RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ALESSANDRO FIGÀ-TALAMANCA

Appartenenza a L^p delle serie di Fourier aleatorie su gruppi non commutativi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 330-348

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__330_0>

APPARTENENZA A L^p DELLE SERIE DI FOURIER ALEATORIE SU GRUPPI NON COMMUTATIVI

ALESSANDRO FIGÀ-TALAMANCA *)

1. Sia Ω uno spazio di probabilità e sia $\{X_n(\omega)\}$, $n = 0, \pm 1, \ldots$, una successione di variabili aleatorie a valori complessi, simmetriche e tra loro indipendenti, definite su Ω (per definizione « simmetrico » significa che X_n e $-X_n$ hanno la stessa distribuzione di probabilità). Per $x \in (0, 2\pi]$ e $\omega \in \Omega$ consideriamo la serie di Fourier formale

$$f_\omega(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X_n(\omega)\, e^{inx}. \tag{1.1}$$

Diremo che $f \in L^r$ con probabilità p, se p è la probabilità dell'evento $\{\omega \in \Omega : f_\omega \in L^r\}$.

La serie (1.1) gode della seguente proprietà [7, pp. 56-68]:

(P) *se $f_\omega \in L^1$ con probabilità positiva, allora $f_\omega \in \bigcap_{p<\infty} L^p$ con probabilità uguale a uno.*

La proprietà (P) per la serie (1.1) viene dimostrata usando il fatto che la stessa proprietà è verificata dalla seguente serie che è un caso speciale di (1.1):

$$f_\omega(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pm a_n\, e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \varphi_n(\omega)\, a_n\, e^{inx}, \tag{1.2}$$

---

*) Questo lavoro fa parte dell'attività del gruppo N. 23 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università di Genova.

dove $\pm a_n = \varphi_n(\omega) a_n$, gli a_n sono numeri complessi prefissati e $\varphi_n(\omega)$ sono variabili aleatorie indipendenti a valori ± 1 e con valor medio zero.

Possiamo ad esempio prendere, come in [10, V, 8, p. 212], $\Omega = [0, 1]$ e $\varphi_n(\omega) = \operatorname{sgn} \operatorname{sen}(2^{n+1} \pi \omega)$.

La dimostrazione che (P) è verificata per la serie (1.1) può essere estesa fino ad includere il caso di una serie di Fourier aleatoria definita su un gruppo compatto commutativo.

In questo lavoro ci proponiamo di discutere il problema dell'estensione di questi risultati alle serie di Fourier aleatorie definite su gruppi compatti non necessariamente commutativi.

Queste sono serie della forma

$$f_\omega(x) \backsim \Sigma\, d_i\, Tr\,(X_i(\omega)\, D_i(x)) \tag{1.3}$$

dove x varia nel gruppo compatto G, le D_i denotano distinte (cioè non equivalenti) rappresentazioni unitarie irriducibili di G, d_i è il grado di D_i, Tr è la traccia ordinaria e $X_i(\omega)$ sono variabili aleatorie indipendenti a valori nell'algebra delle matrici $d_i \times d_i$.

Nel numero 2 dimostreremo che la serie (1.3) verifica la proprietà (P) se le X_i sono simmetriche rispetto al gruppo delle matrici reali ortogonali (cioè per ogni matrice ortogonale $d_i \times d_i$ U_i, X_i e $U_i X_i$ hanno la stessa distribuzione di probabilità). Per dimostrare questo facciamo vedere prima che la proprietà (P) è verificata dalla serie che è l'analoga della (1.2), cioè la serie (2.1), appresso. A questo scopo usiamo i risultati e le tecniche di [3] e di [4] dove si fa vedere che (P) è valida per un altro caso speciale importante di (1.3) [4, Teorema 3 e Corollario 4].

Se G è un gruppo commutativo tutte le sue rappresentazioni irriducibili hanno grado uno; ne segue allora che la serie (1.3) si riduce a qualcosa che è molto simile a (1.1) (cioè invece degli e^{inx} si avranno i caratteri del gruppo). La condizione di simmetria rispetto al gruppo reale ortogonale è allora semplicemente che X_i e $-X_i$ abbiano la stessa distribuzione di probabilità, perchè le matrici reali ortogonali 1×1 sono semplicemente i numeri $+1$ e -1. In questo senso il nostro risultato sembra la generalizzazione più naturale del risultato classico per la serie (1.1). Tuttavia potrebbe ancora darsi che la sola condizione di simmetria necessaria per ottenere che (P) sia verificata per la serie (1.3), fosse la similitudine di X_i e $-X_i$.

Per eliminare questa possibilità nel numero 3 costruiamo un esempio che fa vedere che per lo meno per qualche gruppo la serie

$$\Sigma \pm d_i \, Tr\,(A_i \, D_i\,(x)), \tag{1.4}$$

con A_i matrici prefissate, può non verificare la proprietà (P). Infatti mostriamo che per un certo gruppo compatto ed una scelta opportuna di A_i la serie (1.4) appartiene ad L^2 per ogni scelta di segni $+$ o $-$ eppure per nessuna scelta di segni appartiene a L^4.

Il controesempio ci conduce ad una discussione degli insiemi di rappresentazione che sono lacunari nel senso di [3]. Esso dimostra, ad esempio, che l'indipendenza stocastica non è una condizione sufficiente per la lacunarità di un insieme di rappresentazioni i cui gradi siano illimitati.

In effetti in tutto questo lavoro usiamo continuamente le proprietà « lacunari » di insiemi di rappresentazioni di gruppi prodotto, seguendo un metodo che si ispira molto alle tecniche sviluppate in [5].

Questo lavoro è un seguito naturale di [3] e [4] che furono scritti dall'Autore in collaborazione con Daniel Rider. Molti problemi discussi nel presente lavoro furono discussi con Daniel Rider durante la preparazione di [3] e [4].

2. Introduciamo qui la terminologia che sarà usata nel resto del lavoro (cfr. anche [3] e [4]). Sia G un gruppo compatto. Indichiamo con Γ l'insieme delle classi di equivalenza di rappresentazioni unitarie irriducibili di G. Per $\gamma \in \Gamma$, indichiamo con D_γ un elemento rappresentativo della classe γ e con d_γ il grado di γ; in modo tale che per ogni $x \in G$, $D_\gamma(x)$ è un operatore unitario che agisce sullo spazio di Hilbert di dimensione d_γ. Fissata una volta per tutte una base ortonormale nello spazio di Hilbert di dimensione d_γ, possiamo identificare $D_\gamma(x)$ con una matrice unitaria $d_\gamma \times d_\gamma$. Per $f \in L^1(G)$ la serie di Fourier di f sarà data da

$$f \sim \sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma \, Tr\,(A_\gamma \, D_\gamma\,(x)),$$

dove A_γ è una matrice $d_\gamma \times d_\gamma$ definita da

$$A = \int_G f(x)\, D(x^{-1})\, dx,$$

(l'integrazione è rispetto alla misura di Haar di G). Le definizioni seguenti furono date in [3, p. 511].

DEFINIZIONE 2.1 *Sia $E \subseteq \Gamma$, E si chiama un insieme lacunare di ordine $p > 1$ se ogni qualvolta che $f \in L^1(G)$ e $f \backsim \sum_{\gamma \in E} d_\gamma\, Tr(A_\gamma D_\gamma(x))$, ne segue che $f \in L^p$; cioè E è un insieme lacunare di ordine p se*

$$L_E^1 = \{ f \in L^1(G) : f \backsim \sum_{\gamma \in E} d_\gamma\, Tr(A_\gamma D_\gamma(x))\} \subseteq L^p(G).$$

DEFINIZIONE 2.2. *Sia $E \subseteq \Gamma$, E si chiama un insieme di Sidon se ogni qualvolta che f è una funzione continua definita su G e $f \backsim \sum_{\gamma \in E} d_\gamma\, Tr(A_\gamma D_\gamma(x))$ ne segue che $\sum_{\gamma \in E} d_\gamma\, Tr(|A_\gamma|) < \infty$.*

Ricordiamo che $|A_\gamma|$ è la matrice non-negativa che appare nella decomposizione polare di A. Possiamo anche notare che le serie di Fourier che soddisfano $\sum d_\gamma\, Tr(|A_\gamma|) < \infty$ sono esattamente le funzioni continue f dalla forma $f = h * g$, con $h, g \in L^2(G)$ (qui $*$ indica la convoluzione rispetto alla misura di Haar) [3, p. 510].

Useremo anche il fatto che un *insieme di Sidon è un insieme lacunare di ordine p, per ogni $p < \infty$* [3, Corollario 9].

Vogliamo ora stabilire un teorema che è esattamente l'analogo del risultato che è enunciato nel Teorema 3 e Corollario 4 di [4], eccetto che esso è relativo al prodotto infinito di gruppi reali ortogonali, anzichè al prodotto infinito di gruppi unitari.

TEOREMA 2.1. *Sia G un gruppo compatto. Consideriamo la serie di Fourier formale*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma\, Tr(U_\gamma A_\gamma D_\gamma(x)) \tag{2.1}$$

dove A_γ sono matrici $d_\gamma \times d_\gamma$ prefissate e U_γ sono matrici reali ortogonali arbitrarie.

Sia $\mathfrak{G} = \prod_{\gamma \in \Gamma} O(d_\gamma)$ *il prodotto dei gruppi* $O(d_\gamma)$ *di matrici reali ortogonali* $d_\gamma \times d_\gamma$. *Supponiamo che esista un insieme* M *di misura di Haar positiva in* $\mathfrak{G}$ *tale che* (2.1) *sia la serie di Fourier di una funzione integrabile per* $\{U_\gamma\} = U \in M$. *Allora esiste un insieme* N *di misura di Haar nulla in* $\mathfrak{G}$ *tale che, per* $\{U_\gamma\} = U \notin N$, (2.1) *è la serie di Fourier di una funzione appartenente a* $\bigcap_{p<\infty} L^p$.

Osserviamo di nuovo che se G è il cerchio, la serie (2.1) diventa la stessa della serie (1.2). Per dimostrare questo teorema abbiamo bisogno di due lemmi concernenti certe funzioni definite sul prodotto di una famiglia arbitraria di gruppi reali ortogonali.

Sia $\mathfrak{G} = \prod_{i \in I} O(d_i)$, dove I è un insieme di indici arbitrario, $\{d_i\}_{i \in I}$ un insieme di interi positivi (non necessariamente distinti) e $O(d_i)$ il gruppo di matrici ortogonali $d_i \times d_i$. Per ogni $i \in I$ la proiezione naturale D_i di $\mathfrak{G}$ su $O(d_i)$ è una rappresentazione irriducibile di $\mathfrak{G}$, di grado d_i. Indicheremo ancora con I l'insieme delle rappresentazioni irriducibili ottenute in tal modo. Considereremo funzioni F definite su $\mathfrak{G}$ che hanno serie di Fourier del tipo

$$F(V) \sim \sum_{i \in I} d_i \, Tr(A_i D_i(V)) \quad \text{dove} \quad V = \{V_i\} \in \mathfrak{G} \ \text{ e } \ D_i(V) = V_i .$$

LEMMA 2.2. *Il sottoinsieme* I *delle rappresentazioni irriducibili di* $\mathfrak{G}$ *è un insieme di Sidon e perciò un insieme lacunare di ordine* p, *per ogni* $p < \infty$. *Cioè se* $F(V) \sim \sum_{i \in I} d_i \, Tr(A_i D_i(V)) \in L^1(\mathfrak{G})$, *allora* $F(V) \in \bigcap_{p<\infty} L^p(\mathfrak{G})$.

DIMOSTRAZIONE. Sia $F \sim \sum_{i \in I} d_i \, Tr(A_i D_i(V))$ una funzione continua, vogliamo dimostrare che $\sum_{i \in I} d_i \, Tr(|A_i|) < \infty$.

Se F ha valori reali e

$$A_i = \int_{\mathfrak{G}} F(V) D_i(V^{-1}) \, dV = \int_{O(d_i)} F(V) \, V_i^{-1} \, dV_i ,$$

allora le matrici A_i hanno elementi reali, perciò esistono matrici reali ortogonali U_i tali che $A_i U_i$ è non negativa, cioè $A_i U_i = |A_i|$. Sia $U = \{U_i\} \in \mathfrak{G}$, allora $F(U) \sim \sum d_i \, Tr(A_i D_i(U)) = \sum d_i \, Tr(A_i U_i) =$
$= \sum d_i \, Tr(|A_i|)$.

Ora siccome F è continua, per ogni insieme finito $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_n}\}$ di rappresentazioni ed ogni $\varepsilon > 0$, esiste un insieme $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_m}\}$ pure finito, contenente $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_n}\}$, ed esistono numeri $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ tali che $1 - \varepsilon \leq \lambda_j \leq 1$, e

$$\left\| \sum_{j=1}^{m} d_{i_j} \lambda_j \, Tr\,(A_{i_j} D_{i_j}(V)) \right\|_\infty \leq 2 \, \| f \|_\infty ;$$

(si utilizza qui [6, 8.3, 8.4]). Ma allora per la scelta di $\{U_i\}$

$$(1 - \varepsilon) \sum_{j=1}^{m} d_{i_j} \, Tr\,(| A_i |) \leq \left\| \sum_{j=1}^{m} d_{i_j} \lambda_j \, Tr\,(A_{i_j} D_{i_j}(V)) \right\|_\infty \leq 2 \, \| f \|_\infty .$$

siccome $\{D_{i_1}, \dots, D_{i_n}\}$ è un insieme di rappresentazioni finito, ma del tutto arbitrario, otteniamo che $\sum_{i \in I} d_i \, Tr\,(| A_i |) < \infty$.

Siccome ogni funzione continua può essere scritta come combinazione lineare della sua parte reale e della sua parte immaginaria, abbiamo dimostrato che I è un insieme di Sidon. Ora, [3, Corollario 9] ci dice che I è anche un insieme lacunare di ordine p, per ogni $p < \infty$. Questo significa che se $F(V) \in L^1(\mathfrak{G})$ e $F(V) \backsim \sum_{i \in I} d_i \, Tr\,(A_i(V))$, allora $F \in \bigcap_{p < \infty} L^p(\mathfrak{G})$.

Corollario 2.3. *Sia A una matrice reale $n \times n$, s un numero reale $s > 1$. Allora esistono numeri $B(s)$ indipendenti da A e da n, tali che*

$$\int_{O(n)} | Tr\,(A V) |^{2s} \, dV \leq B(s) \, \frac{Tr\,(A A^*)^s}{n^s} . \tag{2.2}$$

Dimostrazione. Poniamo $\mathfrak{G} = \prod_{n=1}^{\infty} O(n)$ e applichiamo il Lemma 2.3, con $I = \{1, 2, \dots\}$, concludendo che

$$L_I^2 = \left\{ f \in L^2(\mathfrak{G}) : f \backsim \sum_{n=1}^{\infty} n \, Tr\,(A_n D_n(V)) \right\} \subseteq L_I^{2s}(\mathfrak{G}),$$

per ogni $s < 1$. Ma siccome la trasformazione inversa di una trasformazione lineare di uno spazio di Banach *su* uno spazio di Banach è continua, esiste $B(s)$ tale che $\|f\|_{2s}^{2s} \leq B(s)\|f\|_2^{2s}$, per ogni $f \in L_I^2$. In particolare se si prende $f(V) = n\, Tr(A_n D_n(V))$, $V \in \mathfrak{G}$, ricordando che $\|f\|_2 = \sqrt{n}\, Tr(A_n A_n^*)^{\frac{1}{2}}$, si ottiene la disuguaglianza (2.2).

Il corollario precedente è l'analogo di [3, Lemma 1]. La disuguaglianza (2.2) potrebbe essere soddisfatta da gruppi di matrici diversi dal gruppo unitario e da quello ortogonale reale. Per questa ragione, anche se una dimostrazione più diretta potrebbe essere data, dimostreremo il lemma che segue usando solo (2.2) ed il fatto che la applicazione identica di $O(d_i)$ su se stesso è una rappresentazione irriducibile (cfr. l'osservazione dopo la dimostrazione del Teorema 2.6).

Lemma 2.4. *Dato un insieme $M \subseteq \prod_{i \in I} O(d_i)$ di misura di Haar positiva e dato $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito $I_0 \subseteq I$ (che dipende da M e da ε) tale che se*

$$F(V) = \sum_{i \notin I_0} d_i\, Tr(A_i D_i(V)) \in L^2(\mathfrak{G}),$$

allora

$$m(M) \int_{\mathfrak{G}} |F(V)|^2\, dV \leq (1+\varepsilon) \int_{\mathfrak{G}} |F(V)|^2\, dV.$$

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare il teorema per una funzione F a valori reali. Possiamo perciò supporre che A_i siano matrici con elementi reali. Facciamo innanzi tutto le seguenti osservazioni:

(i) per $i \neq j$, $D_i \otimes D_j$ è irriducibile; se $D_i \otimes D_j = D_h \otimes D_k$, con $h \neq k$ allora o $i = h$ e $j = k$, oppure $i = k$ e $j = h$.

(ii) il numero delle componenti irriducibili di $D_i \otimes D_i$ è limitato indipendentemente da i; una delle componenti irriducibili è l'identità e ciascuna delle componenti di $D_i \otimes D_i$ diverse dall'identità non è equivalente a $D_h \otimes D_k$, $h \neq k$ o a una componente irriducibile di $D_j \otimes D_j\, (i \neq j)$.

Per dimostrare (i) osserviamo che

$$\int_{\mathfrak{G}} | \, Tr\,(D_i \otimes D_j(V)) \, |^2 \, dV = \int_{O(d_i)\times O(d_j)} Tr\,(D_i(V))^2 \; Tr\,(D_j(V))^2 \, dV_i \, dV_j =$$

$$= \int_{O(d_i)} Tr\,(D_i(V))^2 \, dV_i \cdot \int_{O(d_j)} Tr\,(D_j(V))^2 \, dV_j = 1$$

perciò $D_i \otimes D_j$ ha soltanto una componente irriducibile.

D'altra parte se uno degli indici i, j, h, k, è differente da tutti gli altri, ad es. i è differente dagli altri indici, allora

$$\int_{\mathfrak{G}} Tr\,(D_i \otimes D_j(V)) \; Tr\,(D_h \otimes D_k(V) \, dV =$$

$$= \int_{O(d_i)} Tr\,(D_i(V)) \, dV_i \cdot \int_{\mathfrak{G}} Tr\,(D_j(V)) \; Tr\,(D_h \otimes D_k(V)) \, dV = 0,$$

perciò se $D_i \otimes D_j = D_h \otimes D_k$ con $i \neq j$ e $h \neq k$, deve essere o $i = h$ e $i = k$, oppure $i = k$ e $j = h$.

Per dimostrare (ii) notiamo che il numero delle componenti irriducibili di $D_i \otimes D_i$ è dato da

$$\int_{\mathfrak{G}} Tr\,(D_i \otimes D_i(V))^2 \, dV = \int_{O(d_i)} | \, Tr\,(D_i(V)) \, |^4 \, dV_i \, .$$

Applicando il Corollario 2.3 con $s = 2$ all'integrale a destra del segno di uguaglianza si trova che questo integrale è limitato da $B(2)$. Se una delle componenti irriducibili di $D_i \otimes D_i$ è equivalente a $D_h \otimes D_k$, $h \neq k$, allora

$$0 \neq \int_{\mathfrak{G}} Tr\,(D_i(V))^2 \; Tr\,(D_h(V)) \; Tr\,(D_k(V)) \, dV,$$

ma siccome $h \neq k$ dobbiamo avere $h \neq i$ o $k \neq i$.

Supponiamo che $h \neq i$, allora l'integrale è uguale a

$$\int\limits_{O(d_h)} Tr(D_h))\, dV_h \cdot \int\limits_{\mathfrak{G}} Tr(D_i(V))^2\, Tr(D_k(V))\, dV = 0.$$

Analogamente se $k \neq i$, l'integrale è uguale a

$$\int\limits_{O(d_k)} Tr(D_k(V))\, dV_k \cdot \int\limits_{\mathfrak{G}} Tr(D_i(V))^2\, Tr(D_h(V))\, dV = 0.$$

Concludiamo che nessuna componente irriducibile di $D_i \otimes D_i$ è equivalente a $D_h \otimes D_k$. Per completare la dimostrazione di (ii), notiamo che l'identità appare una volta come una delle componenti irriducibili di $D_i \otimes D_i$. Indichiamo con $E(i)$ l'insieme delle altre componenti irriducibili; se $E(i)$ e $E(j)$ contengono rappresentazioni equivalenti, allora

$$0 \neq \int\limits_{\mathfrak{G}} [Tr(D_i(V))^2 - 1]\,[Tr(D_j(V))^2 - 1]\, dV \tag{2.3}$$

$$= \int\limits_{\mathfrak{G}} Tr(D_i(V))^2\, Tr(D_j(V))\, dV - 1\,;$$

ma se $i \neq j$ quest'ultimo integrale è

$$\int\limits_{O(d_i)} Tr(D_i(V))^2\, dV_i \int\limits_{O(d_j)} Tr(D_j(V))^2\, dV_j = 1,$$

e da questo concludiamo che la (2.3) non può valere.

Ora $Tr(A_i D_i(V))$ e $Tr(A_j D_j(V))$ giacciono nei sottospazi invarianti generali da $Tr(D_i(V))$ e $Tr(D_j(V))$; perciò, se $i \neq j$

$$Tr(A_i D_i(V))\, Tr(A_j D_j(V)) = Tr(A_{i,j} D_{i,j}(V)), \tag{2.4}$$

dove $D_{i,j} = D_i \otimes D_j$, $d_{i,j}$ è il grado di $D_{i,j}$ e $A_{i,j}$ è una matrice

$d_{i,j} \times d_{i,j}$. D'altra parte, se $i = j$,

$$(2.5) \qquad Tr\,(A_i D_i(V))^2 = \frac{1}{d_i} Tr\,(A_i A_i^*) + \sum_{D_\alpha \in E(i)} Tr\,(A_\alpha D_\alpha(V))$$

dove $D_i \otimes D_i = I + \sum_{D_\alpha \in E(i)} D_\alpha$ è la decomposizione di $D_i \otimes D_i$ in componenti irriducibili e A_α è una matrice $d_\alpha \times d_\alpha$ con d_α il grado di D_α (le rappresentazioni di $E(i)$ si intendono contate con la loro molteplicità). Se M è un sottoinsieme di $\mathfrak{G}$ di misura positiva, allora la sua funzione caratteristica χ_M ha uno sviluppo in $L^2(\mathfrak{G})$, che, in forza di (i) e (ii), possiamo scrivere come:

$$(2.6) \qquad \chi_M(V) = \sum d_{i,j}\, Tr\,(B_{i,j} D_{i,j}(V)) +$$

$$+ \sum_i \sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha\, Tr\,(B_\alpha D_\alpha(V)) + \sum_\beta d_\beta\, Tr\,(B_\beta D_\beta(V))$$

dove $\{D_\beta\}$ è l'insieme delle rappresentazioni di $\mathfrak{G}$ che non sono né equivalenti a una delle rappresentazioni $D_{i,j} = D_i \otimes D_j$ nè a un membro di $\bigcup_i E(i)$.

Dalla formula di Schur-Peter-Weyl otteniamo, usando (i) e (ii)

$$\sum_{i \neq j} d_{i,j}\, Tr\,(B_{i,j} B_{i,j}^*) + \sum_i \sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha\, Tr\,(B_\alpha B_\alpha^*) \leq m(M);$$

perciò, siccome il numero degli elementi di $E(i)$ è limitato, dato $\varepsilon > 0$ esiste un insieme finito $I_0 \subseteq I$, tale che

$$(2.7) \qquad \sum_{i,j \notin I_0} d_{i,j}\, Tr\,(B_{i,j} B_{i,j}^*) + \sum_{i \notin I_0} \sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha\, Tr\,(B_\alpha B_\alpha^*) < \varepsilon^2.$$

Supponiamo ora che

$$F(V) = \sum_{i \notin I_0} d_i\, Tr(A_i D_i(V)) \in L^2(\mathfrak{G}),$$

allora

$$F(V) = \sum_{i,j \notin I_0} d_i d_j \, Tr\,(A_i D_i(V))\, Tr\,(A_j D_j(V)) =$$

$$= \sum_{i \notin I_0} d_i^2 \, Tr\,(A_i D_i(V))^2 + 2 \sum_{\substack{i,j \notin I_0 \\ i \neq j}} d_i d_j Tr\,(A_i D_i(V))\, Tr\,(A_j D_j(V))$$

$$= \sum_{i \notin I_0} d_i \, Tr\,(A_i A_i^*) + \sum_{i \notin I_0} d_i^2 \,(\sum_{D_\alpha \in E(i)} Tr\,(A_\alpha D_\alpha(V))) +$$

$$+ \sum_{i \neq j} d_i d_j \, Tr\,(A_{i,j} D_{i,j}(V)).$$

Poniamo $F_i(V) = \sum_{D_\alpha \in E(i)} Tr\,(A_\alpha D_\alpha(V))$, allora, per (ii) F_i e F_j sono ortogonali quando $i \neq j$ e F_i è ortogonale a $Tr\,(D_{h,k}(V))$ per tutti gli h e k. Perciò

$$\int_M F(V)^2 \, dV = \int_{\mathfrak{G}} F(V)^2 \chi_M(V)\, dV = \tag{2.8}$$

$$= m(M) \sum_{i \notin I_0} d_i \, Tr\,(A_i A_i^*) + \sum_{i \notin I_0} d_i^2 \int_{\mathfrak{G}} F_i(V) \sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha \, Tr\,(B_\alpha D_\alpha(V))\, dV$$

$$+ 2 \sum_{\substack{i,j \notin I_0 \\ i \neq j}} d_i d_j d_{i,j} \int_{\mathfrak{G}} Tr\,(A_{i,j} D_{i,j}(V))\, Tr\,(B_{i,j} D_{i,j}(V))\, dV.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder si ottiene :

$$\left| \int_{\mathfrak{G}} F_i(V) \sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha \, Tr\,(B_\alpha D_\alpha(V))\, dV \right| \tag{2.9}$$

$$\leq \left\{ \int_{\mathfrak{G}} F_i(V)^2 \, dV \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \sum_{D_\alpha \in E(i)} \int_{\mathfrak{G}} | d_\alpha \, Tr\,(B_\alpha D_\alpha(V))|^2 \, dV \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dalle (2.5) si deduce che

$$F_i(V) = Tr\,(A_i D_i(V))^2 - \frac{1}{d_i}\,Tr\,(A_i A_i^*),$$

perciò

$$\int_{\mathfrak{G}} F_i(V)^2\,dV \leq 2\int_{\mathfrak{G}} Tr\,(A_i D_i(V))^4\,dV + \frac{2}{d_i^2}\,Tr\,(A_i A_i^*)^2$$

$$= \frac{2\,B(2)}{d_i^2}\,Tr\,(A_i A_i^*)^2 + \frac{2}{d_i^2}\,Tr\,(A_i A_i^*)^2 \leq C\,\frac{Tr\,(A_i A_i^*)^2}{d_i^2},$$

dove la seconda disuguaglianza segue dal Corollario 2.3. Pertanto il primo membro di (2.9) è maggiorato da

$$C\,\frac{Tr\,(A_i A_i^*)}{d_i}\Big(\sum_{D_\alpha \in E(i)} Tr\,(B_\alpha B_\alpha^*)\Big)^{\frac{1}{2}};$$

ne segue che il secondo membro di (2.8) è maggiorato da

$$C\Big[\sum_{i \notin I_0} d_i\,Tr\,(A_i A_i^*)\Big]\Big[\sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha\,Tr\,(B_\alpha B_\alpha^*)\Big]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$C \sup_{i \notin I_0}\Big[\sum_{D_\alpha \in E(i)} d_\alpha\,Tr\,(B_\alpha B_\alpha^*)\Big]^{\frac{1}{2}} d_i\,Tr(A_i A_i^*) \leq$$

$$C\cdot\varepsilon\cdot\int_{\mathfrak{G}} F(V)^2\,dV,$$

dove l'ultima disuguaglianza segue da (2.7).

D'altra parte, utilizzando la disuguaglianza di Hölder e (2.4) si ottiene che

$$\int_{\mathfrak{G}} |\,Tr(A_{i,j} D_{i,j}(V))\,Tr(B_{i,j} D_{i,j}(V))\,|\,dV \leq \Big[\int_{\mathfrak{G}} |\,Tr\,(B_{i,j} D_{i,j}(V))\,|^2\,dV\Big]^{\frac{1}{2}}\cdot$$

$$\cdot\Big[\int_{O(d_i)} |\,Tr\,(A_i D_i(V))\,|^4\,dV\cdot\int_{O(d_j)} |\,Tr\,(A_j D_j(V))\,|^4\,dV\Big]^{\frac{1}{4}},$$

e, usando il Corollario 2.3 ancora una volta troviamo che la terza somma in (2.8) è maggiorata da

$$2B(2) \sum_{\substack{i,j \notin I_0 \\ i \neq j}} [d_{i,j}\, Tr\,(B_{i,j}\, B^*_{i,j})\, d_i\, Tr\,(A_i\, A_i^*)\, d_j\, Tr\,(A_j\, A_j^*]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2B(2)\,[\sum_{i,j \notin I_0} d_{i,j}\; Tr\,(B_{i,j}\, B^*_{i,j})]^{\frac{1}{2}}\,[\sum_{i \neq I_0} d_i\, Tr\,(A_i\, A_i^*)\, d_j\, Tr\,(A_j\, A_j^*)]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq 2B(2)\cdot \varepsilon \cdot \sum_{i \notin I_0} d_i\, Tr\,(A_i\, A_i^*) = 2B(2)\cdot \varepsilon \cdot \int_{\mathfrak{G}} F(V)^2\, dV.$$

Pertanto si ha:

$$\left| \int_{\mathfrak{G}} F(V)^2\, dV - m(M) \int_{\mathfrak{G}} F(V)^2\, dV \right| \leq \varepsilon \cdot C \cdot \int_{\mathfrak{G}} |\, F(V)\,|^2\, dV$$

ed il lemma è dimostrato.

Dimostrazione del Teorema 2.1. Ragionando come nella dimostrazione di [4, Teorema 3], possiamo usare il Lemma 2.4 ed il risultato di Edwards e Hewitt [2], citato in [4, Lemma 2], per ottenere, dalle ipotesi, che $\sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma\, Tr(A_\gamma\, A_\gamma^*) < \infty$. A questo punto possiamo usare il Lemma 2.3 per dimostrare come si fa in [3, Teorema 4] e [4, Corollario 4] che (2.1) appartiene a $\bigcap_{p<\infty} L^p$ eccetto per $V \in N$ con $m(N) = 0$.

Possiamo ora passare al teorema principale:

Teorema 2.6. *Sia G un gruppo compatto e Γ l'insieme delle classi di equivalenza delle rappresentazioni irriducibili di G. Sia $\{X_\gamma(\omega)\}$, per $\gamma \in \Gamma$, un insieme di variabili aleatorie indipendenti tra loro a valori nello spazio delle matrici $d_\gamma \times d_\gamma$. Supponiamo che, per ogni matrice ortogonale reale $U_\gamma \in O(d_\gamma)$, X_γ e $U_\gamma X_\gamma$ abbiano la stessa distribuzione di probabilità. Allora la serie di Fourier aleatoria*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma\, Tr\,(X_\gamma\, D_\gamma\,(x)), \tag{2.10}$$

appartiene a L^1 *con probabilità positiva solo se appartiene a* $\bigcap_{p<\infty} L^p$ *con probabilità uguale a uno.*

DIMOSTRAZIONE. Poniamo $\mathfrak{G} = \prod_{\gamma \in \Gamma} O(d_\gamma)$ e consideriamo la serie $f(U, \omega, x) = \sum_{\gamma \in \Gamma} d_\gamma \, Tr\,(U_\gamma X_\gamma(\omega) D_\gamma(x))$, $U = \{U_\gamma\} \in \mathfrak{G}$, $\omega \in \Omega$, $x \in G$. Siccome per ogni $U \in \mathfrak{G}$, $U_\gamma X_\gamma$ ha la stessa distribuzione di probabilità di X_γ, le ipotesi implicano che per ogni $U \in \mathfrak{G}, f(U, \omega, x) \in L^1(G)$ con probabilità positiva (rispetto a ω).

Un'applicazione del teorema di Fubini porge che $f(U, \omega, x) \in L^1(G)$, con probabilità positiva rispetto allo spazio di probabilà $\mathfrak{G} \times \Omega$; sia $P = \{U, \omega) : f(U, \omega, x) \in L^1(G)\}$; poniamo $P_\omega = \{U : f(U, \omega, x) \in L^1\}$, allora, con probabilità positiva, P_ω ha misura positiva in $\mathfrak{G}$. Pertanto per il Teorema 2.1, con probabilità positiva $\sum d_\gamma \, Tr\,(X_\gamma X_\gamma^*) < \infty$.

Ma, poichè $Tr\,(X_\gamma X_\gamma^*)$, per $\gamma \in \Gamma$, formano un insieme di variabili aleatorie indipendenti, un'applicazione della « zero-one law » [8. Sec. 15, p. 229] porge che $\sum d_\gamma \, Tr\,(X_\gamma X_\gamma^*) < \infty$ con probabilità uno. Questo implica che, con probabilità uno, P_ω ha misura uno in $\mathfrak{G}$ e, applicando ancora il Teorema 2.1, con probabilità uno $f(U, \omega, x) \in \in \bigcap_{p<\infty} L^p$, per quasi ogni $U \in \mathfrak{G}$.

Perciò esiste almeno un $U = \{U_\gamma\} \in \mathfrak{G}$ tale che $f(U, \omega, x) \in \bigcap_{p<\infty} L^p$, con probabilità uno. Ma siccome $U_\gamma X_\gamma$ e X_γ hanno la stessa distribuzione di probabilità, $f(\omega, x) \sim \sum d_\gamma \, Tr\,(X_\gamma(\omega) D_\gamma(x)) \in \bigcap_{p<\infty} L^p$, con probabilità uno.

OSSERVAZIONE. Usando il Corollario 4 di [4] invece del Teorema 2.1, si può ottenere la conclusione del Teorema 2.6 con una ipotesi differente sulle X_γ e ciò che le X_γ siano simmetriche rispetto al gruppo $\mathfrak{U}(d_\gamma)$ di matrici complesse unitarie $d_\gamma \times d_\gamma$; cioè che per ogni $U_\gamma \in \mathfrak{U}(d_\gamma)$, $U_\gamma X_\gamma$ e X_γ abbiano la stessa distribuzione di probabilità.

Più in generale, sia G_γ un sottogruppo compatto di $\mathfrak{U}(d_\gamma)$; potremo chiederci con quali ipotesi su G_γ, la condizione di simmetria rispetto a $O(d_\gamma)$ enunciata nel Teorema 5.6, possa essere sostituita con una condizione di simmetria rispetto a G_γ. Nella sezione seguente daremo un esempio di gruppi compatti non banali G_γ che non possono avere il ruolo che $O(d_\gamma)$ ha nel Teorema 2.6. Supponiamo tuttavia che G_γ siano sottogruppi compatti di $\mathfrak{U}(d_\gamma)$ che soddisfano:

$a)$ la rappresentazione identica $D_\gamma : G_\gamma \longrightarrow G_\gamma$ è una rappresentazione irriducibile di G_γ di grado d_γ

$$b) \qquad \int_{G_\gamma} | Tr(A_\gamma D_\gamma(V_\gamma)) |^{2s} \, dV_\gamma \leq \frac{B(s)}{d_\gamma^s} Tr(A_\gamma A_\gamma^*)^s,$$

per ogni $s > 1$, e per ogni matrice A_γ $d_\gamma \times d_\gamma$, con $B(s)$ una costante che dipende solo da s.

$$c) \qquad \int_{G_\gamma} Tr(D(V_\gamma))^m \, \overline{Tr(D_\gamma(V_\gamma)^n} \, dV_\gamma = 0$$

a meno che non si abbia $Tr(D_\gamma(V_\gamma))^m = Tr(D_\gamma(V_\gamma))^n$.

Allora le conclusioni del Teorema 2.6 sussistono per variabili indipendenti X_γ che siano simmetriche rispetto a G_γ. Una dimostrazione può essere ottenuta considerando il gruppo $\mathfrak{G} = \prod_{\gamma \in \Gamma} G_\gamma$; e, rispetto a questo gruppo, dimostrando risultati analoghi al Lemma 2.2 e al Lemma 2.4. Infatti la dimostrazione data qui del Lemma 2.4 usa soltanto $a)$ e $b)$ insieme alla indipendenza delle applicazioni proiettanti $\Pi\, O(d_\gamma)$ su $O(d_\gamma)$. Lemma 2.2 è dimostrato in questo lavoro in maniera differente, ma il suo analogo per il gruppo G_γ può essere dimostrato usando $a)$, $b)$ e $c)$ esattamente come nella dimostrazione di [3, Lemma 3]. Una volta stabiliti i risultati che corrispondono al Lemma 2.2 e al Lemma 2.4 per $\Pi\, G_\gamma$, è facile dimostrare l'analogo del Teorema 2.1, dal quale si può ottenere il risultato desiderato.

3. Per $n = 1, 2 \ldots$, sia G_n il gruppo delle matrici $n \times n$ che si ottengono permutando le righe di una matrice diagonale con elementi ± 1 sulla diagonale principale. Così un elemento V di G_n è una matrice che è zero dappertutto eccetto per gli elementi $v_{1i_1}, v_{2i_2}, \ldots$ $\ldots v_{ni_n} = \pm 1$, con $(i_1, \ldots, i_n)$ una permutazione arbitraria dei primi n interi positivi.

Il gruppo G_n contiene $2^n n!$ elementi. Ogni $V \in G_n$ è una matrice unitaria e la rappresentazione identica di G_n su se stesso è una rappresentazione irriducibile di grado n. Poniamo $G = \prod_{n=1}^{\infty} G_n$ e indichiamo con D_n la rappresentazione irriducibile del gruppo compatto G, ottenuta proiettando G sopra G_n.

LEMMA 3.1. *L'insieme* $\{D_n\}$ *di rappresentazione di* G *non è un insieme lacunare di ordine quattro. A fortiori non è un insieme di Sidon.*

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo viceversa che $E = \{D_n\}$ sia un insieme lacunare di ordine quattro. Allora se $f(x) \backsim \sum_{n=1}^{\infty} n\, Tr(A_n D_n(x)) \in L^2$, si ha che $f \in L^4$.

Perciò, poichè l'inverso di un operatore lineare e continuo da uno spazio di Banach sopra un altro spazio di Banach, è continuo esiste un numero B tale che se $f \backsim \sum n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x)) \in L^2$, allora $\|f\|_4^2 \leq B\, \|f\|_2^2$. In particolare se $f = n\; Tr\,(A_n\, D_n\,(x))$ dobbiamo avere

$$\int_G |\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x))\, |^4\, dx \leq B\, \frac{Tr\,(A_n\, A_n^*)^2}{n^2}. \tag{3.1}$$

Questa disuguaglianza deve allora valere per ogni n e per ogni matrice A_n a n righe e n colonne. Ma per definizione di D_n e G_n,

$$\int_G |\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x))\, |^4\, dx = \frac{1}{2^n\, n\,!} \sum_{V \in G} |\, Tr\,(A_n\; V\,)\, |^4,$$

dove V è una matrice variabile di G_n. Poniamo $A_n = (a_{ij})$ e scegliamo $a_{ij} = 0$, eccetto che per $a_{11} = 1$; allora

$$\frac{1}{2^n\, n\,!} \sum_{V \in G_n} |\, Tr\,(A_n\; V\,)\, |^4 = \frac{1}{2^n\, n\,!} \sum_{V \in G_n} v_{11}^4$$

dove $V = (v_{ij})$. Ora al variare di V in G_n, v_{11}^4 può essere solo o zero o uno. Il numero degli elementi di G_n che hanno un elemento diverso da zero nella casella (1,1) è $2^n\,(n - 1)\,!$. Ne segue che

$$\int_G |\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x))\, |^4\, dx = \frac{1}{2^n\, n\,!} \sum_{V \in G_n} v_{11}^4 = \frac{1}{n};$$

d'altra parte, con la stessa scelta di A_n, $Tr\,(A_n A_n^*)^2 = 1$. Perciò la (3.1) non può sussistere per ogni n con lo stesso B. Questo dimostra che $\{D_n\} = E$ non è un insieme lacunare di ordine quattro.

L'ultima affermazione del teorema segue allora da [3, Corollario 9].

COROLLARIO 3.2. *Esiste una serie*

$$\Sigma\, n\, Tr\,(X_n\, D_n\,(x)), \quad x \in G \tag{3.2}$$

dove X_n sono matrici aleatorie $n \times n$, indipendenti, simmetriche rispetto a G_n, tali che (3.2) *appartiene a L^2 con probabilità uno, ma appartiene a L^4 con probabilità zero.*

DIMOSTRAZIONE. Sia $\Omega = \prod_{n=1}^{\infty} G_n = G$. Il Lemma 3.1 ci permette di scegliere matrici $n \times n$ A_n, tali che $\Sigma\, n\, Tr\,(A_n A_n^*) < \infty$ e $\Sigma\, n\, Tr\,(A_n D_n\,(x)) \notin L^4$. Siano ora $X_n\,(\omega) = X_n\,(V) = V_n A_n$, dove $V_n = D_n\,(V)$, per $V \in G \equiv \Omega$.

Siccome $\Sigma\, n\, Tr\,(X_n X_n^*) = \Sigma_n\, Tr\,(A_n A_n^*) < \infty$, (3.2) appartiene a L^2 per ogni V. Supponiamo ora che per una certa scelta di $V_n \in G_n$, si abbia $\Sigma n\, Tr\,(V_n A_n D_n\,(x)) \in L^4$, allora, ponendo $\{V_n^{-1}\} = = y \in G$, abbiamo che $\Sigma n\, Tr\,(A_n D_n\,(x)) = \Sigma\, n\, Tr\,(V_n A_n D_n\,(x)\; V_n^{-1}) = = \Sigma n\, Tr\,(V_n A_n D_n\,(xy)) \in L^4$; ma per ipotesi $\Sigma n\, Tr\,(A_n D_n\,(x)) \notin L^4$ e il Corollario è dimostrato.

COROLLARIO 3.3. *Esiste $f \in L^2\,(G)$ con serie di Fourier $f \backsim \backsim \Sigma\, n\,$*Tr* $(A_n D_n\,(x))$ tale che per nessuna scelta di $\varepsilon_n \pm 1$ si abbia $\Sigma\, n\, \varepsilon_n\, Tr\,(A_n D_n\,(x)) \in L^4$.*

DIMOSTRAZIONE. Come nella dimostrazione del Corollario 3.2 esiste $f \backsim \Sigma\, n\, Tr\,(A_n D_n\,(x)) \in L^2$ tale che $f \in L^4$. Se per una scelta dei valori $\varepsilon_n \pm 1$ si avesse $\Sigma\, n\, \varepsilon_n\, Tr\,(A_n D_n\,(x)) \in L^4$ allora ponendo $y = \{\varepsilon_n I_n\} \in G$ (I_n è la matrice identità $n \times n$), si avrebbe anche $\Sigma\, n \cdot Tr\,(A_n D_n\,(x)) = \Sigma\, n\, \varepsilon_n\, Tr\,(A_n D_n\,(xy) \in L^4$ contrariamente alle nostre ipotesi.

Un risultato un pò più forte può essrre ottenuto utilizzando un teorema di G. Seever:

COROLLARIO 3.4. *Esiste* $f \in L^2(G)$, $f \sim \Sigma\, n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x))$ *tale che se* $\{a_n\}$ *è una successione di numeri complessi che soddisfa* $\Sigma\, n\, a_n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x)) \in L^4$, *allora* $\min \lim |\, a_n\,| = 0$, *in particolare se* $|\, a_n\,| = 1$, $\Sigma\, n\, a_n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x)) \notin L^4$.

DIMOSTRAZIONE. Supponiamo che $\min \lim |\, a_n\,| \neq 0$. Senza mancare di generalità possiamo supporre che $|\, a_n\,| \geq \delta > 0$. Sia $f \sim \Sigma\, n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x)) \in L^2$, $f \notin L^4$. Sia $\mathfrak{B}$ il sottospazio lineare di l^∞ definito come $\mathfrak{B} = \{\{b_n\} \in l^\infty : \Sigma\, n\, b_n\, a_n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x)) \in L^4\}$. Allora $\mathfrak{B}$ è uno spazio di Banach rispetto alla norma $\|\,\{b_n\}\,\| = \sup\limits_n |\, b_n\,| + \|\,\Sigma\, n\, b_n\, a_n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x))\,\|_4$. Inoltre contiene tutte le successioni $\varepsilon_n = \pm 1$ perchè, per il ragionamento fatto nel dimostrare il Corollario 3.3 se $\Sigma\, n\, a_n\, Tr\,(A_n\, D_n\,(x)) \in L^4$, vi appartiene anche $\Sigma\, n \varepsilon_n a_n \cdot (Tr\, A_n\, D_n\,(x))$ per ogni successione $\varepsilon_n = \pm 1$. Un sottospazio di Banach di l^∞ che contiene tutte le successioni $\varepsilon_n = \pm 1$ deve essere tutto l^∞, per un risultato di Seever [9] (cfr. anche [1, Teorema 4.1]. Ne segue che $\{1/a_n\} \in \mathfrak{B}$ perchè $|\, 1/a_n\,| \leq |1/\delta\,|$; questo significa che $f \in L^4$ contrariamente alle nostre ipotesi.

L'insieme $E = \{D_n\}$ è un insieme indipendente di rappresentazioni di G, nel senso che $D_n\,(x)$ sono variabili aleatorie, a valori matrici, indipendenti quando si consideri G come uno spazio di probabilità. Per conseguenza i caratteri $Tr\,(D_n\,(x))$ di queste rappresentazioni sono anche indipendenti. Nel caso commutativo un insieme di caratteri indipendenti (nel senso equivalente di indipendenza gruppale e stocastica) è sempre un insieme di Sidon e quindi un insieme lacunare di ordine p, per ogni $p < \infty$. L'esempio di $E = \{D_n\}$ illustra quanto differente possa essere la situazione per un gruppo non commutativo.

BIBLIOGRAFIA

[1] W. BADÉ e P. C. CURTIS Jr, *Embedding theorems for commutative Banach algebras,* Pac. Journ. of Math., 18, (1966), pp. 391-409.

[2] R. E. EDWARDS e E. HEWITT, *Pointwise limits for sequences of convolution operators,* Acta Math., 133, (1966), pp. 181-217.

[3] A. FIGÀ-TALAMANCA e D. RIDER, *A theorem of Littlewood and lacunary series for compact groups,* Pac. Journ. of Math., 16, (1966), pp. 505-514.

[4] A. FIGÀ-TALAMANCA e D. RIDER, *A theorem on random Fourier series on noncommutative groups,* Pac. Journ. of Math., 21, (1967), pp. 487-492.

[5] HELGASON S., *Topologies of group algebras and a theorem of Littlewood,* Trans. Amer. Mat. Soc., 86, (1957), 269-283.

[6] E. HEWITT e H. S. ZUCKERMAN, *Some theorems on lacunary Fourier series with extensions to compact groups,* Trans. Amer. Math. Soc. 93, (1959), pp. 1-19

[7] KAHANE J. P., *Series de Fourier aléatoires,* Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1963.

[8] LOÈVE M., *Probability theory,* D. van Nostrand, Princeton, 1963.

[9] SEEVER G., *Measures on F-spaces,* Thesis, University of California, Berkeley 1963.

[10] ZYGMUND A., *Trigonometric series,* Cambridge Univ. Press, Cambridge 1959.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 ottobre 1967.