

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO AMBROSETTI

**Un teorema di esistenza per le equazioni  
differenziali negli spazi di Banach**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 39 (1967), p. 349-361

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_39\\_\\_349\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__349_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# UN TEOREMA DI ESISTENZA PER LE EQUAZIONI DIFFERENZIALI NEGLI SPAZI DI BANACH

ANTONIO AMBROSETTI \*)

Sia  $\Sigma$  un sottoinsieme di uno spazio di Banach  $E$ ,  $I$  un intervallo chiuso e limitato della retta reale e  $f(x, y)$  una funzione di  $I \times \Sigma$  in  $E$ . Allora la sola ipotesi della continuità di  $f(x, y)$  non è sufficiente a garantire l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione differenziale ordinaria del primo ordine

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

soddisfacente alla condizione iniziale

$$(2) \quad y(x_0) = y_0^{1)}.$$

In questo lavoro verrà dimostrato un Teorema di esistenza per tale problema, ottenendo così un risultato che è più generale di quelli dovuti a C. CORDUNEANU <sup>2)</sup> ed a M. A. KRASNOSEL'SKII - S. G. KREIN <sup>3)</sup>. Nella dimostrazione si farà uso di un Teorema di punto unito di G. DARBO <sup>4)</sup>.

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Scuola Normale Superiore, Pisa.

<sup>1)</sup> Cfr. [1] — pag. 25.

<sup>2)</sup> Cfr. [2] — pag. 226 e segg.

<sup>3)</sup> Cfr. [5] — pag. 13-16.

<sup>4)</sup> Cfr. [3] — pag. 84 e segg.

Ringrazio il Prof. G. Prodi che mi ha guidato nella presente ricerca e il Prof. E. De Giorgi per le utili discussioni sull'argomento.

### § 1. Premesse.

Faremo nel seguito frequente uso di alcune nozioni sulle  $\alpha$ -contrazioni introdotte da G. DARBO<sup>5)</sup>; per comodità daremo dapprima alcuni richiami su tale argomento e cominceremo perciò con la seguente

**DEFINIZIONE 1.1.** *Sia  $X$  un insieme limitato di uno spazio di Banach  $E$ . Indicheremo con  $\alpha(X)$  l'estremo inferiore dei numeri positivi  $\varepsilon$  per i quali è possibile decomporre  $X$  nell'unione di un numero finito di parti di diametro inferiore ad  $\varepsilon$ .*

Dalla definizione precedente segue subito che:

**PROPRIETÀ 1.2.** *Condizione necessaria e sufficiente perchè  $X$  sia relativamente compatto in  $E$  è che risulti  $\alpha(X) = 0$ .*

**PROPRIETÀ 1.3.** *Se  $X$  e  $Y$  sono porzioni limitate di  $E$ , detto  $X + Y$  l'insieme  $\{z = x + y : x \in X, y \in Y\}$ , si ha*

$$\alpha(X + Y) \leq \alpha(X) + \alpha(Y).$$

Sia  $E$  uno spazio metrico e  $T$  una trasformazione di  $E$  in sè; hanno importanza in molte questioni quelle trasformazioni  $T$  che sono completamente continue, cioè che sono continue e che trasformano ogni insieme limitato in un insieme relativamente compatto in  $E$ . Tali trasformazioni godono quindi della proprietà che, per ogni  $X \subset E$ ,  $X$  limitato, risulta  $\alpha(T(X)) = 0 \leq \alpha(X)$ . Per generalizzare tale concetto, si dà, seguendo G. DARBO, la seguente

**DEFINIZIONE 1.4.** *Chiameremo  $\alpha$ -contrazione ogni trasformazione continua  $T$  di uno spazio metrico  $E$  in sè, che soddisfa alle seguenti proprietà:*

---

<sup>5)</sup> Per ulteriori notizie sull'argomento e per la dimostrazione del Teorema 1.7 vedi [3] con relativa bibliografia.

I. ogni insieme limitato di  $E$  venga trasformato dalla  $T$  in un insieme limitato ;

II. qualunque sia l'insieme limitato  $X \subset E$ , posto  $X' = T(X)$ , risulti

$$\alpha(X') \leq k \alpha(X),$$

con  $k$  conveniente numero non negativo, minore di uno e indipendente da  $X$ .

Segue subito che :

PROPRIETÀ 1.5. Le trasformazioni completamente continue sono  $\alpha$ -contrazioni.

Poichè ovviamente le contrazioni ordinarie sono  $\alpha$ -contrazioni, dalla definizione 1.4 e dalle proprietà 1.3 e 1.5 segue che :

PROPRIETÀ 1.6. Se la trasformazione  $T$  di  $E$  in  $E$  si può scrivere come  $T_1 + T_2$ , con  $T_1$  completamente continua e  $T_2$  contrazione, allora  $T = T_1 + T_2$  è una  $\alpha$ -contrazione.

Generalizzando un noto Teorema di punto unito di G. SCHAUDER, G. DARBO ha dimostrato sulle  $\alpha$ -contrazioni il seguente

TEOREMA 1.7. Sia  $T$  una  $\alpha$  contrazione definita in un insieme convesso e chiuso  $X$  di uno spazio di Banach  $E$ . Sia inoltre l'immagine  $T(X)$  limitata e contenuta in  $X$ . In tali ipotesi esiste in  $X$  almeno un punto unito per la  $T$ .

Generalizzando il concetto di  $\alpha$ -contrazione, diamo poi la seguente

DEFINIZIONE 1.8. Siano  $E$  e  $F$  due spazi di Banach ; diremo che una funzione  $f(y) : E \rightarrow F$  è  $\alpha$ -lipschitziana se è continua e se

I. per ogni insieme limitato  $S \subset E$ ,  $f(S) \subset F$  è limitato ;

II. esiste una costante  $h$ , tale che, per ogni insieme limitato  $S \subset E$ , si abbia

$$\alpha(f(S)) \leq h \cdot \alpha(S).$$

Data una funzione  $\alpha$ -lipschitziana  $f$ , il più piccolo valore non negativo di  $h$ ,  $h_f$ , per cui sussiste la diseguaglianza precedente qua-

lunque sia l'insieme  $S$  limitato di  $E$ , sarà chiamato *modulo* della funzione  $\alpha$ -lipschitziana  $f$ .

Sussiste infine il seguente Teorema, di immediata dimostrazione:

**TEOREMA 1.9.** *Siano  $E, F, G$ , tre spazi di Banach;  $f$  un'applicazione di  $E$  in  $F$   $\alpha$ -lipschitziana con modulo uguale ad  $h_f$ ;  $g$  una applicazione di  $F$  in  $G$   $\alpha$ -lipschitziana con modulo uguale ad  $h_g$ . Allora l'applicazione composta  $g \circ f$  di  $E$  in  $G$ , è  $\alpha$ -lipschitziana con modulo  $h_{g \circ f}$  minore o uguale a  $h_f \cdot h_g$ .*

## § 2. Un teorema preliminare.

Sia  $E$  uno spazio di Banach,  $I$  un intervallo chiuso e limitato della retta reale. Indichiamo con  $C(I; E)$  lo spazio delle funzioni continue su  $I$ , a valori in  $E$ , che rispetto alla norma

$$\| \| u \| \|_C = \sup \{ \| u(x) \|_E : x \in I \}$$

è uno spazio di Banach; e consideriamo un sottoinsieme  $H \subset C(I; E)$ . In corrispondenza ad  $H$  si prenda, per ogni  $x \in I$ , l'insieme  $H(x) \subset E$ , formato da tutti gli elementi del tipo  $u(x)$  con  $u \in H$ , e sia inoltre  $H(I) \subset E$  l'insieme  $\bigcup_{x \in I} H(x)$ ; se  $H$  è limitato anche  $H(I)$  lo è, e viceversa. Vogliamo ora dimostrare un Teorema che ci sarà utile nel seguito e che generalizza il classico Teorema di ASCOLI-ARZELÀ<sup>6)</sup>. A tale scopo proviamo dapprima due Lemmi.

**LEMMA 2.1.** *Se  $H \subset C(I; E)$  è un insieme limitato ed equicontinuo, per il corrispondente  $H(I) \subset E$  si ha*

$$\alpha(H) = \alpha(H(I)).$$

**DIM.** Divideremo la dimostrazione in due parti: mostreremo prima che  $\alpha(H(I)) \leq \alpha(H)$ , provando successivamente la disegualianza inversa.

---

<sup>6)</sup> Per una dimostrazione del Teorema di ASCOLI-ARZELÀ, cfr., ad esempio, [4], pp. 135-136. La dimostrazione dei Lemmi 2.1 e 2.2 del presente lavoro, ricalda, nelle sue linee essenziali, quella del suddetto Teorema.

Per la definizione 1.1., fissato  $\varepsilon > 0$ , si può trovare un ricoprimento finito  $\{H_i\}_{1 \leq i \leq n}$  di  $H$ , tale che, per ogni indice  $i = 1, 2, \dots, n$ , il diametro di  $H_i$ ,  $\text{diam } H_i$ , risulti minore di  $\alpha(H) + \varepsilon$ . Poichè  $H$  è equicontinuo, in corrispondenza a detto  $\varepsilon$ , è possibile dividere  $I$ , che è compatto, in  $m$  intornoi  $V_j (j = 1, 2, \dots, m)$ , tali che, se  $x_1$  e  $x_2$  appartengono a  $V_j$ , risulti  $\|u(x_1) - u(x_2)\| < \varepsilon$  per ogni  $u \in H$ . Consideriamo allora, per ogni coppia di indici  $i, j$ , l'insieme  $B_{i,j} \subset H(I)$  siffatto:  $B_{i,j} = H_i(V_j) = \{u(x) : u \in H_i, x \in V_j\}$ . È ovvio che  $\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  forma un ricoprimento (finito) di  $H(I)$ , e risulta

$$\text{diam } B_{i,j} = \sup \{ \|u(x_1) - \bar{u}(x_2)\| : u, \bar{u} \in H_i, x_1, x_2 \in V_j \}.$$

Inoltre si ha

$$\|u(x_1) - \bar{u}(x_2)\| \leq \|u(x_1) - \bar{u}(x_1)\| + \|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)\|.$$

Ma al variare di  $x_1$  e  $x_2$  in un certo  $V_j$ ,  $\|\bar{u}(x_1) - \bar{u}(x_2)\|$  si mantiene più piccolo di  $\varepsilon$ , per ogni  $\bar{u} \in H$ , e quindi

$$\|u(x_1) - \bar{u}(x_2)\| < \|u(x_1) - \bar{u}(x_1)\| + \varepsilon.$$

Allora risulta, per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ ,

$$\begin{aligned} \text{diam } B_{i,j} &\leq \sup \{ \|u(x_1) - \bar{u}(x_1)\| : u, \bar{u} \in H_i, x_1 \in V_j \} + \varepsilon \leq \\ &\leq \sup \{ \|u(x) - \bar{u}(x)\| : u, \bar{u} \in H_i, x \in I \} + \varepsilon = \\ &= \text{diam } H_i + \varepsilon < \alpha(H) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Quindi, a maggior ragione

$$\alpha(H(I)) < \alpha(H) + 2\varepsilon.$$

E, attesa l'arbitrarietà di  $\varepsilon$ , segue la conclusione.

Dimostriamo ora che  $\alpha(H) \leq \alpha(H(I))$ . Dato  $\varepsilon > 0$ , per l'equicontinuità di  $H$ , si può ricoprire  $I$  con un numero finito di intornoi  $V(x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$  tali che, se  $x \in V(x_i)$ , segua  $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$ , per ogni  $u \in H$ . D'altra parte è anche possibile, in corrispondenza al precedente  $\varepsilon$ , trovare un ricoprimento finito di  $H(I)$  con insiemi

$B_j$  ( $j = 1, 2, \dots, m$ ) di diametro minore di  $\alpha(H(I)) + \varepsilon$ . Sia  $\Phi$  l'insieme (finito) di tutte le mappe  $i \rightarrow \varphi(i)$  di  $[1, 2, \dots, n] \subset N$  in  $[1, 2, \dots, m] \subset N$ . Per ogni  $\varphi \in \Phi$ , si denoti con  $L_\varphi$  l'insieme di tutti gli  $u \in H$  tali che  $\forall i \in [1, 2, \dots, n]$  si abbia  $u(x_i) \in B_{\varphi(i)}$ . Si vede facilmente che  $H$  è ricoperto dall'unione degli  $L_\varphi$ . Inoltre se  $u, \bar{u} \in L_\varphi$ , per ogni  $x \in I$ , c'è un indice  $i$  tale che  $x \in V(x_i)$ . Allora si ha  $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$ , e  $\|\bar{u}(x) - \bar{u}(x_i)\| < \varepsilon$ ; dato poi che  $\|u(x_i) - \bar{u}(x_i)\| < \alpha(H(I)) + \varepsilon$ , risulta:

$$\begin{aligned} \|u(x) - \bar{u}(x)\| &\leq \|u(x) - u(x_i)\| + \|u(x_i) - \bar{u}(x_i)\| + \\ &\quad + \|\bar{u}(x_i) - \bar{u}(x)\| < \alpha(H(I)) + 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Perciò

$$\alpha(H) \leq \alpha(H(I)) + 3\varepsilon,$$

e quindi la conclusione, perchè  $\varepsilon$  è arbitrario.

LEMMA 2.2. *Nelle stesse ipotesi del Lemma 2.1 si ha:*

$$\alpha(H(I)) = \sup \{ \alpha(H(x)) : x \in I \}.$$

DIM. Poichè per ogni  $x \in I$ ,  $H(x) \subset H(I)$ , si ha intanto  $\alpha(H(x)) \leq \alpha(H(I))$ , il che implica  $\sup \{ \alpha(H(x)) : x \in I \} \leq \alpha(H(I))$ .

Viceversa, poichè  $H$  è equicontinuo, fissato ad arbitrio  $\varepsilon > 0$ , si divida  $I$  in  $n$  intervalli  $V(x_1) \dots V(x_n)$  tali che ivi si abbia  $\|u(x) - u(x_i)\| < \varepsilon$  per ogni  $u \in H$ . Inoltre per ogni  $i = 1, 2, \dots, n$ , si può trovare un ricoprimento finito  $\{H_j^{(i)}\}_{1 \leq j \leq m}$  di  $H$  tale che  $\{H_j^{(i)}(x_i)\}_{1 \leq j \leq m}$  sia un ricoprimento finito di  $H(x_i)$  soddisfacente a

$$\max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } H_j^{(i)}(x_i) < \alpha(H(x_i)) + \varepsilon.$$

Allora, detto  $B_{i,j} = H_j^{(i)}(V(x_i))$ , si ha che  $\{B_{i,j}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  è un ricoprimento finito di  $H(I)$ , e inoltre

$$\text{diam } B_{i,j} = \sup \{ \|u(x) - v(y)\| : u, v \in H_j^{(i)}; x, y \in V(x_i) \}.$$

Ma risulta anche :

$$\|u(x) - v(y)\| \leq \|u(x) - u(x_i)\| + \|u(x_i) - v(x_i)\| + \\ + \|v(x_i) - v(y)\| < 2\varepsilon + \|u(x_i) - v(x_i)\|,$$

quindi

$$\text{diam } B_{i,j} \leq 2\varepsilon + \sup \{\|u(x_i) - v(x_i)\| : u, v \in H_j^{(i)}\} = 2\varepsilon + \text{diam } H_j^{(i)}(x_i).$$

Questo ci dice che  $\max \{\text{diam } B_{i,j} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\} \leq 2\varepsilon +$   
 $+\max \{\text{diam } H_j^{(i)}(x_i) : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$

Allora a più forte ragione si ha :

$$\alpha(H(I)) < 3\varepsilon + \max_{1 \leq i \leq n} \alpha(H(x_i)) \leq 3\varepsilon + \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}; \quad \text{c. v. d.}$$

Si può così concludere, riunendo i risultati dei Lemmi 2.1 e 2.2 col

**TEOREMA 2.3.** *Se  $H \subset C(I; E)$  è un insieme limitato ed equicontinuo, si ha :*

$$\alpha(H) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}.$$

**OSSERVAZIONI.** Nelle dimostrazioni precedenti non si è esplicitamente sfruttato il fatto che  $I$  è un intervallo della retta reale, ma solo che  $I$  è compatto. E infatti il risultato precedente è ancora vero nell'ipotesi che  $H$  sia un generico sottoinsieme limitato ed equicontinuo di  $C(I; E)$  con  $I$  generico spazio metrico compatto.

Inoltre il Teorema 2.3 generalizza, in un certo senso, il Teorema di ASCOLI-ARZELÀ. Sia infatti  $H$  un insieme limitato ed equicontinuo; allora, se  $H$  è compatto, si ha che  $\alpha(H) = 0$ , e quindi anche il  $\sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\}$  è eguale a zero; questo implica che  $H(x)$  è compatto per ogni  $x \in I$ ; viceversa, se  $H(x)$  è compatto per ogni  $x \in I$ , allora  $\alpha(H(x)) = 0$  per ogni  $x \in I$ . Quindi  $\alpha(H) = \sup \{\alpha(H(x)) : x \in I\} = 0$ , e questo equivale a dire che  $H$  è compatto in  $C(I; E)$ .

### § 3. Teorema di esistenza.

Il Teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ci permette ora di dimostrare il seguente

**TEOREMA 3.1.** *Sia  $E$  uno spazio di Banach e, fissato  $y_0 \in E$ , sia  $\Sigma \subset E$  l'insieme  $\{y : y \in E, \|y - y_0\| \leq b\}$ ; inoltre, fissato  $x_0 \in R$ , sia*



$I \subset \mathbb{R}$  l'intervallo  $\{x : |x - x_0| \leq a\}$ . Consideriamo l'equazione differenziale

$$(1) \quad y' = f(x, y)$$

dove  $f(x, y)$  è una funzione definita per  $(x, y) \in I \times \Sigma$ , che assume i suoi valori in  $E$ . Supponiamo che  $f(x, y)$  sia uniformemente continua e, per ogni  $x \in I$ ,  $\alpha$ -lipschitziana rispetto ad  $y$ , con costante  $h$  indipendente dal punto  $x$ . Allora, se  $\delta'$  è un numero tale che  $\delta' h < 1$ , esiste almeno una soluzione dell'equazione (1) soddisfacente alla condizione iniziale

$$(2) \quad y(x_0) = y_0,$$

definita in un opportuno intorno  $\bar{I}$  di  $x_0$  di ampiezza  $\delta$ , dove

$$\delta = \min \left( \delta', a, \frac{b}{M} \right), \text{ con } M = \|\sup \{ \|f(x, y)\| : (x, y) \in I \times \Sigma \} \text{ } ^7).$$

DIM. Consideriamo lo spazio di Banach  $C(\bar{I}; E)$  introdotto nel paragrafo 2, e sia  $K$  l'insieme delle funzioni  $u(x) \in C(\bar{I}; E)$  lipschitziane con costante di Lipschitz minore o eguale a  $M$  e soddisfacenti inoltre a

$$\|u(x) - y_0\| \leq b, \quad (x \in \bar{I}).$$

$K$  è un insieme equicontinuo, chiuso e convesso. Si definisca sopra  $K$  la seguente trasformazione funzionale  $T$ :

$$T: u(x) \rightarrow Tu(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, u(t)) dt.$$

È facile verificare che  $T$  è continua sopra  $K$  e che se  $u \in K$  anche  $Tu \in K$ .

Dimostriamo che  $T$  è una  $\alpha$ -contrazione; per questo si osservi che  $T$  si può scrivere come  $J \circ f^*$ , ove si è indicato con  $J$  l'applicazione che ad ogni funzione  $g(x) \in C(\bar{I}; E)$  associa

$$Jg(x) = y_0 + \int_{x_0}^x g(t) dt;$$

---

<sup>7)</sup> Si tenga presente che  $f(x, y)$ , applicazione uniformemente continua definita in un insieme convesso e limitato, è limitata.

e con  $f^*$  l'applicazione di  $K$  in  $C(\bar{I}; E)$  definita nel seguente modo:

$$f^* u(x) = f(x, u(x)).$$

La  $J$  è ovviamente  $\alpha$ -lipschitziana con modulo uguale a  $\delta$ . Quanto alla  $f^*$ , si osservi che essa è continua e che, per ogni  $H \subset K$ ,  $H^* = f^*(H)$  è equicontinuo. Allora, attese le ipotesi fatte e il Teorema 2.3., risulta:

$$\alpha(H^*) = \sup \{ \alpha(H^*(x)) : x \in \bar{I} \} \leq h \sup \{ \alpha(H(x)) : x \in \bar{I} \} = h\alpha(H),$$

con  $h$  indipendente da  $H$ . Ciò equivale a dire che anche la  $f^*$  è  $\alpha$ -lipschitziana con modulo uguale ad  $h$ . Applicando ora il Teorema 1.9, si può affermare che  $T$  è un'applicazione  $\alpha$ -lipschitziana con modulo minore o uguale a  $\delta h < 1$ , cioè che  $T$  è una  $\alpha$ -contrazione. Perciò, a norma del Teorema 1.7. di G. DARBO, si può concludere che la  $T$  ha almeno un punto unito. Questo punto rappresenta la soluzione della (1) soddisfacente alla (2) che si cercava.; c. v. d.

**OSSERVAZIONI.** Le proposizioni 1.2 e 1.6. ci dicono che l'ipotesi che la  $f(x, y)$  sia completamente continua <sup>8)</sup> o che sia  $f = f_1 + f_2$ , con  $f_1$  lipschitziana e  $f_2$  completamente continua <sup>9)</sup>, rientra come caso particolare nell'ipotesi del Teorema testè dimostrato.

Nel Teorema precedente si è provata l'esistenza di almeno una soluzione dell'equazione (1) verificante alla condizione iniziale (2) in un intervallo di ampiezza  $\delta = \min \left( \delta', a, \frac{b}{M} \right)$ . Però è facile verificare che se  $\delta$  è minore di  $\min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ , tale soluzione può essere prolungata e che, in definitiva l'intervallo dove la soluzione è definita può essere preso di ampiezza uguale a  $\min \left( a, \frac{b}{M} \right)$ .

<sup>8)</sup> Vedi <sup>3)</sup>.

<sup>9)</sup> Vedi <sup>4)</sup>.

## § 4.

Daremo ora qualche esempio di funzione  $\alpha$ -lipschitziana: in tal modo potremo mostrare alcune possibilità di applicazione del Teorema di esistenza 3.1.

Sia  $E$  uno spazio di Banach,  $\Delta$  un sottoinsieme di  $E$ ,  $g$  una funzione di  $\Delta$  in  $E$   $\alpha$ -lipschitziana,  $\varphi$  una funzione di  $\Delta$  in  $R$  (numeri reali) continua e che trasforma  $\Delta$  in un insieme limitato. La funzione continua

$$(3) \quad f(y) = \varphi(y) g(y)$$

di  $\Delta$  in  $E$ , in generale non è — come si vedrà in seguito in un caso particolare — facilmente scomponibile nella somma di una funzione lipschitziana e di una funzione completamente continua. Mostriamo invece che la (3) è una funzione  $\alpha$ -lipschitziana. Allo scopo sia  $H \subset \Delta$ , un insieme limitato; innanzi tutto l'immagine di  $H$  tramite  $f, f(H)$ , è limitata. Inoltre diciamo  $\lambda$  il  $\sup \{ |\varphi(y)| : y \in \Delta \}$  e  $L$  il  $\sup \{ \|g(y)\| : y \in H \}$ ; allora, per ogni coppia  $y, \bar{y} \in H$ , si ha:

$$(4) \quad \|f(y) - f(\bar{y})\| \leq \lambda \|g(y) - g(\bar{y})\| + L |\varphi(y) - \varphi(\bar{y})|.$$

Premesso ciò, fissato  $\varepsilon > 0$ , si può trovare un ricoprimento finito  $\{G_i\}_{1 \leq i \leq n}$  di  $g(H)$ , tale che

$$(5) \quad \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } G_i < \alpha(g(H)) + \varepsilon.$$

Poichè inoltre  $\varphi(H) \subset R$  è ivi relativamente compatto, in corrispondenza al precedente  $\varepsilon$ , è possibile trovare un ricoprimento finito  $\{\Phi_j\}_{1 \leq j \leq m}$  di  $\varphi(H)$  tale che

$$(6) \quad \max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } \Phi_j < \varepsilon.$$

Poniamo  $H_i = g^{-1}(G_i)$ ,  $T_j = \varphi^{-1}(\Phi_j)$ ; preso  $V_{ij} = H_i \cap T_j$ , si consideri il ricoprimento finito  $\{V_{ij}\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  di  $H$  e il corrispon-

dente ricoprimento (finito)  $\{f(V_{ij})\}_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$  di  $f(H)$ . Per le (4), (5), (6), si ha :

$$\begin{aligned} \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{diam } f(V_{ij}) &\leq \lambda \max_{1 \leq i \leq n} \text{diam } G_i + L \max_{1 \leq j \leq m} \text{diam } \Phi_j \leq \\ &\leq \lambda \cdot \alpha(g(H)) + \lambda \varepsilon + L\varepsilon. \end{aligned}$$

A questo punto, ricordando che la  $g$  è  $\alpha$ -lipschitziana, risulta :

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} \text{diam } f(V_{ij}) \leq h \lambda \alpha(H) + \lambda \varepsilon + L\varepsilon,$$

e quindi, a più forte ragione

$$\alpha(f(H)) \leq h \lambda \alpha(H) + \lambda \varepsilon + L\varepsilon.$$

Si può così concludere nel modo voluto, perchè  $\varepsilon$  è arbitrario e  $\lambda$  è indipendente da  $H$ .

Un caso particolare è il seguente. Si prenda per  $E$  lo spazio di Banach  $C([0,1])$  delle funzioni continue sull'intervallo  $[0,1]$  con la norma  $\|x\| = \sup \{|y(x)| : x \in [0,1]\}$ , e per  $f(y)$  la funzione

$$(7) \quad f(y) = y \int_0^1 \sqrt{|y(x)|} dx,$$

definita su di una sfera di  $E$ , avente per centro l'origine e raggio 2. Si constata facilmente che la (7) non è una funzione completamente continua. Si può anche vedere che tale funzione non è lipschitziana. Sia infatti  $u \in C([0,1])$  una funzione tale che sia :

a) positiva o nulla e di norma eguale a 1 ;

$$b) \int_0^1 u(x)^{-1/2} dx = +\infty.$$

Per ogni numero naturale  $n$ , sia  $u_n(x)$  la funzione definita ponendo :

$$\begin{aligned} u_n(x) &= u(x) && \text{per } x \geq \frac{1}{n} \\ u_n(x) &= u\left(\frac{1}{n}\right) && \text{per } x < \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Risulta :

$$\begin{aligned} & \left\| \{u_n(x) + \varepsilon\} \int_0^1 \sqrt{u_n(x) + \varepsilon} dx - u_n(x) \int_0^1 \sqrt{u_n(x)} dx \right\| \geq \\ & \geq \left| \int_0^1 \{\sqrt{u_n(x) + \varepsilon} - \sqrt{u_n(x)}\} dx \right| \geq \frac{\varepsilon}{2} \int_0^1 u_n(x)^{-1/2} dx. \end{aligned}$$

Quindi il rapporto  $\frac{f(u_n + \varepsilon) - f(u_n)}{\varepsilon}$ , per  $\varepsilon$  abbastanza piccolo e  $n$  tendente a  $+\infty$ , tende a  $+\infty$ , in virtù dell'ipotesi *b*) fatta sulla  $u(x)$ . Dunque la (7) non è una funzione lipschitziana; nè si vede un'immediata scomposizione della (7) come somma di due funzioni: una completamente continua e una lipschitziana; essa è invece  $\alpha$ -lipschitziana, perchè è del tipo della (3).

Un ulteriore esempio è il seguente: sia  $E$  un'algebra di Banach,  $\Delta$  un sottoinsieme di  $E$ ,  $g(y)$  e  $h(y)$  due funzioni  $\alpha$ -lipschitziane che trasformano  $\Delta$  in un insieme limitato e contenuto in  $E$ ; e si consideri la funzione  $f(y)$  di  $\Delta$  in  $E$ , definita nel seguente modo:

$$f(y) = g(y) h(y).$$

Una facile verifica mostra che anche per questa funzione sussiste una diseuguaglianza del tipo della (4)<sup>10</sup>), dopo di che, usando di un ragionamento del tutto analogo ai precedenti, si può affermare che  $f(y) = g(y) h(y)$  è una funzione  $\alpha$ -lipschitziana.

---

<sup>10</sup>) In questo caso la costante  $L$  deve essere presa come il  $\sup \{ \|g(y)\| : y \in \Delta \}$ .

### BIBLIOGRAFIA

- [1] BOURBAKI - *Fonctions d'une variable réelle*. Chap. IV - (1951).
- [2] C. CORDUNEANU - *Equazioni differenziali negli spazi di Banach. Teoremi di esistenza e prolungabilità*. Rendiconti dell'Accademia dei Lincei, Vol. XXIII - (1957).
- [3] G. DARBO - *Punti uniti in trasformazioni a codominio non compatto*. Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, Vol. XXIV - (1955).
- [4] J. DIEUDONNÉ - *Fondements de l'Analyse Moderne*. (1963).
- [5] M. A. KRASNOSEL'SKII - S. G. KREIN - *Non local existence theorems and uniqueness theorems for systems of ordinary differential equations*. (In russo) Doklady Akad. Nauk C. C. C. P. - 102 - (1955).

Manoscritto pervenuto in redazione il 15-9-1967.