RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

Sui gruppi finiti privi di sottogruppi supersolubili non speciali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 291-295

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__291_0>

SUI GRUPPI FINITI PRIVI DI SOTTOGRUPPI SUPERSOLUBILI NON SPECIALI

FRANCO NAPOLITANI *)

Iwasawa e Schmidt [4] [5] hanno dimostrato che un gruppo finito che ha tutti i sottogruppi propri speciali è un gruppo risolubile. Tale risultato è stato poi generalizzato da Huppert [3] che ha provato la risolubilità di un gruppo finito nel caso in cui tutti i sottogruppi propri del gruppo siano supersolubili. Da questi risultati segue facilmente che è sufficiente, perchè un gruppo finito sia risolubile, supporre che siano speciali tutti i suoi sottogruppi risolubili, o supporre la condizione ancor meno restrittiva che tali sottogruppi siano supersolubili.

Risulta quindi naturale, restando nello stesso ordine di idee, chiedersi se sia risolubile un gruppo finito in cui ogni sottogruppo supersolubile è speciale.

Nella presente nota si prova che un siffatto gruppo è effettivamente risolubile. Questo risultato è equivalente, come risulterà dal contesto, al fatto che un gruppo finito è risolubile allorchè in esso non vi sono sottogruppi non abeliani che sono *gruppi di Zassenhaus* (cioè gruppi a sottogruppi di Sylow ciclici).

1. — Ricordiamo che un gruppo G dicesi supersolubile se possiede una catena di sottogruppi, ciascuno normale in G,

$$G = G_0 \supseteq G_1 \supseteq \dots \supseteq G_r = 1$$

a quozienti G_{i-1}/G_i ciclici $(i = 1, 2, \dots, r)$.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matem. del C. N. R. .

Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico, Università, Padova.

LEMMA 1. *Un gruppo finito G che contenga un sottogruppo di Sylow ciclico (relativo ad un divisore primo p del suo ordine) e che sia privo di sottogruppi supersolubili non speciali, non è semplice non abeliano.*

DIM: Se G è un p-gruppo, G è abeliano. Supposto G di ordine composto, siano P un p-sottogruppo di Sylow ciclico di G e $\mathcal{N}_G(P)$ il normalizzante di P in G. Ogni elemento $c \in \mathcal{N}_G(P)$ si decompone in un prodotto $c_1 \cdot c_2$ con $c_1 \in P$ e $(|\langle c_2 \rangle|, |P|) = 1$. Il sottogruppo $P \cdot \langle c_2 \rangle$ di G è supersolubile, dunque speciale, sicchè c_2 centralizza P. Poichè anche c_1 centralizza P, l'arbitrarietà di $c \in \mathcal{N}_G(P)$ assicura che P è nel centro di $\mathcal{N}_G(P)$ e quindi per un teorema di Burnside P ha complemento normale. Pertanto G non è semplice.

LEMMA 2. *I seguenti gruppi contengono un sottogruppo di Sylow ciclico:*

a) $PSL(2, q^m)$, q primo;
b) $PSL(3, 3)$;
c) gruppi di Suzuki.

DIM: *a*) il gruppo proiettivo unimodulare $PSL(2, q^m)$, con q primo ed $m > 1$ se $q = 3$ [1]), ha ordine $\frac{q^m(q^{2m}-1)}{2\,;\,1}$ ($2\,;\,1$ secondo che $q > 2$; $q = 2$) e contiene sia un sottogruppo ciclico di ordine $\frac{q^m-1}{2\,;\,1}$ che un sottogruppo ciclico di ordine $\frac{q^m+1}{2\,;\,1}$ [1]. Segue da ciò che è sufficiente, perchè $PSL(2, q^m)$ contenga un sottogruppo di Sylow ciclico, che esista un primo $p > 2$ che divida soltanto uno dei numeri $\frac{q^m+1}{2\,;\,1}$ e $\frac{q^m-1}{2\,;\,1}$.

Che esista un primo $p > 2$ che divida almeno uno dei due numeri precedenti è evidente. È sufficiente dunque mostrare che $p > 2$

---

[1]) La dimostrazione in corso non è valida per $PSL(2, 3)$. Ma questo è un caso banale; $PSL(2, 3)$ ha infatti ordine 12.

non può dividerli entrambi. Infatti, se ciò accadesse, p dovrebbe dividere la differenza di tali numeri cioè $\frac{2}{2;1}$.

b) Evidente ove si osservi che l'ordine di $PSL(3,3)$ è $2^4 \cdot 3^3 \cdot 13$.

c) Un gruppo di Suzuki $Sz(s)$, $s = 2^m$ ($m > 1$ dispari), ha ordine $2^{2m}(2^m - 1)(2^{2m} + 1)$ e tra i suoi sottogruppi vi è un gruppo di Frobenius il cui fattore complementare ha ordine $2^m - 1$ ([6], pag. 137). Poichè per un teorema di Burnside-Zassenhaus [8] il fattore complementare di un gruppo di Frobenius è un gruppo di Zassenhaus se d'ordine dispari, è sufficiente provare che $(2^m - 1, 2^{2m} + 1) = 1$ per concludere che $Sz(s)$ ha un sottogruppo di Sylow ciclico. Invero se un primo $p \neq 2$ dividesse sia $2^m - 1$ che $2^{2m} + 1$, esso dividerebbe la loro somma $2^m(2^m + 1)$ e quindi $2^m + 1$: il che è assurdo.

LEMMA 3. *Sia G un gruppo finito privo di sottogruppi supersolubili non speciali. Allora*

i) *ogni sottogruppo H di G è privo di sottogruppi supersolubili non speciali;*

ii) *se N è normale in G, G/N è privo di sottogruppi supersolubili non speciali.*

DIM: La i) essendo evidente proviamo la ii). Se questa proposizione fosse falsa, dovrebbe esistere un gruppo G di ordine minimo privo di sottogruppi supersolubili non speciali che verifica la

1) esiste $N \lhd G$, $1 \subsetneqq N \subsetneqq G$, con G/N che contiene sottogruppi supersolubili non speciali.

Sia H/N un sottogruppo supersolubile non speciale di G/N. Il sottogruppo H di G verifica la i) ed è al pari di G privo di sottogruppi supersolubili non speciali. Allora le minimalità di G comporta $H = G$ e quindi G/N risulta supersolubile. Se N non fosse contenuto nel sottogruppo di Frattini $\Phi(G)$ di G, il gruppo G conterrebbe un sottogruppo proprio M tale che $G = NM$ e, siccome G è minimale, $G/N \simeq M/N \cap M$ sarebbe speciale contro l'ipotesi.

Dunque $N \subseteq \Phi(G)$. Ma allora, com'è noto, G/N supersolubile implica che anche G è supersolubile e quindi speciale: il che è assurdo e la ii) resta provata.

TEOREMA 1. *Un gruppo finito privo di sottogruppi supersolubili non speciali è risolubile.*

DIM: Negando la tesi, sia G un contro-esempio di ordine minimo. Se G contenesse un sottogruppo normale N non banale, dal lemma 3 e dalla minimalità di G discenderebbe che N e G/N sono risolubili e quindi anche G sarebbe tale, contro l'ipotesi. Pertanto G è semplice non abeliano e siccome ha tutti i sottogruppi propri risolubili è un gruppo semplice minimo. Ora tra i gruppi considerati nel lemma 2 vi sono anche i gruppi semplici minimi [7]. Dunque G contiene un sottogruppo di Sylow ciclico, ed il lemma 1 conduce ad una contraddizione.

Sussiste il seguente:

LEMMA 4. *Un gruppo finito supersolubile è speciale se, e solo se, sono abeliani tutti quei suoi sottogruppi che sono gruppi di Zassenhaus.*

DIM: La necessità è evidente; proviamo la sufficienza. Negando la tesi, sia G un contro-esempio di ordine minimo. Si consideri un sottogruppo normale minimo N di G. Poichè G è supersolubile si ha che $|N| = p$ (p primo) e l'ipotesi su G assicura quindi che N è contenuto nel centro $Z(G)$ di G.

Risulta da ciò che G/N non può essere speciale, altrimenti anche G sarebbe tale, e perciò la minimalità di G comporta che G/N contiene un sottogruppo H/N che è di Zassenhaus e non abeliano. H è supersolubile e privo di sottogruppi di Zassenhaus non abeliani, dunque H è pure un contro-esempio. Pertanto si ha $H = G$, sicchè G/N risulta un gruppo di Zassenhaus.

Ciò comporta che o G è esso stesso un gruppo di Zassenhaus oppure G è un prodotto diretto di N per un suo complemento [2]: in ogni caso si perviene ad un assurdo.

Da questo lemma e dal teorema 1 discende immediatamente il:

---

(2) Per concludere ciò è sufficiente applicare il seguente risultato di Gaschutz [2]:

Siano G un gruppo, A un sottogruppo normale abeliano di indice finito in G e di esponente finito k. G si spezza su A se, e solo se, per ciascun primo p che divide k ogni p-sottogruppo di Sylow P di G si spezza su $P \cap A$.

TEOREMA 2. *Un gruppo finito in cui non esistono sottogruppi di Zassenhaus non abeliani è risolubile.*

Ringrazio il prof. G. Zacher per i suggerimenti che hanno permesso di semplificare alcune parti di questa nota.

BIBLIOGRAFIA

[1] DICKSON, L. E.: *Linear groups,* Dover.

[2] GASCHUTZ, W.: *Zur Erweiterungtheorie der endlicher Gruppen,* J. Reine Angew. Math. 190 (1952), 93-107.

[3] HUPPERT, B.: *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen,* Math. Zeit. 60, 409-434 (1954).

[4] IWASAWA, K.: *Über die Struktur der endlichen Gruppen, deren echte Untergruppen sämtlich nilpotent sind,* Proc. Phys. Math. Soc. Japan (3) 23, 1-4 (1941).

[5] SCHMIDT, O.: *Gruppi in cui tutti i sottogruppi propri sono speciali* (in russo), Mat. Shornik (31) 1924.

[6] SUZUKI, M.: *On a class of doubly transitive groups,* Annals of Math. Vol. 75, No. 1, (1962) 105-145.

[7] THOMPSON, J.: *Non-solvable finite groups all of whose local subgroups are solvable,* Pacific J. Math. (in corso di stampa).

[8] ZASSENHAUS, H.: *Über endliche Fastkörper,* Abh. Math. Sem. Uni. Hamburg, 11 (1936), 187-220.

Manoscritto pervenuto in redazione il 25 giugno 1967