \otimes M & \xrightarrow{k \otimes M} & I \otimes M \rightarrow 0 \\
 & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \\
 0 & \rightarrow & M & \xrightarrow{j} & M \oplus M & &
 \end{array}$$

ottenuto a partire dalla sequenza esatta $O \rightarrow R \xrightarrow{j} R^2 \xrightarrow{k} I \rightarrow O$ con $j(1) = (b, a)$, $k(f, g) = a \cdot f - b \cdot g$, $\bar{j}(m) = (b \cdot m, a \cdot m)$, $g_1(r \otimes m) = r \cdot m$, $g_2(f, g) \otimes m = (f \cdot m, g \cdot m)$.

L'elemento $\sigma = (1, 0) \otimes b \cdot \omega + (0, 1) \otimes a \cdot \omega$ ha immagine, per mezzo di $k \otimes M$, eguale all'elemento $a \otimes b \cdot \omega - b \otimes a \cdot \omega$ e quest'ultimo risulta nullo se e solo se $g_2(\sigma)$ appartiene all'immagine di \bar{j} ; orbene, $g_2(\sigma) = (b \cdot \omega, a \cdot \omega)$ e giacchè gli elementi dell'immagine di \bar{j} sono tutti del tipo $(b \cdot m, a \cdot m)$, con $m \in M$, risulta senz'altro che $g_2(\sigma) \in \text{Im}(\bar{j})$ se e solo se $\omega = m \in M$.

COROLLARIO 3.1. *Se R è dominio d'integrità noetheriano e se I è un ideale generato da una R -coppia e J è un ideale qualunque, allora risulta $t(I \otimes J) = 0$ se e solo se I non è contenuto in nessun divisore primo di J .*

Infatti:

$J : I = J$ se e solo se I non è contenuto in nessun divisore primo di J (cfr. [8], pag. 23 teor. 6): (Si tenga conto della proposizione 1).

COROLLARIO 3.2. *Se M è un R -modulo senza torsione, allora $t(I \otimes M) = 0$ per ogni ideale I generato da una R -coppia, se e solo se ogni elemento fortemente ammissibile su M appartiene ad M .*

Infatti:

se esiste un elemento n , fortemente ammissibile su M ma non appartenente ad M , allora l'ideale $M : n$ contiene una R -coppia $\{a, b\}$ e se I è l'ideale generato da tale R -coppia, risulta $n \in (M : I)$, $n \notin M$ e dunque l'immagine di n nell'omomorfismo $(M : I) \rightarrow t(I \otimes M)$ è un elemento non nullo di $t(I \otimes M)$; viceversa, se per un certo ideale I generato dalla R coppia $\{a, b\}$ risulta $t(I \otimes M) \neq 0$, esiste un elemento di $(M : I)$ non appartenente ad M e tale elemento è fortemente ammissibile su M .

COROLLARIO 3.3 *Se R soddisfa alla proprietà di estensione, allora un R -modulo M senza torsione soddisfa alla proprietà di estensione se e solo se risulta privo di torsione ogni prodotto tensoriale $I \otimes M$ di M per qualunque ideale I generato da una R -coppia.*

DIMOSTRAZIONE. Se R soddisfa alla *P.E.* ogni elemento ammissibile su M è fortemente ammissibile su M (corollario 2.1) e quindi l'asserto segue immediatamente dal corollario 3.2.

COROLLARIO 3.4. *Se M è R -modulo isomorfo con il nucleo di un omomorfismo $R^p \rightarrow R^q$ oppure $R^p \rightarrow F$, essendo F privo di elementi propri di torsione il cui annullatore abbia altezza > 1 , allora $t(I \otimes M) = 0$ per ogni ideale I generato da una R -coppia.*

Infatti :

Se per una R -coppia $\{a, b\}$ risulta $t(I \otimes M) \neq 0$ esiste un elemento fortemente ammissibile su M che non appartiene ad M (corollario 3.2), e tale elemento appartiene ad R^p (come segue immediatamente dalla proposizione 1) ed induce in F un elemento proprio di torsione f con $h(Ann(f)) > 1$. •

OSSERVAZIONE 2. La condizione d'essere F privo di elementi propri di torsione con annullatore di altezza maggiore di uno è solamente sufficiente affinché risulti $t(I \otimes M) = 0$ per ogni ideale I generato da una R -coppia. Per esempio se R è l'anello delle coordinate delle varietà algebrica definita in K^4 dalle tre equazioni: $Y^2 - X^2(1 - Z) = 0$, $TX - YZ = 0$, $Z^3 - Z^2 + T^2 = 0$ (cfr. [1]), allora l'ideale M generato dagli elementi X, Z è isomorfo con il nucleo dell'omomorfismo $h: R^2 \rightarrow R$ definito con $h(f, g) = T \cdot f + Z \cdot g$ ma anche con il nucleo dell'omomorfismo canonico $R \rightarrow F$, essendo F il conucleo dell'inclusione di M in R ed F ha elementi propri di torsione con annullatore di altezza maggiore di uno.

OSSERVAZIONE 3. La proprietà enunciata nel corollario 3.1 non resta valida per ideali generati con R -successioni con più di due elementi: per esempio se $I = (\{X, Y, Z\})$, $J = (\{X, Y, T\})$, $R = K[X, Y, Z, T]$, si ha: $J: I = J$, $I: J = I$ e $t(I \otimes J) \neq 0$ fatto quest'ultimo che si constata osservando che mentre $I \otimes J$ non si può generare con meno di nove elementi, IJ si può generare invece con otto (cfr. [6]).

OSSERVAZIONE 4. La sequenza esatta $0 \rightarrow J \rightarrow (J: I) \rightarrow t(I \otimes J) \rightarrow 0$ ci porge l'occasione, a proposito della proprietà « due sottomoduli I, J di un dominio d'integrità R a fattorizzazione

unica, per i quali risultano isomorfi e quozienti R/I , R/J , sono necessariamente isomorfi», (cfr. [4]), per costruire un esempio che dimostra che non è possibile sostituire nell'enunciato appena visto, R con un generale R -modulo di rango uno.

Infatti: siano $R = K[X, Y]$, $I = (\{X^2, Y\})$, $J = (\{X, Y^2\})$, $H = (\{X, Y\})$; risulta allora $J : I = I : J = H$ e pertanto $H/I \approx t(I \otimes J) \approx H/J$.

D'altra parte I, J non sono R -isomorfi, giacchè un R -isomorfismo $I \rightarrow J$ si estenderebbe (cfr. [4]) ad un isomorfismo $R \rightarrow R$ mentre si verifica facilmente che ogni R -endomorfismo $R \rightarrow R$ che trasformi X^2, Y in X, Y^2 non può essere suriettivo.

LEMMA 2. Se I è un ideale generato da una R -coppia $\{a, b\}$ allora $I \otimes (R/I) \approx (R/I)^2$.

Infatti:

Moltiplicando tensorialmente per I la sequenza esatta $0 \rightarrow I \rightarrow R \rightarrow R/I \rightarrow 0$ si ottiene la sequenza $I \otimes I \rightarrow I \otimes R \rightarrow I \otimes (R/I) \rightarrow 0$ e di seguito la $0 \rightarrow I_2 \rightarrow I \rightarrow I \otimes (R/I) \rightarrow 0$; considerando allora la controimmagine di I_2 nell'omomorfismo $R^2 \xrightarrow{h} I$ definito con $h(f, g) = f \cdot a - g \cdot b$, che risulta eguale ad I^2 si ottiene la sequenza esatta: $0 \rightarrow I^2 \xrightarrow{k} R^2 \rightarrow I \otimes (R/I) \rightarrow 0$ nella quale k è la somma diretta $j \oplus j$, essendo $j: I \rightarrow R$ l'inclusione.

LEMMA 3. Se I è generato dalla R coppia $\{a, b\}$ allora $t(I \otimes I_s) \approx (R/I)^s$.

DIMOSTRAZIONE. Basterà dimostrare (cfr. [6], 2.2) che il nucleo dell'omomorfismo $h_s: R^{s+1} \rightarrow I_s$, definito con $h^s(u_i) = a^{i-1} \cdot b^{s+1-i}$ è isomorfo con R^s giacchè allora si ha una sequenza esatta $0 \rightarrow R^s \xrightarrow{j} R^{s+1} \rightarrow I_s \rightarrow 0$ in cui $j(R^s) \subseteq IR^{s+1}$ è quindi, la sequenza esatta

$$0 \rightarrow IR^s \rightarrow R^s \rightarrow t(I \otimes I_s) \rightarrow 0.$$

Procedendo per induzione, si ha:

con $n = 1$, $Nc(h_1) \approx R$ (lemma 1);

con $n > 1$, si osservi che se (r_1, \dots, r_{s+1}) è un qualunque elemento di $Nc(h_{n+1})$, risulta $r_{n+1} = r \cdot b$, $\{a, b\}$ essendo una R -coppia)

e pertanto ogni elemento di $Nc(h_{n+1})$ si ottiene come somma di un elemento con ultima coordinata nulla e di un multiplo di $(0, 0, 0, \dots, a, -b)$ ed è chiaro che ciò avviene in modo unico.

Osservato allora che il sottomodulo di $Nc(h_{n+1})$ costituito con gli elementi con ultima coordinata nulla è isomorfo con $Nc(h_n)$ il quale, per ipotesi induttiva, è a sua volta isomorfo con R^{n-1} , segue senz'altro che $Nc(h_{n+1})$ è isomorfo con R^n .

PROPOSIZIONE 4. *Se I è un ideale generato con una R -coppia, allora si ha:*

$$\bigotimes_s I \simeq I_s \oplus (R/I)^{n(s)}, \quad n(s) = 2^s - s - 1.$$

DIMOSTRAZIONE. Con $s = 1$ la proprietà è soddisfatta in modo banale; con $s' = s + 1 > 1$, si ha:

$$\begin{aligned} \bigotimes_{s'} I &\simeq (\bigotimes_s I) \otimes I \simeq (I_s \otimes I) \oplus ((R/I)^{n(s)} \otimes I) \simeq (R/I)^s \oplus (R/I)^{2n(s)} \simeq \\ &\simeq (R/I)^{s+2n(s)} \end{aligned}$$

ed è

$$s + 2n(s) = s + 2^{s+1} - 2s - 2 = 2^s - s' - 1 = n(s').$$

APPENDICE: ALCUNE APPLICAZIONI DEL COROLLARIO 3.1

Si supponrà costantemente nelle seguenti considerazioni che R sia dominio d'integrità noetheriano.

PROPOSIZIONE 5. *Nessun divisore primo di un ideale proiettivo può contenere R -coppie: viceversa, ogni ideale non contenuto in nessun divisore primo di un ideale principale contiene almeno una R -coppia.*

Infatti:

se $\{a, b\}$ fosse una R -coppia contenuta nel divisore primo P dell'ideale proiettivo J si avrebbe $t(J \otimes (\{a, b\})) = 0$, in contrasto con il corollario 3.1 in base al quale $P \supseteq \{a, b\}$, $J : (\{a, b\}) \not\subseteq J$ implicherebbe $t(J \otimes (\{a, b\})) \not\subseteq 0$.

Se, viceversa, I non è contenuto in nessun divisore primo di un ideale principale e se a è un elemento non nullo di I allora I

possiede un altro elemento b non contenuto in nessun divisore primo di aR (giacchè aR possiede solo un numero finito di divisori primi) ed $\{a, b\}$ è allora una R -coppia contenuta in I .

COROLLARIO 5.1. *Un dominio d'integrità noetheriano soddisfa alla P.E. se e solo se ogni suo ideale principale ha solo divisori primi di altezza uno.*

Infatti :

ricordando la proposizione 2, basta osservare che se ogni divisore primo di un ideale principale ha altezza uno allora ogni ideale di altezza due ha grado due e viceversa, se esiste un divisore primo P di altezza > 1 di un ideale principale, allora P contiene almeno un ideale di altezza due che per la proposizione 5, ha grado uno.

COROLLARIO 5.2 *Se P è divisore primo massimale di un ideale principale, allora P è divisore primo massimale per ogni ideale principale in esso contenuto.*

Infatti :

Osserviamo anzitutto che se P è divisore primo di rR e se $s \in P$, allora sR possiede un divisore primo Q che contiene P , giacchè se così non fosse, esisterebbe un elemento $t \in P$ non contenuto in nessun divisore primo di sR ed allora $\{s, t\}$ sarebbe una R -coppia contenuta in P e ciò sarebbe in contrasto con la proposizione 5.

Analogamente, per essere $r \in Q$ segue che rR possiede un divisore primo P' che contiene Q . Se si suppone che P sia divisore primo massimale segue allora immediatamente l'asserto.

COROLLARIO 5.3. *L'intersezione ed il prodotto di due ideali di grado due ha grado due.*

Infatti :

Se I, J hanno grado due, essi hanno altezza due ed il loro prodotto JI ha altezza due.

Se fosse $gr(JI) = 1$, JI sarebbe contenuto (proposizione 5) in qualche divisore primo P di un ideale principale e P dovrebbe di conseguenza contenere uno dei due, per esempio I , e ne seguirebbe (proposizione 5) l'assurdo $gr(I) = 1$. Pertanto JI ed a maggior ragione $J \cap I$ hanno grado due.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BALDASSARRI, M.: *Osservazione sulla struttura dei fasci lisci*. Atti del Convegno Internazionale di Geometria Algebrica. Torino 1961.
- [2] BALDASSARRI-GHEZZO S.; MARGAGLIO, C.; MILLEVOI, T.: *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M. Baldassarri a Torino nel 1961: « Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci »*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 1965.
- [3] GRECO, S.; SALMON, P.: *Anelli di Macaulay*. Pubblicazioni dell'Istituto Matematico dell'Università di Genova 1965.
- [4] MARGAGLIO C.: *Una dimostrazione elementare della proprietà di estensione per il fascio degli anelli locali di uno spazio affine ed alcune applicazioni di tale proprietà*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova Vol. XXXIII 1963.
- [5] MARGAGLIO C.: *Anelli che soddisfano alla proprietà di estensione*. In corso di stampa.
- [6] MARGAGLIO C.: *Sulla torsione in un prodotto tensoriale di moduli senza torsione*. Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. In corso di stampa.
- [7] MIYATA, T.: *A remark on M -sequences*. Sugaku (1963/64); recensione in Mat. Rev. n. 3896, novembre 1965.
- [8] NORTHCOTT, D. G.: *Ideal Theory*. Cambridge Tracts n° 42. 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 ottobre 1967