RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO GIUSTI

Sulla regolarità delle soluzioni di una classe di equazioni ellittiche

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 362-375

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__362_0>

SULLA REGOLARITÀ DELLE SOLUZIONI DI UNA CLASSE DI EQUAZIONI ELLITTICHE

ENRICO GIUSTI (Pisa)

0. Introduzione.

Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$; una funzione $u(x)$ di quadrato sommabile in Ω appartiene ad uno spazio di Morrey $L^{2,\lambda}(\Omega)$ $(\lambda \geq 0)$ se

$$\| u \|_{L^{2,\lambda}(\Omega)} = \sup_{\substack{x_0 \in \Omega \\ \varrho > 0}} \left\{ \varrho^{-\lambda} \int_{I(x_0,\varrho) \cap \Omega} | u |^2 \, dx \right\}^{1/2} < + \infty .$$

La regolarità negli spazi $L^{2,\lambda}$ delle soluzioni di equazioni ellittiche è stata studiata da vari autori; mi limiterò a citare i lavori di MORREY [11], MIRANDA [9], CAMPANATO [2], KADLEC e NEČAS [8] per equazioni di tipo variazionale; ed ancora MORREY [10], NIRENBERG [12], TALENTI [14] per equazioni in due variabili, di tipo non variazionale.

In questa nota mi propongo di studiare la regolarità in $L^{2,\lambda}(\Omega)$ delle derivate seconde delle soluzioni di equazioni ellittiche in n variabili $(n \geq 2)$:

$$Eu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = f(x) \tag{0 1}$$

quando il secondo membro appartiene ad $L^{2,\lambda}(\Omega)$.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

Lavoro eseguito nell'ambito dei raggruppamenti di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Le ipotesi che si fanno sull'operatore E sono (vedi CORDES [5] [6] [7] e TALENTI [13]):

i) le funzioni $a_{ij}(x)$ sono misurabili e limitate in Ω.

ii) Gli autovalori della matrice dei coefficienti $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ sono tutti positivi.

iii) Esiste una costante K positiva e minore di 1 tale che per quasi tutti gli x di Ω:

$$n - K^2 \leq \frac{[Tr\, A(x)]^2}{[Tr\, A^2(x)]} \leq n \quad ^{1)}.$$

In queste ipotesi dimostrerò (vedi teor. [2.II]) che esiste un numero q positivo e dipendente solo da K, tale che se $f(x)$ appartiene ad $L^{2,\lambda}(\Omega)$ con $\lambda \leq nq$, allora le derivate seconde di ogni soluzione dell'equazione (0.1) sono in $L^{2,\lambda}_{\text{loc}}(\Omega)$. (Nel caso $n = 2$ questo risultato è più debole, per quanto riguarda la costante q, di quello ottenuto da TALENTI [14]).

Nel caso in cui siano verificate su $\partial\Omega$ condizioni di Dirichlet, proverò la regolarità fino al bordo delle derivate seconde della soluzione di (0. 1), che apparterranno perciò ad $L^{2,\lambda}(\Omega)$ (teor. [2.IV]).

I teoremi annunciati si trovano tutti nel paragrafo 2; il paragrafo 1 è interamente dedicato alla dimostrazione di alcuni lemmi.

1. Lemmi preliminari.

LEMMA [1.I]. *Sia $v(x)$ una funzione armonica nella sfera*

$$I_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}.$$

Per ogni coppia ϱ, σ $(0 < \varrho < \sigma < R)$ si ha:

$$|||v|||_{2, I_\varrho} \leq \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{n/2} |||v|||_{2, I_\sigma} \quad ^{2)}. \tag{1.1}$$

---

1) $Tr\, A(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(x)$. Osserviamo che a destra si ha l'uguaglianza solo nel caso in cui $a_{ij}(x) = a(x)\, \delta_{ij}$.

2) $$|||v|||_{2,\Omega} = \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega \left| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i\, \partial x_j} \right|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

DIM. Le funzioni $v_{ij}(x) = \dfrac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j}$, $(i, j = 1, \dots, n)$ sono ancora armoniche in I_R; pertanto, essendo

$$\Delta v_{ij}^2 = 2 \, | \operatorname{grad} v_{ij} |^2 \geq 0$$

si ha, per ogni numero positivo $t < R$:

$$\int_{I_t} \Delta v_{ij}^2 \, dx = \int_{\partial I_t} \frac{\partial v_{ij}^2}{\partial n} \, do \geq 0$$

ovvero

$$t^{n-1} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} [v_{ij}(t, \xi)]^2 \, d\xi \geq 0 \tag{1.2}$$

dove Σ è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$.

La funzione $\int_{\Sigma} [v_{ij}(t, \xi)]^2 \, d\xi$ è dunque non decrescente per $t \in] 0, R[$; per cui se $\varrho < R$:

$$\int_{I_\varrho} v_{ij}^2 \, dx = \int_0^\varrho t^{n-1} \, dt \int_{\Sigma} [v_{ij}(t, \xi)]^2 \, d\xi \leq \frac{\varrho^n}{n} \int_{\Sigma} [v_{ij}(\varrho, \xi)]^2 \, d\xi \tag{1.3}$$

e sommando rispetto a i e j:

$$||| v \|_{2, I_\varrho}^2 \leq \frac{\varrho}{n} \frac{d}{d\varrho} ||| v |||_{2, I_\varrho}^2 . \tag{1.4}$$

La (1.4) implica che $\varrho^{-n} ||| v |||_{2, I_\varrho}^2$ è una funzione non decrescente di ϱ nell'intervallo $]0, R[$, e quindi la tesi.

c. v. d.

Del tutto analogo al precedente è il

LEMMA [1.II]. *Sia $v(x)$ una funzione armonica nella semisfera*

$$I_R^* = I_R \cap \{x_n > 0\}$$

e nulla su $\Gamma_R = \partial I_R^* \cap \{x_n = 0\}$.

Per ogni coppia $\varrho, \sigma\,(0 < \varrho < \sigma < R)$ *si ha*:

$$\| v \|_{2, I^*_\varrho} \leq \left(\frac{\varrho}{\sigma}\right)^{n/2} \| v \|_{2, I^*_\sigma} . \tag{1.5}$$

DIM. Come nel lemma [1.I] si ha

$$0 \leq \int_{\partial I^*_t} \frac{\partial v_{ij}^2}{\partial n}\, d\sigma = \int_{\Gamma_t} \frac{\partial v_{ij}^2}{\partial n}\, d\sigma + t^{n-1} \frac{d}{dt} \int_{\Sigma^*} [v_{ij}(t, \xi)]^2\, d\xi \tag{1.6}$$

dove Σ^* è la semisfera unitaria:

$$\Sigma^* = \Sigma \cap \{x_n \geq 0\}.$$

D'altra parte $(x' = (x_1, \dots, x_{n-1}))$

$$\int_{\Gamma_t} \frac{\partial v_{ij}^2}{\partial n}\, d\sigma = -\, 2 \int_{|x'|<t} v_{ij}(x', 0)\, \frac{\partial v_{ij}(x', 0)}{\partial x_n}\, dx' = 0.$$

Infatti se i e j sono ambedue minori di n, $v_{ij}(x', 0) = 0$ perchè $v(x', 0) \equiv 0$; inoltre $v_{nn}(x', 0) = -\sum_{i=1}^{n-1} v_{ii}(x', 0) = 0$.

Infine se $i = n, j \neq n$ allora $\frac{\partial}{\partial x_n} v_{jn}(x', 0) = \frac{\partial}{\partial x_j} v_{nn}(x', 0) = 0$.

La (1.6) diviene allora

$$\frac{d}{dt} \int_{\Sigma^*} [v_{ij}(t, \xi)]^2\, d\xi \geq 0 \tag{1.7}$$

e ragionando come nel lemma precedente si ha la tesi.

c. v. d.

Diamo infine due lemmi algebrici; il primo è dovuto a KADLEC-NEČAS [8] ed il secondo a CAMPANATO [2]. Ambedue si trovano esposti anche in CAMPANATO [3].

LEMMA [1.III]. *Sia $\varphi(t)$ una funzione definita nell'intervallo chiuso $[0, \delta]$, non negativa, non decrescente e tale che per ogni coppia $\varrho, R\ (0 < \varrho < R \leq \delta)$ si abbia:*

$$\varphi(\varrho) \leq \left[(1+K)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda} + K\right] \varphi(R) \tag{1.8}$$

con $\lambda > 0$ e $0 \leq K < 1$.

Sia $q = \sup\limits_{0 < x < \frac{1-K}{1+K}} \dfrac{\log[(1+K)x + K]}{\log x}$. *Esiste una costante positiva $C(K)$ tale che per ogni coppia $\varrho, R\ (0 < \varrho < R \leq \delta)$:*

$$\varphi(\varrho) \leq C\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda q} \varphi(R). \tag{1.9}$$

DIM. Diamo la dimostrazione per comodità del lettore. Possiamo supporre $K \neq 0$; per cui la funzione $\dfrac{\log[(1+K)x + K]}{\log x}$ ha massimo q in un punto α dell'intervallo $\left]0, \dfrac{1-K}{1+K}\right[$. Fissato $R \leq \delta$ sia $\varrho < R$ ed h un intero tale che

$$\alpha^{h+1} < \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda} \leq \alpha^{h}.$$

Si considerino i punti

$$t_i = \varrho\, \alpha^{-i/\lambda} \qquad i = 0, 1, \dots, h.$$

Dalla (1.8) scritta per t_{i-1} e t_i:

$$\varphi(t_{i-1}) \leq [(1+K)\alpha + K]\, \varphi(t_i) = \alpha^{q} \varphi(t_i)$$

e quindi

$$\varphi(\varrho) \leq \alpha^{qh} \varphi(t_h) \leq \alpha^{qh} \varphi(R) \leq \alpha^{-q}\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda q} \varphi(R).$$

c. v. d.

LEMMA [1.IV]. *Sia $\varphi(t)$ una funzione definita nell'intervallo $[0, \delta]$, non negativa, non decrescente e tale che per ogni coppia $\varrho, R\ (0 < \varrho <$*

$< R \leq \delta)$ *si abbia:*

$$\varphi(\varrho) \leq A \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\alpha} \varphi(R) + BR^{\beta} \tag{1.10}$$

con A, B α *e* β *costanti positive,* $\alpha - \beta > 0$.

Esiste una costante C *dipendente da* A *ed* $\alpha - \beta$ *tale che per ogni coppia* ϱ, R $(0 < \varrho < R \leq \delta)$:

$$\varphi(\varrho) \leq A \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\beta} \varphi(R) + CB\varrho^{\beta}. \tag{1.11}$$

2. Regolarità delle soluzioni.

LEMMA [2.I]. *In una sfera* I_R *sia* $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ *una matrice verificante le condizioni*

i) $a_{ij}(x) \in L^{\infty}(I_R)$

ii) *Gli autovalori di* $A(x)$ *sono positivi quasi ovunque in* I_R.

iii) *Per quasi tutti gli* x *di* I_R:

$$n - K^2 \leq \frac{(Tr A(x))^2}{Tr A^2(x)} \leq n \quad (0 \leq K < 1).$$

Sia $u(x) \in H^2(I_R)$ [3] *una soluzione in* I_R *dell'equazione*:

$$Eu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = 0. \tag{2.1}$$

Comunque scelto un numero positivo $\varrho < R$ *si ha*:

$$|||u|||_{2,I_\varrho} \leq \left[(1+K)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n/2} + K\right] |||u|||_{2,I_R}. \tag{2.2}$$

---

[3] $H^k(\Omega)$ [risp $H_0^k(\Omega)$] è la chiusura di $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ [risp $C_0^{\infty}(\Omega)$] rispetto alla norma

$$\|u\|_{k,\Omega} = \left\{ \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^2 dx + \int_{\Omega} |u|^2 dx \right\}^{1/2} = \{ |||u|||_{k,\Omega}^2 + \|u\|_{0,\Omega}^2 \}^{1/2}.$$

Dim. Si considerino le soluzioni dei problemi di Dirichlet:

$$\mathfrak{D}_1 : \begin{cases} \Delta v = 0 & \text{q. ov. in } I_R \\ v - u \in H^2_{\gamma_0}(I_R) \text{ [4]} \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_2 : \begin{cases} \Delta w = (\Delta - \alpha E)\, u & \text{q. ov. in } I_R \\ w \in H^2_{\gamma_0}(I_R) \end{cases}$$

con $\alpha(x) = \dfrac{Tr\, A(x)}{Tr\, A^2(x)}$. Ovviamente in I_R si ha $u = v + w$. Per quanto riguarda il problema $\mathfrak{D}_1$ si ha per il lemma [1.I]:

$$\text{(2.3)} \qquad |||\, v\, |||_{2, I_\varrho} \leq \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n/2} |||\, v\, |||_{2, I_R}$$

mentre per la w si ha la maggiorazione [5])

$$\text{(2.4)} \qquad |||\, w\, |||_{2, I_R} \leq |||\, \Delta w\, |||_{0, I_R} \leq$$

$$\leq \sup_{x \in I_R} \left\{ \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha(x)\, a_{ij}(x))^2 \right\}^{1/2} |||\, u\, |||_{2, I_R} .$$

Per la condizione iii)

$$\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_{ij} - \alpha a_{ij})^2 = N - 2\alpha\, Tr A + \alpha^2\, Tr A \leq K^2$$

da cui in definitiva

$$\text{(2.5)} \qquad |||\, w\, |||_{2,R} \leq K\, |||\, u\, |||_{2,R} .$$

Dalle (2.3) e (2.5) segue la tesi.

c.v.d.

Dimostrerò ora un teorema di regolarità locale.

Teorema [2.II]. *Sia Ω un aperto $\mathbb{R}^n$ ed $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ una matrice di funzioni di $L^\infty(\Omega)$ verificante quasi ovunque in Ω le condizioni*

---

[4]) Con $H^2_{\gamma_0}(\Omega)$ si indica lo spazio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

[5]) Per la prima diseguaglianza vedi [13], (24) e seg.

i) *gli autovalori di* A *sono positivi*

ii) $n - K^2 \leq \dfrac{(Tr\, A)^2}{Tr\, A^2} \leq n \; (0 \leq K < 1)$.

Sia $u(x)$ *una funzione di* $H^2(\Omega)$, *soluzione in* Ω *dell'equazione*:

$$Eu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i \partial x_j} = f(x). \tag{2.6}$$

Posto $q = \sup\limits_{0<x<\frac{1-K}{1+K}} \dfrac{\log[(1+K)x+K]}{\log x}$, *se* $f(x)$ *appartiene ad* $L^{2,\lambda}(\Omega)$ *con* $\lambda < nq$ [6]), *allora le derivate seconde della* $u(x)$ *appartengono ad* $L^{2,\lambda}_{loc}(\Omega)$ *e per ogni aperto* $\Omega_0 \subset\subset \Omega$ [7]) *si ha la maggiorazione*:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^{2,\lambda}(\Omega_0)} \leq \text{cost} \cdot \left\{ \||\, u \,\||_{2,\Omega} + \| f \|_{L^{2,\lambda}(\Omega)} \right\}. \tag{2.7}$$

DIM.

Sia 2δ la distanza di Ω_0 da $\partial\Omega$, x_0 un punto di $\overline{\Omega}^0$ ed R un numero positivo minore di δ. Consideriamo in $I_R = I(x_0 . R)$ le funzioni u_1 ed u_2 soluzioni dei problemi di Dirichlet:

$$\mathfrak{D}_1 : \begin{cases} Eu_1 = 0 \quad \text{q. ov.} \quad \text{in } I_R \\ u_1 - u \in H^2_{\gamma_0}(I_R) \end{cases}$$

$$\mathfrak{D}_2 : \begin{cases} Eu_2 = f \quad \text{q. ov.} \quad \text{in } I_R \\ u_2 \in H^2_{\gamma_0}(I_R). \end{cases}$$

Ovviamente $u = u_1 + u_2$ in I_R Per i lemmi [2.1] e [1.III] si ha per ogni numero positivo $\varrho < R$:

$$\||\, u_1 \,\||_{2, I_\varrho} \leq C_1 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{nq/2} \||\, u_1 \,\||_{2, I_R} \tag{2.8}$$

---

[6]) Se $\lambda \geq nq$, per le proprietà di inclusione tra spazi di Morrey (vedi ad es. [4]) la $f(x)$ appartiene ad $L^{2, nq-\varepsilon}(\Omega)$ per ogni $\varepsilon > 0$.

[7]) Si dice che Ω_0 è strettamente contenuto in Ω ($\Omega_0 \subset\subset \Omega$) se Ω_0 è limitato e $\overline{\Omega}_0 \subset \Omega$.

mentre per per il teorema 2 di [13]:

$$\||| u_2 |||_{2, I_R} \leq C_2 \| f \|_{0, I_R}. \tag{2.9}$$

Ne deriva, per ogni δ positivo e minore di R la maggiorazione:

$$\begin{aligned} ||| u |||_{2, I_\varrho} &\leq C_1 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{nq/2} ||| u |||_{2, I_R} + \left[C_1 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{nq/2} + C_2\right] \| f \|_{0, I_R} \leq \\ &\leq C_1 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{nq/2} ||| u |||_{2, I_R} + C_3 R^{\lambda/2} \| f \|_{L^{2, \lambda}(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Applicando a questo punto il lemma [1.IV] si ottiene per ogni coppia ϱ, R $(0 < \varrho < R < \delta)$ la maggiorazione:

$$||| u |||_{2, I_\varrho} \leq C_1 \left(\frac{\varrho}{R}\right)^{\lambda/2} ||| u |||_{2, I_R} + C_4 \varrho^{\lambda/2} \| f \|_{L^{2, \lambda}(\Omega)}. \tag{2.11}$$

Consideriamo ora la quantità

$$U_\varrho = \varrho^{-\lambda/2} ||| u |||_{2, I_\varrho \cap \Omega_0}.$$

Se $\varrho < \delta$ allora per la (2.11):

$$U_\varrho \leq C_1 \delta^{-\lambda/2} ||| u |||_{2, \Omega} + C_4 \| f \|_{L^{2, \lambda}(\Omega)} \tag{2.12}$$

mentre se $\varrho \geq \delta$

$$U_\varrho \leq \delta^{-\lambda/2} ||| u |||_{2, \Omega}. \tag{2.13}$$

La tesi segue dalle (2.12) e (2.13).

c. v. d.

Veniamo ora alla regolarità al bordo.

Se $u(x)$ è una funzione di $H^2(I_R^*)$ con traccia nulla su Γ_R, soluzione in I_R^* dell'equazione omogenea

$$Eu = 0 \tag{2.1}$$

allora con una dimostrazione del tutto analoga a quella del lemma [2.1] (usando il lemma [1.II] invece del lemma [1.I]), si ottiene la maggiorazione

$$(2.14)\qquad |||\, u \,|||_{2,\, I^*_\varrho} \leq \left[(1 + K)\left(\frac{\varrho}{R}\right)^{n/2} + K\right] |||\, u \,|||_{2,\, I^*_R}$$

con $0 < \varrho < R$.

Si ha il seguente teorema:

TEOREMA [2.III]. *Sia $A(x)$ una matrice verificante le condizioni del teorema precedente in $I^*_{R_0}$ ed $u(x)$ una funzione di $H^2(I^*_{R_0})$ nulla su Γ_{R_0}, soluzione dell'equazione*

$$(2.15)\qquad Eu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} = f(x).$$

Se $f(x)$ appartiene a $L^{2,\lambda}(I^*_{R_0})$ ($\lambda < nq$) comunque fissato $R < R_0$ le derivate seconde di $u(x)$ sono in $L^{2,\lambda}(I^*_R)$ e si ha la maggiorazione:

$$(2.16)\qquad \sum_{i,j=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \right\|_{L^{2,\lambda}(I^*_R)} \leq \text{cost} \left\{ |||\, u \,|||_{2,\, I^*_{R_0}} + \| f \|_{L^{2,\lambda}(I^*_{R_0})} \right\}.$$

DIM. Fissato $R < R_0$ sia $\delta = (R_0 - R)/2$. Sia x_0 un punto di I^*_R e ϱ un numero positivo minore di δ. Ci si può limitare a considerare due casi: quello in cui la sfera $I(x_0, \varrho)$ è interna ad $I^*_{R_0}$ e quello in cui x_0 appartiene a Γ_R.

Nel primo caso è valida la (2.12) del teorema precedente, mentre nel secondo caso usando la (2.14) e ragionando allo stesso modo del teorema [2.II] si ottiene una maggiorazione analoga alla (2.12), e quindi la tesi.

c. v. d.

OSSERVAZIONE. Notiamo innanzitutto che le ipotesi fatte nei teoremi [2.II] e [2.III] sulla $u(x)$ e sul secondo membro $f(x)$ sono sovrabbondanti; basta infatti che la $u(x)$ appartenga ad $H^2_{\text{loc}}(\Omega)$ e la $f(x)$ sia in $L^{2,\lambda}_{\text{loc}}(\Omega)$ [8]).

---

[8]) Nel caso del teorema [2.III] si supponga che $u(x) \in H^2(I^*_R)$ e $f(x) \in L^{2,\lambda}(I^*_R)$ per ogni $R < R_0$.

In secondo luogo voglio osservare che benchè nei teoremi suddetti siano stati considerati operatori contenenti solo termini del secondo ordine, ciò non limita la generalità del risultato, in quanto i termini di ordine inferiore si trattano in modo standard portandoli al secondo membro.

Supponiamo infatti che $u(x)$ sia soluzione in Ω dell'equazione

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)\, u_{x_i} + c(x)\, u \tag{2.17}$$

con b_j, $c \in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ e $f(x) \in L^{2,\lambda}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $(\lambda < nq)$.

Se le derivate seconde della $u(x)$ sono in qualche $L^{2,\mu}_{\mathrm{loc}}$ allora le derivate prime (ed a maggiore ragione le u) sono in $\mathcal{L}^{2,\mu+2}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ [9]) e quindi il secondo membro è in $L^{2,\lambda_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $\lambda_0 = \min[\lambda, \mu + 2]$. Allora $u_{x_i x_j} \in L^{2,\lambda_0}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Con un numero finito di passaggi si ottiene allora il teorema [2.II] (ed analogamente il teorema [2.III]) nel caso generale.

Supponiamo ora che Ω sia un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera $\partial\Omega$ di classe C_2, avente curvatura media non positiva (la normale è orientata verso l'esterno) e che $A(x) = \{a_{ij}(x)\}$ sia una matrice verificante in Ω le condizioni del teorema [2.II]:

i) gli autovalori di A sono positivi

ii) $$n - K^2 \leq \frac{[Tr\, A(x)]^2}{Tr\, A^2(x)} \leq n \qquad (0 \leq K < 1).$$

È noto (vedi [13], teorema 1) che in queste ipotesi il problema di Dirichlet con dati nulli al bordo:

$$\mathfrak{D}_0 : \begin{cases} \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = f(x) \quad \text{q. ov.} \quad \text{in } \Omega \\ u(x) \in H^2_{\gamma_0}(\Omega) \end{cases}$$

con $f(x) \in L^2(\Omega)$ ha una ed una sola soluzione, e che si ha la mag-

---

[9]) Vedi ad es. [4].

giorazione:

$$|||\, u \,|||_{2,\Omega} \leq \text{cost.}\; \|f\|_{0,\Omega}\,. \tag{2.18}$$

Se la funzione $f(x)$ appartiene a qualche spazio di Morrey $L^{2,\lambda}(\Omega)$ (con $\lambda < nq$) il teorema [2.II] garantisce la regolarità locale delle derivate seconde della soluzione. Con l'aiuto del teorema [2.III] si può dimostrare la regolarità in tutto Ω.

Sia x_0 un punto di $\partial\Omega$. A meno di una rotazione e una traslazione si può supporre che sia $x_0 = 0$ e che il piano $x_n = 0$ sia tangente a $\partial\Omega$ sull'origine. In un intorno J dell'origine $\partial\Omega$ ammette una rappresentazione cartesiana $x_n = g(x')$. Se supponiamo che in $J \cap \Omega$ sia $x_n > g(x')$, la trasformazione $y = \mathcal{T}x$ di componenti

$$\begin{cases} y' = x' \\ y_n = x_n - g(x') \end{cases}$$

porta $J \cap \Omega$ in un aperto contenuto nel semispazio $x_n > 0$ e contenente una semisfera I_R^*.

Sia ora $u(x)$ la soluzione in Ω del problema $\mathfrak{D}_0$; la funzione $v(y) = (u \circ \mathcal{T}^{-1})(y)$ è soluzione in I_R^* di un'equazione del tipo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a'_{ij}(y) \frac{\partial^2 v}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(y) \frac{\partial v}{\partial y_i} = F(y) \tag{2.19}$$

con $b_i(y) \in L^\infty(I_R^*)$ e $F(y) = (f \circ \mathcal{T}^{-1})(x)$; ed inoltre v ha traccia nulla su Γ_R.

Esaminiamo la matrice $A'(y) = \{a'_{ij}(y)\}$. Ovviamente le funzioni $a'_{ij}(y)$ sono limitate in I_R^*. Per le ipotesi fatte su $\partial\Omega$ la funzione $g(x')$ è nulla nell'origine insieme con le derivate prime, mentre le derivate seconde (scegliendo opportunamente R) si mantengono limitate per $|x'| < R$.

Ne deriva che $|\operatorname{grad} g(x')| = 0(R)$ [10]) e quindi

$$A'(y) = (A \circ \mathcal{T}^{-1})(y) + 0(R). \tag{2.20}$$

([10]) Si dice che $\varphi(x) = 0(R)$ $(R = |x|)$ se $|\varphi(x)|/R$ si mantiene limitata in un intorno dell'origine.

Supponiamo ora che $f(x)$ appartenga ad $L^{2,\lambda}(\Omega)$ con $\lambda < nq$. Evidentemente $F(y)$ apparterrà ad $L^{2,\lambda}(I_R^*)$. Poichè q è una funzione continua e decrescente di K nell'intervallo $[0, 1[$, fissato $q_0 < q$ tale che $\lambda < nq_0$ esiste un $K_0 > K$ tale che $q(K_0) = q_0$.

Ora dalla (2.20) segue che quasi ovunque in I_R^* si ha

$$\frac{[Tr\, A'(y)]^2}{Tr\,[A'(y)]^2} \geq n - K^2 - 0(R)\,; \tag{2.21}$$

e quindi in corrispondenza di K_0 esiste $R_0 \leq R$ tale che in $I_{R_0}^*$:

$$\frac{[Tr\, A'(y)]^2}{Tr\,[A'(y)]^2} \geq n - K_0^2\,. \tag{2.22}$$

Per il teorema [2.III] la funzione $v(y)$ ha derivate seconde in $L^{2,\lambda}(I_{R_0/2}^*)$ e quindi la $u(x)$ ha derivate seconde in $L^{2,\lambda}(\mathcal{T}^{-1}(I_{R_0/2}^*))$.

Si è allora dimostrato il seguente teorema:

TEOREMA [2 IV]. *Sia Ω un aperto limitato di $\mathbb{R}^n$, con frontiera di classe C^2, avente curvatura media non positiva (la normale è esterna). Sia $A(x)$ una matrice verificante le ipotesi del teorema* [2.II] *e sia $u(x)$ la soluzione del problema di Dirichlet:*

$$\mathfrak{D}_0: \begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, u_{x_i x_j} = f(x) \quad \text{q. ov.} \quad \text{in } \Omega \\[2ex] u(x) \in H^2_{\gamma_0}(\Omega)\,. \end{cases}$$

Se $f(x)$ appartiene ad $L^{2,\lambda}(\Omega)\,(\lambda < nq)$ allora le derivate seconde della $u(x)$ appartengono ad $L^{2,\lambda}(\Omega)$, e si ha la maggiorazione:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \| u_{x_i x_j} \|_{L^{2,\lambda}(\Omega)} \leq \text{cost}\, \| f \|_{L^{2,\lambda}(\Omega)}\,. \tag{2.23}$$

La maggiorazione (2.23) deriva immediatamente dalle (2.7), (2.16) e dalla (2.18).

BIBLIOGRAFIA

[1] L. BERS, L. NIRENBERG, « *On linear and non linear elliptic boundary value problem in the plane* » Convegno sulle equazioni a derivate parziali, Trieste 1954.

[2] S. CAMPANATO, « *Equazioni ellittiche del secondo ordine e spazi* $\mathcal{L}^{(2,\lambda)}$ » Annali di Matematica, LXIX (1965).

[3] S. CAMPANATO, « *Alcune osservazioni relative alle soluzioni di equazioni ellittiche di ordine* $2m$ », Convegno sulle equazioni alle derivate parziali, Bologna 1967.

[4] S. CAMPANATO « *Proprietà di Inclusione per spazi di Morrey* », Ricerche di Matem. XII (1963).

[5] H. O. CORDES, « *Über die erste Rundwertaufgabe bei quasi linearen Differential gleichungen zweiter Ordunung in mehr als zwei Variablen* » Math. Ann. **131** (1956).

[6] H. O. CORDES, « *Vereinfachter Beweis der Existenz einer Apriori-Holderkonstanten* » Math. Ann. **138** (1959).

[7] H. O. CORDES « *Zero order a priori estimates for solution of ellipttic differential equations* » Proc. of Symposia in Pure Math. IV (1961).

[8] J. KADLEC, J. NEČAS, « *Sulla regolarità delle soluzioni di equazioni ellittiche negli spazi* $H^{K,\lambda}$ » Annali S.N.S. Pisa.

[9] C. MIRANDA, « *Sui sistemi di tipo ellittico di equazioni lineari a derivate parziali del primo ordine, in n variabili indipendenti* » Memorie Acc. Lincei III (1952).

[10] G. B. MORREY, « *On the solution of quasi linear elliptic partial differential equations* » Trans. Am. Math. Soc. **43** (1938).

[11] G. B. MORREY, « *Second order elliptic systems of differential equations* » Contribution to the theory of Partial Differ. Equations, Ann. of Math. St. **33** (1954).

[11 bis] G. B. MORREY « *Second order elliptic equations in several variables and Hölder continuity* » Mat Zeit **72** (1959).

[12] L. NIRENBERG, « *On non linear elliptic partial differential equations and Hölder continuity* » Comm. Pure and Appl. Math. VI (1953).

[13] G. TALENTI « *Sopra una classe di equazioni ellittiche a coefficienti misurabili* » Annali di Matem. LXIX (1965).

[14] G. TALENTI, « *Equazioni lineari ellittiche in due variabili* » Le Matematiche XXI (1966).

Manoscritto pervenuto in redazione il 18-11-67