

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

**Su una interpretazione proiettiva e su una  
rappresentazione affine della dualità della  
programmazione lineare**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 39 (1967), p. 273-290

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_39\\_\\_273\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__273_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

# SU UNA INTERPRETAZIONE PROIETTIVA E SU UNA RAPPRESENTAZIONE AFFINE DELLA DUALITÀ DELLA PROGRAMMAZIONE LINEARE

di EDMONDO MORGANTINI (a Padova) \*)

SOMMARIO: 1. Coppie di sistemi lineari omogenei duali ed associati, secondo A. W. Tucker. 2. Interpretazione proiettiva della loro dualità e della loro associazione. 3. Esempio. 4. Trasformazioni a blocco cerniera. 5. Loro significato geometrico. 6. Interpretazione proiettiva di una coppia di sistemi duali ed associati di equazioni lineari, non omogenee. 7. Interpretazione affine di una coppia standard di programmi lineari duali e della loro dualità. 8. L'esempio più semplice. 9. Verifica diretta, sull'esempio, delle principali asserzioni della teoria.

## **Premessa.**

A coloro che — come lo scrivente — si sono accostati alla teoria della programmazione lineare dopo una lunga pratica della geometria proiettiva, sorge spontanea la questione dei legami tra la legge di dualità della geometria proiettiva e la dualità della programmazione lineare. La loro sostanziale identità si può provare con una opportuna rappresentazione metrico-proiettiva di una coppia di programmi lineari duali, alla quale sono dedicate le pagine che seguono.

---

\*) Di questo lavoro, eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato per la matematica del C. N. R. un riassunto è stato comunicato dall'A. all'VIII Congresso U. M. I. di Trieste, il 6 ottobre 1967 (Nota aggiunta durante la correzione delle bozze).

Indirizzo dell'A.: Prof. E. MORGANTINI, Seminario Matematico dell'Università, Padova.

Il loro contenuto sostanzialmente figura già nei miei « *Appunti di programmazione lineare* »<sup>1)</sup>, largamente ispirati al trattato di D. GALE<sup>2)</sup> ed alla teoria algebrica di A. W. TUCKER<sup>3)</sup> dei « sistemi lineari duali » e delle « trasformazioni a cerniera » del metodo del simpleso.

È appunto la teoria di TUCKER che mi ha fornito i mezzi per far vedere come in definitiva la dualità della geometria proiettiva coincida con la dualità della programmazione lineare, consentendo una conveniente rappresentazione proiettiva di una coppia di sistemi lineari duali (secondo TUCKER) e delle trasformazioni a cerniera del metodo del simpleso (nn. 1, 2, 4, 5).

Si può infatti pensare che quei due sistemi (omogenei e duali secondo Tucker) forniscano in forma esplicita due rappresentazioni duali (nel senso della geometria proiettiva: una come luogo di  $\infty^n$  punti, l'altra come inviluppo di  $\infty^m$  iperpiani) di uno stesso sottospazio  $Q$  dello spazio proiettivo reale  $P$  ad  $m + n + 1$  dimensioni.

Queste due rappresentazioni sono anche « associate », nel senso che in una di esse  $Q$  viene rappresentato come luogo dei punti comuni agli  $m + 1$  iperpiani distinti che lo proiettano dalle  $m + 1$  facce di dimensione  $m - 1$  contenute in una faccia  $F$  di dimensione  $m$  della piramide fondamentale, sghemba con  $Q$ .

Nella rappresentazione « associata »  $Q$  viene invece rappresentato come inviluppo degli iperpiani comuni alle  $n + 1$  stelle distinte aventi per centri i punti di intersezione di  $Q$  con le  $n + 1$  facce di dimensione  $m + 1$  della piramide fondamentale, passanti per  $F$ .

Una trasformazione a blocco cerniera di ordine  $r$  equivale alla sostituzione della faccia  $F$  con un'altra faccia  $F'$  della piramide fondamentale, anch'essa sghemba con  $Q$ , ed avente in comune con  $F$   $m + 1 - r$  degli  $m + 1$  punti fondamentali di cui è congiungente ( $n + 1 - r$  delle  $n + 1$  facce iperpiane della piramide fondamentale, di cui è intersezione).

<sup>1)</sup> Padova, Randi, 1967.

<sup>2)</sup> *The theory of linear economic models* (Mc Graw-Hill, New York, 1960).

<sup>3)</sup> Come da Lui esposta in *Mathematical optimization techniques*, BELLMAN R. ed. (Univ. of California Press, 1963).

Si passa poi (nn. 6,7), dallo schema riassuntivo di una coppia di sistemi lineari duali omogenei, allo schema che — sempre secondo TUCKER — si può associare ad una coppia di programmi lineari duali standard e riassume una coppia di sistemi lineari *non omogenei*, duali ed associati. Per essi vale la precedente interpretazione proiettiva, ma il passaggio da coordinate omogenee a coordinate non omogenee conduce naturalmente ad una interpretazione *affine* della coppia di programmi lineari e della loro dualità.

Per tale interpretazione metrico-proiettiva sembra vantaggioso l'uso coordinante « *antiparallele* ». Si suppone cioè che — nello spazio affine — sia all' $\infty$  il solo punto fondamentale  $A_3$  del riferimento e che siano concordemente orientati gli « *assi* » paralleli  $A_i A_3$  ( $i \neq 3$ ), dove le coordinate non omogenee di iperpiano —  $\frac{u_i}{u_3}$  si leggono come intercette, unitaria essendo l'intercetta dell'iperpiano che dalla faccia opposta proietta il punto unità <sup>4</sup>).

I due problemi duali assumono allora il seguente aspetto geometrico :

I) *Tra gli iperpiani passanti per  $Q$  e non per  $A_3$ , determinare — se esistono — quelli aventi non-negative le intercette sugli assi  $A_i A_3$  ( $i \neq 3, 4$ ) e massima l'intercetta sull'asse  $A_4 A_3$ .*

II) *Tra i punti comuni a  $Q$  ed al prisma degli assi (ma non alla sua faccia opposta ad  $A_4$ ), determinare — se esistono — quelli che dalla faccia opposta del riferimento si proiettano sull'asse  $A_4 A_3$  in un punto di ascissa minima.*

L'esame dettagliato dell'esempio più semplice ( $m = n = 1$ ), ma ancora significativo, fa vedere (nn. 3, 8, 9) come da tale interpretazione geometrica risultino evidenti le principali asserzioni della teoria della programmazione lineare, in particolare quelle contenute nel teorema fondamentale della dualità.

I titoli dei varî paragrafi, riportati nel precedente sommario permettono al Lettore di farsi un'idea più precisa dell'ordine in cui sono trattati i varî argomenti.

---

<sup>4</sup>) Così il punto unità risulta « interno » al « prisma degli assi ». Più usati in pratica (ad es. nel piano, per la costruzione di monogrammi a punti allineati con due scale rettilinee) sono i sistemi di coordinate « *parallele* » di iperpiano, che differiscono da quelle qui chiamate « *antiparallele* » solo per l'orientazione degli assi dove quelle coordinate si leggono come intercette.

### 1. Coppie di sistemi lineari omogenei duali ed associati, secondo A. W. Tucker.

A. W. TUCKER <sup>5)</sup> chiama « *duali* » due sistemi di equazioni lineari ed omogenee nelle  $n + m$  incognite :

$$(1) \quad u = (u', u'') = (u_1, \dots, u_n; u_{n+1}, \dots, u_{n+m});$$

$$(1') \quad x = (x', x'') = (x_1, \dots, x_n; x_{n+1}, \dots, x_{n+m}),$$

rappresentati schematicamente della tabella :

$$(2) \quad \frac{\begin{array}{c} x' \\ \hline - u'' \quad \boxed{A} \end{array}}{= u'}$$

dove  $A = (a_{ij})$  è una matrice ed elementi (ed es.) reali, del tipo  $m \times n$ , e che separatamente, usando il simbolismo della teoria delle matrici, si scrivono :

$$(3) \quad - u'' A = u', \quad (3') \quad A x' = x''.$$

Tanto le  $n$  equazioni (3) quanto le  $m$  equazioni (3') sono *linearmente indipendenti*, come si riconosce ad es. scrivendole nella forma equivalente :

$$u \begin{pmatrix} I^n \\ A \end{pmatrix} = 0, \quad (A, -I^m) x = 0,$$

dove  $I^n$  ed  $I^m$  stanno ad indicare le matrici quadrate identiche degli ordini rispettivi  $n$  ed  $m$ .

Inoltre, per ogni coppia di soluzioni  $u, x$  delle (3), (3'), si ha :

$$(4) \quad \begin{aligned} ux &= (u', u'') (x', x'') = u' x' + u'' x'' = \\ &= - u'' A x' + u'' A x' = 0. \end{aligned}$$

---

<sup>5)</sup> Vedi l. cit. <sup>3)</sup>.

## 2. Interpretazione proiettiva della loro dualità e della loro associazione.

Trascurando di proposito la interpretazione di Tucker di  $u, x$  come punti-vettori di uno stesso spazio vettoriale (reale)  $R^{m+n}$ , ed approfittando della omogeneità delle (1.3), (1.3'), vogliamo qui interpretare le  $m + n$  componenti dei due vettori  $u, x$  come *coordinate omogenee*, rispettivamente di *iperpiano* e di *punto*, in uno stesso spazio proiettivo (reale)  $P = P^{m+n-1}$ , di dimensione  $m + n - 1$ .

In  $P$  le (1.3), (1.3'), essendo indipendenti, rappresentano rispettivamente, in forma « esplicita » :

a) Una stella  $U$ , inviluppo di  $\infty^{m-1}$  iperpiani, avente dunque per sostegno uno spazio di  $\infty^{n-1}$  punti.

La (1.4) afferma poi che :

b) Ogni iperpiano della  $U$  contiene tutti i punti di  $X$ .

In altre parole :

a') Un sottospazio  $X$ , luogo di  $\infty^{n-1}$  punti, e dunque sostegno di una stella, inviluppo di  $\infty^{m-1}$  iperpiani.

b') Ogni punto di  $X$  contiene tutti gli iperpiani della  $U$ .

c) Le (1.3), (1.3') forniscono due rappresentazioni esplicite « associate » dello stesso sottospazio  $Q$  di  $P$ , nei suoi due aspetti « duali » nel senso della geometria proiettiva, e cioè come inviluppo  $U$  di  $\infty^{m-1}$  iperpiani e come luogo  $X$  di  $\infty^{n-1}$  punti.

Il significato geometrico della « associazione » di queste due rappresentazioni duali di  $Q$  e della indipendenza lineare delle (1.3), (1.3') può essere ulteriormente chiarito, osservando che :

d) Le (1.3) rappresentano  $Q$  come inviluppo  $U$  degli  $\infty^{m-1}$  iperpiani passanti per gli  $n$  punti *distinti* in cui  $Q$  interseca quelle  $n$  facce di dimensione  $m$  della piramide fondamentale del riferimento sulle quali si annullano tutte le prime  $n$  coordinate di punto, meno una. Queste facce di « intersezione » sono poi quelle

d') Le (1.3) rappresentano  $Q$  come luogo  $X$  degli  $\infty^{n-1}$  punti comuni agli  $m$  iperpiani *distinti* che lo proiettano da quelle  $m$  facce della piramide fondamentale, di dimensione  $m - 2$  (e dunque inviluppo di  $\infty^n$  iperpiani), sulle quali si annullano tutte le prime  $n$  coordinate di punto ed una delle ultime  $m$ . Queste facce

passanti per la faccia  $F$  di dimensione  $m - 1$  in cui si annullano *tutte* le prime  $n$  coordinate di punto.

La circostanza che gli  $n$  punti di intersezione suddetti siano distinti significa che  $Q$  non *incide* la  $F$ .

«centri di proiezione» sono poi quelle contenute nella faccia  $F$  di dimensione  $m - 1$  in cui si annullano *tutte* le prime  $n$  coordinate di punto.

La circostanza che quegli  $m$  iperpiani proiettanti siano distinti sta ancora a significare che  $Q$  ed  $F$  non hanno punti comuni.

Si noti che se  $Q$  ed  $F$  avessero un punto in comune, e quindi fossero contenuti in uno stesso iperpiano, con quel punto e con quell'iperpiano coinciderebbero rispettivamente tutti gli  $n$  punti di intersezione e tutti gli  $m$  iperpiani proiettanti di cui sopra.

### 3. Esempio.

Per  $m = n = 2$  ad es. si ha :

$$(1) \quad \mathbf{u} = (\mathbf{u}', \mathbf{u}'') = (u_1, u_2; u_3, u_4);$$

$$(1') \quad \mathbf{x} = (\mathbf{x}', \mathbf{x}'') = (x_1, x_2, x_3, x_4)$$

$$(2) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{cc|c} & x_1 & x_2 & \\ \hline -u_3 & a_{11} & a_{12} & = x_3 \\ -u_4 & a_{21} & a_{22} & = x_4 \end{array} \\ \hline = u_1 = u_2 \end{array}$$

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} -u_3 a_{11} - u_4 a_{21} = u_1, \\ -u_3 a_{12} - u_4 a_{22} = u_2. \end{array} \right. \quad (3') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = x_3, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = x_4. \end{array} \right.$$

Nello spazio proiettivo tridimensionale  $P^3$ , dove  $(u_1, \dots, u_4)$  ed  $(x_1, \dots, x_4)$  si interpretino come coordinate proiettive associate di piano e rispettivamente di punto, i due sistemi duali (3.3), (3.3'), sintetizzati dallo schema (3.2), forniscono dunque due rappresen-

tazioni *duali* ed in forma esplicita della *stessa retta q*, a sinistra come inviluppo di piani, a destra come luogo di punti.

Le due rappresentazioni (3.3), (3.3') di *q* sono anche « *associate* », nel senso che :

d) Le (3.3) rappresentano *q* come fascio di piani comune alle due stelle aventi per centri i due punti distinti :

$$(1, 0, a_{11}, a_{21}), (0, 1, a_{12}, a_{22}),$$

nei quali *q* interseca rispettivamente le facce :

$$x_2 = 0, x_1 = 0$$

a') Le (3.3') rappresentano la *q* come punteggiata, comune ai due piani distinti :

$$(a_{11}, a_{12}, -1, 0), (a_{21}, a_{22}, 0, -1),$$

che la proiettano rispettivamente dai due vertici :

$$u_4 = 0, u_3 = 0$$

della piramide fondamentale del riferimento.

Ciò è possibile, in quanto la *q* non è incidente (ossia complanare) con lo spigolo  $F = A_3 A_4 = \alpha_1 \alpha_2$  della piramide fondamentale, che si può pensare tanto come intersezione delle due facce  $\alpha_1, \alpha_2$ , quanto come congiungente i due vertici  $A_3, A_4$ .

#### 4. Trasformazioni a blocco-cerniera.

Sia  $A_{11}$  una sub-matrice quadrata non singolare della *A*. Riordinando le righe e le colonne della *A* (e corrispondentemente le coordinate dei vettori  $u, x$ ) si può far sì che  $A_{11}$  sia formata con le sue prime *r* righe e colonne. Ripartendo corrispondentemente in 4 blocchi la *A* ed in 2 blocchi i vettori  $u', u''; x', x''$ , lo schema (1.2) ed i due sistemi duali ed associati (1.3), (1.3') si possono riscrivere :

$$(1) \quad \begin{array}{c} x'_1 \quad x'_2 \\ \hline -u''_1 \left| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right| = x''_1 \\ -u''_2 \left| \begin{array}{cc} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{array} \right| = x''_2 \\ \hline = u'_1 = u'_2 \end{array}$$

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} -u''_1 A_{11} - u''_2 A_{21} = u'_1, \\ -u''_1 A_{11} - u''_2 A_{22} = u'_1, \end{array} \right. \quad (2') \quad \left\{ \begin{array}{l} A_{11} x'_1 + A_{12} x'_2 = x''_1, \\ A_{21} x'_1 + A_{22} x'_2 = x''_2. \end{array} \right.$$



A. W. Tucker chiama « *trasformazione a blocco cerniera*  $A_{11}$  », di « *ordine* »  $r$ , la operazione (determinata dalla scelta del blocco cerniera  $A_{11}$ ) che fa passare dallo schema (4.1) e dai due sistemi duali ed associati (4.2), (4.2') allo schema ed ai due sistemi duali ed associati seguenti:

$$(3) \quad \begin{array}{ccc} & \mathbf{x}_1'' & \mathbf{x}_2' \\ \hline -\mathbf{u}_1' & \left[ \begin{array}{cc} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ A_{21} A_{11}^{-1} & A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12} \end{array} \right] & = \mathbf{x}_1' \\ -\mathbf{u}_2'' & & = \mathbf{x}_2'' \\ \hline & = \mathbf{u}_1'' & = \mathbf{u}_2' \end{array}$$

$$(4) \quad \begin{cases} -\mathbf{u}_1' A_{11}^{-1} - \mathbf{u}_2'' A_{21} A_{11}^{-1} = \mathbf{u}_1'', \\ \mathbf{u}_1' A_{11}^{-1} A_{12} - \mathbf{u}_2'' (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) = \mathbf{u}_2'. \end{cases}$$

$$(4') \quad \begin{cases} A_{11}^{-1} \mathbf{x}_1'' - A_{11}^{-1} A_{12} \mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_1', \\ A_{21} A_{11}^{-1} \mathbf{x}_1'' + (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}) \mathbf{x}_2' = \mathbf{x}_2''. \end{cases}$$

I due schemi (4.1), (4.3) sono *definiti a meno di un eventuale riordinamento delle righe e delle colonne*.

Dallo schema (4.3) si ritorna allo schema (4.1) con la trasformazione a blocco cerniera  $A_{11}^{-1}$ .

I due schemi (4.1), (4.3) si dicono « *equivalenti* », in quanto sono equivalenti (come subito si verifica, nel senso che hanno *le stesse soluzioni*) le due coppie di sistemi lineari duali ed associati da essi sintetizzate.

## 5. Loro significato proiettivo.

La equivalenza, ossia la circostanza di aver le stesse soluzioni, verificabile per le due coppie di sistemi (4.2), (4.4) nelle incognite  $\mathbf{u}$  e (4.2'), (4.4') nelle incognite  $\mathbf{x}$ , sta a significare che *anche i due sistemi duali associati (4.4) e (4.4') forniscono una coppia di rappresentazioni duali ed associate dello stesso sottospazio  $Q$  dello spazio  $P$* .

Quello che cambia, passando dalla prima coppia alla seconda, ossia dallo schema (4.1) allo schema (4.3), è la faccia usata  $F$  della piramide fondamentale del riferimento (luogo di  $\infty^{m-1}$  punti ed inviluppo di  $\infty^{n-1}$  iperpiani). Dalla  $F$ , sghemba con  $Q$ , si passa ad un'altra faccia  $F'$ , di ugual dimensione ed anch'essa sghemba con  $Q$ .

Si verifica subito che *l'ordine  $r$  del blocco cerniera sta ad indicare che  $F$  ed  $F'$  hanno in comune  $m - r$  degli  $m$  vertici ( $n - r$  delle  $n$  facce iperpiane) della piramide fondamentale, di cui sono congiungenti (intersezioni).*

Così, per  $r = 1$ , ossia nel caso delle trasformazioni « elementari » (nelle quali la « cerniera » è un elemento non nullo della  $A$ , pensato come matrice quadrata non singolare, di ordine uno),  $F$  ed  $F'$  hanno in comune  $m - 1$  vertici (ed  $n - 1$  facce iperpiane) della piramide fondamentale. Lo spazio fondamentale  $f = f'$  di dimensione  $m - 2$  congiungente quegli  $m - 1$  vertici (ossia la intersezione di  $F$  ed  $F'$ ) è l'unico « centro di proiezione » comune alle due rappresentazioni puntuali (4.2') e (4.4') di  $Q$ . Dualmente lo spazio congiungente  $F$  ed  $F'$ , di dimensione  $m$ , è l'unico « spazio d'intersezione » comune alle due rappresentazioni (4.2) e (4.4) di  $Q$ .

Poichè  $F'$  si ottiene proiettando da  $f$  il suo rimanente  $m$ -esimo vertice  $R$  della piramide fondamentale, affinchè la nuova rappresentazione sia possibile (ossia perchè  $Q$  non sia incidente ad  $F'$ ) occorre e basta che l'iperpiano proiettante  $Q$  da  $f$  non passi per  $R$ , ossia appunto che non sia nullo l'elemento cerniera della matrice  $A$ , uno dei coefficienti dell'equazione di quell'iperpiano. E dualmente.

Si intuisce (e si potrebbe dimostrare) che il passaggio da una coppia di rappresentazioni duali associate di  $Q$ , relative ad una faccia  $F$  del riferimento sghemba con  $Q$ , ad un'altra coppia equivalente di rappresentazioni duali associate, relative alla faccia  $F'$ , pure sghemba con  $Q$ , se  $F$  ed  $F'$  hanno in comune solo  $m - r$  degli  $m$  punti fondamentali dei quali sono congiungenti, si può effettuare attraverso una catena di (almeno)  $r$  successivi e convenienti passaggi intermedi, passando cioè da  $F = F_1$  ad  $F_2, \dots$ , ad  $F_r = F'$ , in modo che  $F_i$  ed  $F_{i+1}$  abbiano sempre  $m - 1$  punti fondamentali in comune. Ciò significa appunto come afferma Tucker, che:

*Una trasformazione a blocco cerniera di ordine  $r$  si può sempre decomporre nel prodotto di (almeno)  $r$  trasformazioni elementari a cerniera.*

Viceversa, risulta così anche intuitivo che :

*Il prodotto di più trasformazioni elementari a cerniera è una trasformazione a blocco cerniera.*

## 6. Interpretazione proiettiva di una coppia di sistemi duali ed associati di equazioni lineari, non omogenee.

Consideriamo ora lo schema di Tucker :

$$(1) \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc|cc} & x_1 & 1 & & \\ \hline -u_2 & A & -c & = & x_2 \\ & 1 & b & d & = x_3 \\ \hline & & & & = u_1 \quad = u_4 \end{array} \end{array}$$

ed i due sistemi duali ed associati di equazioni lineari *non omogenee* che esso riassume :

$$(2) \quad \begin{cases} u_1 = b - u_2 A, \\ u_4 = d + u_2 c. \end{cases} \quad (2') \quad \begin{cases} x_2 = A x_1 - c, \\ x_3 = b x_1 + d. \end{cases}$$

La matrice (reale)  $A$  sia del tipo  $m \times n$ , cosicchè  $u_2, c, x_2$  sono  $m$ -vettori ed  $x_1, b, u_1$  sono  $n$ -vettori (reali).

Allora (n. 2) le  $m + n + 2$  coordinate dei vettori :

$$(3) \quad U = (u_1, u_2, -1, u_4), \quad (3'') \quad X = (x_1, x_2, x_3, 1)$$

si possono interpretare rispettivamente come coordinate omogenee associate di iperpiano e di punto in uno stesso spazio proiettivo reale  $P = P^{m+n+1}$  ad  $m + n + 1$  dimensioni, dove la condizione di appartenenza punto-iperpiano si scrive :

$$(4) \quad UX = u_1 x_1 + u_2 x_2 - x_3 + u_4 = 0.$$

Perciò, essendo la (6.4) verificata da ogni coppia di soluzioni dei due sistemi associati (6.2), (6.2'), le (6.2), (6.2') rappresentano

uno stesso sottospazio  $Q$  di  $P$ , nei suoi due aspetti duali e cioè (a sinistra) come involuppo di  $\infty^m$  iperpiani e (a destra) come luogo di  $\infty^n$  punti.

Di ciascuno di questi due aspetti le (6.2), (6.2') forniscono una rappresentazione in forma esplicita ed *in coordinate non omogenee*, in quanto una delle coordinate (6.3), (6.3') si suppone *unitaria*. I parametri (*essenziali*) della rappresentazione esplicita sono, a sinistra, le  $m$  coordinate di  $u_2$  e, a destra, le  $n$  coordinate di  $x_1$ .

Ciò significa, a destra, che gli  $\infty^n$  punti  $X$  di  $Q$  si possono riferire biunivocamente a quelli  $x_1$  della faccia  $F = F^n(x_2 = 0, x_3 = 0)$  del riferimento, per proiezione dalla faccia « opposta »  $G = G^m(x_1 = 0, x_4 = 0)$  e sezione con  $F$ .

Dualmente, a sinistra, che gli  $\infty^m$  iperpiani  $U$  per  $Q$  si possono riferire biunivocamente a quelli  $u_2$  per la stessa faccia  $F(u_1 = 0, u_4 = 0)$  del riferimento, per sezione con la faccia opposta  $G(u_2 = 0, u_3 = 0)$  e proiezione da  $F$ .

Ciò è possibile, in quanto (n. 2)  $Q$  non ha punti in comune con  $G$ , ossia  $Q$  e  $G$  non appartengono allo stesso iperpiano.

### 7. Interpretazione affine di una coppia standard di programmi lineari duali e della loro dualità.

Lo schema (6.1) si può pensare, con Tucker, associato alla più generale coppia di *programmi lineari* « duali », in forma « standard », formulati come segue,

I) Determinare (se possibile) un $m$ -vettore $u_2$ , tale che sia:		I') Determinare (se possibile) un $n$ -vettore $x_1$ , tale che sia:
$\left\{ \begin{array}{l} u_2 \geq 0, \\ u_2 A \leq b, \\ d + u_2 c = \text{massimo.} \end{array} \right.$		$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \geq 0, \\ A x_1 \geq c, \\ b x_1 + d = \text{minimo.} \end{array} \right.$

Con riferimento ai due sistemi lineari associati (6.2), (6.2') ed alla loro interpretazione proiettiva, si può quindi dare la seguente *interpretazione geometrica* dei due programmi lineari I, I' e della loro « dualità »:

## II) Tra gli iperpiani

$$U = (u_1, u_2, -1, u_4)$$

passanti per  $Q$  e per i quali  $u_3 \neq 0$ , determinare, se esistono, quelli aventi non-negative le coordinate non omogenee  $u_1, u_2$ , e massima la coordinata non omogenea  $u_4$ .

## II') Tra i punti

$$X = (x_1, x_2, x_3, 1)$$

aventi  $x_4 \neq 0$  ed appartenenti a  $Q$ , determinare, se esistono, quelli aventi non-negative le coordinate non omogenee  $x_1, x_2$  e minima la coordinata non omogenea  $x_3$ .

Si osservi come l'intervento di coordinate proiettive non omogenee conferisca un carattere « affine » a questa interpretazione « proiettiva ».

A destra funge da « iperpiano improprio » la faccia iperpiana  $x_4 = 0$  del riferimento, cosicchè (quando la si pensi all' $\infty$ ) le coordinate non omogenee  $x_1, x_2, x_3$  si possono pensare come *coordinate cartesiane* di punto.

A sinistra funge da « punto improprio » il punto fondamentale  $u_3 = 0$  del riferimento, cosicchè (quando lo si pensi all' $\infty$ ) le coordinate non omogenee  $u_1, u_2, u_4$  possono pensarsi come « *coordinate antiparallele* » di iperpiano (se gli altri punti fondamentali del riferimento sono al finito).

Si noti che il punto  $u_3 = 0$  non è quello opposto all'iperpiano  $x_4 = 0$ , anzi vi appartiene.

Si noti anche come, a destra, l'iperpiano improprio sia quello in cui si annulla la coordinata di punto ( $x_4$ ) avente lo stesso indice della coordinata ( $u_4$ ) di iperpiano che, a sinistra, occorre estremare. E dualmente.

Si ricordi inoltre che tanto le coordinate cartesiane di punto, quanto le coordinate antiparallele di iperpiano si possono pensare come  *misure di segmenti orientati*  sugli assi del riferimento.

Così, detta  $E_{34}$  la proiezione del punto unità sullo spigolo  $A_3 A_4$ , fatta dalla faccia opposta  $F_{34}$  della piramide fondamentale del riferimento proiettivo, e detta :

$R_{34}$ la sezione dell'iperpiano $U$ con		$X_{34}$ la proiezione da $F_{34}$ del punto $X$ su
lo stesso spigolo $A_3 A_4$ ,		

le nostre coordinate proiettive non omogenee  $u_4, x_3$  hanno il seguente significato geometrico :

$$u_4 = -\frac{u_4}{u_3} = (A_3, A_4, E_{34}, R_{34}). \quad \left| \quad x_3 = \frac{x_3}{u_4} (A_3, A_4, E_{34}, X_{34}). \right.$$

Pertanto, se  $A_3$  è all'  $\infty$  ed  $A_4$  è al finito, essendo

$$A_4 E_{34} = 1,$$

$u_4$  ed  $x_3$  hanno il seguente significato affine e metrico :

$$u_4 = \frac{A_4 R_{34}}{A_4 E_{34}} = A_4 R_{34}; \quad x_3 = \frac{A_4 X_{34}}{A_4 E_{34}} = A_4 X_{34}.$$

### 8. L'esempio più semplice.

È opportuno vedere a cosa si riducono le considerazioni precedenti nel caso più semplice, in cui  $m = n = 1$ . Allora le (6.2), (6.2') si scrivono :

$$(1) \quad \begin{cases} u_1 = b - u_2 a, \\ u_4 = d + u_2 c. \end{cases} \quad (1') \quad \begin{cases} x_2 = a x_1 - c, \\ x_3 = b x_1 + d. \end{cases}$$

Lo spazio ambiente  $P = P^3$  è di dimensione 3 ed in esso

$$U = (u_1, u_2, -1, u_4); \quad X = (x_1, x_2, x_3, 1)$$

sono coordinate proiettive omogenee associate di piano e di punto

Le (8.1), (8.1') rappresentano, in forma esplicita, una stessa retta  $q$  di  $P^3$ , a sinistra come involuppo di piani, a destra come luogo di punti. Per quei piani e per quei punti

$$(u_1, u_2, u_4) \quad \text{e rispettivamente} \quad (x_1, x_2, x_3)$$

possono pensarsi come *coordinate proiettive non omogenee*, e più in particolare, nello spazio affine :

*coordinate antiparallele* di piano,  $\left| \begin{array}{l} \text{coordinate cartesiane di punto, se} \\ \text{se il solo punto } u_3 = 0 \text{ è all}'\infty. \end{array} \right. \begin{array}{l} \text{è all}'\infty \text{ il piano } x_4 = 0. \end{array}$

Si noti (n. 7) che, essendo in entrambi i casi il punto  $A_3$  all' $\infty$  ed al finito il punto  $A_4$ , tanto a sinistra che a destra la coordinata  $u_4$  del piano  $U = (u_1, u_2, -1, u_4)$  coincide con la misura della sua « *intercetta* » sull'asse  $A_4 A_3$ .

Inoltre i punti  $X = (x_1, x_2, x_3, 1)$  per i quali  $x_3 = u_4$  sono quelli situati sul piano per  $A_1 A_2$  ed avente intercetta  $u_4$  sull'asse  $A_4 A_3$ .

La condizione di appartenenza punto-piano si scrive

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 - x_3 + u_4 = 0.$$

Pertanto i due punti *distinti* della retta  $q$ , di equazioni (8.1), sono quelli :

$$Q_4 = (1, a, b, 0), \quad Q_1 = (0, c, -d, -1)$$

in cui essa incontra le facce  $x_4 = 0$ ,  $x_1 = 0$  della piramide fondamentale (v. Fig. 1).

Dunque la retta  $q$  non è incidente (= complanare) con lo spigolo  $A_2 A_3$  del riferimento. Perciò sono anche distinti i due piani  $\chi_3, \chi_2$  di equazioni (8.1') che sono appunto quelli che la proiettano dai punti fondamentali  $A_3, A_2$ .

I due sistemi lineari duali ed associati (8.1), (8.1') sono sintetizzati dallo schema di Tucker :

$$\begin{array}{ccc|cc} & x_1 & & 1 & \\ \hline -u_2 & a & -c & & = x_2 \\ & 1 & b & d & = x_3 \\ \hline & & = u_1 & = u_4 & \end{array}$$

che riassume anche i due programmi lineari duali standard :

*Determinare, se possibile, un numero reale :*

$$\text{I) } \quad u_2 \geq 0, \quad \left| \text{I}' \right) \quad x_1 \geq 0, \\ \text{tale che sia :}$$

$$u_2 a \leq b$$

$$a x_1 \geq c,$$

$$d + u_2 c = \text{massimo.}$$

$$b x_1 + d = \text{minimo.}$$

Introduciamo, nello spazio affine, un sistema di coordinate antiparallele, mettendone in evidenza (v. Fig. 1) i punti fondamentali

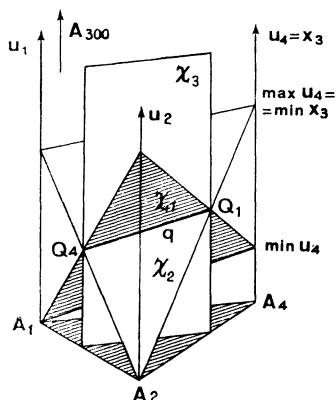


Fig. 1

propri  $A_1, A_2, A_4$ , origini degli assi paralleli delle coordinate non omogenee di piano  $u_1, u_2, u_4$ .

I piani  $U = (u_1, u_2, -1, u_4)$  di coordinate non omogenee  $u_1, u_2$  non-negative sono dunque quelli aventi intercette non-negative sugli assi  $u_1, u_2$ .

I punti  $X = (x_1, x_2, x_3, 1)$  di coordinate non omogenee  $x_1, x_2$  non-negative sono quelli interni al prisma (contenente il punto unità ed) avente per spigoli gli assi  $u_1, u_2, u_4$ , oppure quelli appartenenti alle sue due facce (= strisce) concorrenti nello spigolo  $u_4$ .

Nella figura si sono messi in evidenza i due punti  $Q_4, Q_1$  della retta  $q$ , che qui sono anche estremi del segmento  $Q_4, Q_1$  (aperto a sinistra) i cui punti  $X$  hanno non-negative  $x_1$  ed  $x_2$ .

Si sono messi in evidenza anche i piani  $\chi_3, \chi_2, \chi_1$  che proiettano  $q$  da  $A_3, A_2, A_1$ . Si noti che qui sono  $\chi_2$  e  $\chi_1$  gli estremi dell'angolo (non contenente  $\chi_3$ ) descritto dai piani  $U$  per  $q$  aventi non-negative le coordinate antiparallele  $u_1, u_2$ .

La formulazione affine dei due problemi duali I, I' è, in coordinate antiparallele, la seguente:



II) Tra i piani passanti per la retta  $q$  e non paralleli agli assi  $u_1, u_2, u_4$  delle coordinate antiparallele, determinare, se esistono, quelli aventi non-negative le intercette sugli assi  $u_1, u_2$  e massima la intercetta sull'asse  $u_4$

II') Tra i punti appartenenti alla retta  $q$  ed al prisma degli assi  $u_1, u_2, u_4$  (ma non alla sua faccia opposta ad  $u_4$ ), determinarne, se esiste, uno, per il quale sia minima l'intercetta sull'asse  $u_4$  del piano che lo proietta dalla retta  $A_1A_2$ .

### 9. Verifica diretta, sull'esempio, delle principali asserzioni della teoria.

Sia  $X = (x_1, x_2, x_3, 1)$  un punto di coordinate  $x_1, x_2$  non-negative della retta  $q$ , ossia (v. Fig. 2) appartenente al prisma  $P$  degli

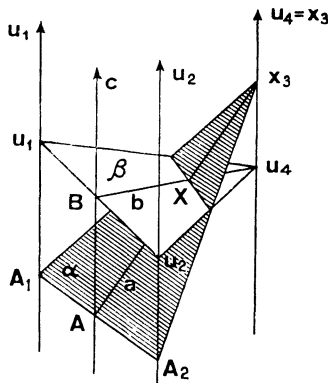


Fig. 2

assi  $u_1, u_2, u_4$ , ma non alla sua faccia opposta ad  $u_4$ . La  $x_3$  del punto  $X$  è l'intercetta sull'asse  $u_4$  del piano  $\alpha$  proiettante  $X$  dalla retta  $A_1A_2$ .

Sia  $\beta = (u_1, u_2, -1, u_4)$  un piano per la retta  $q$  (e dunque per il punto  $X$ ) di intercette non-negative sugli assi  $u_1, u_2$ , e sia  $u_4$  la sua intercetta sull'asse  $u_4$ .

Il piano proiettante  $X$  dall'asse  $u_4$  sega i piani  $\alpha$  e  $\beta$  in due rette  $a, b$  per  $X$ , che intersecano la faccia  $u_1u_2$  del prisma  $P$  in due punti  $A, B$  appartenenti ad una stessa retta  $c$ , parallela agli assi,

che si può anche supporre orientata concordemente ad essi. Chiamando «l'alto» il verso di questa orientazione comune, essendo  $u_1 \geq 0$ ,  $u_2 \geq 0$ , ne consegue che  $A$  non è più alto di  $B$  e quindi, essendo  $X$  interno alla striscia  $cu_4$ ,

$$(1) \quad x_3 \geq u_4.$$

Si verifica così anche intuitivamente sulla figura che:

*Se i due problemi duali sono ammissibili, ogni soluzione  $u_4$  del problema di massimo non può superare alcuna soluzione  $x_3$  del problema di minimo.*

Dunque i due insiemi di soluzioni ammissibili ( $u_4$ ) ed ( $x_3$ ), per ipotesi non vuoti, risultano limitati, il primo superiormente, il secondo inferiormente. D'altra parte, trattandosi di insiemi convessi e chiusi di numeri reali (aventi per immagini un segmento o una semiretta dell'asse  $x_3 = u_4$ , compresi i loro estremi), è chiaro che in tal caso, come vuole la prima parte del teorema fondamentale della dualità della programmazione lineare:

<p><i>Tra i piani <math>U</math> ammissibili, ne esiste almeno uno <math>U^0</math> di intercetta <math>u_4^0</math> massima.</i></p>	<p><i>Tra i punti <math>X</math> ammissibili, ne esiste almeno uno <math>X^0</math> di coordinata <math>x_3^0</math> minima.</i></p>
---	--

Poichè la retta  $q$  non è parallela agli assi (altrimenti i due piani  $\chi_3$  e  $\chi_2$  coinciderebbero), i punti  $X$  ammissibili, se esistono, sono quelli del segmento comune alla retta  $q$  ed al prisma  $P$  degli assi. Se tra essi ve n'è qualcuno di coordinata  $x_3^0$  minima, è chiaro che fra questi figura uno  $X^0$  degli estremi del segmento, ossia una delle intersezioni  $Q_i$  di  $q$  con le facce  $u_2 u_4$  od  $u_1 u_4$  del prisma  $P$ . Ciò intanto significa che:

*Se il problema di minimo ammette una soluzione ottimale, esso ammette anche una soluzione « basica » ottimale (teorema delle soluzioni basiche ottimali).*

D'altra parte, supposto che sia (v. Fig. 1)  $X^0 = Q_1$ , il piano  $U^0 = \chi$  proiettante  $q$  da  $A_2$  ha sull'asse  $u_4$  una intercetta  $u_4^0 = x_3^0$ . Sicchè dalla (9.1) risulta (criterio di ottimalità) che tale piano  $U^0$  è soluzione basica ottimale del problema di massimo. Sicchè non solo:

*Anche il problema di massimo ha una soluzione basica ottimale, me anche, come vuole la seconda parte del teorema fondamentale della dualità:*

*I valori ottimali  $x_3^0 = u_4^0$  dei due programmi duali coincidono.*

Che poi (come vuole la terza parte del teorema fondamentale della dualità) se uno dei due programmi è ammissibile ma privo di soluzioni ottimali, l'altro non sia ammissibile, risulta immediatamente dalla (9.1).

Sicchè — sfruttando la rappresentazione affine — è facile verificare direttamente su questo esempio la verità delle principali asserzioni della teoria della programmazione lineare.

L'importanza dell'esempio precedente aumenta, quando si pensi che ad esso ci si può sempre ricondurre dal caso generale illustrato nel n. 7, purchè si seghi la figura relativa, ad es. con lo spazio tridimensionale congiungente lo spigolo  $A_3 A_4$  della piramide fondamentale del riferimento con una retta di  $Q$  contenente un punto ottimale  $X^0$ .

Manoscritto pervenuto in redazione il 7-9-1967