Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

A. Laratta

Perturbazioni al moto radiale di un fluido viscoso incomprimibile

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 226-247

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__226_0>

PERTURBAZIONI AL MOTO RADIALE DI UN FLUIDO VISCOSO INCOMPRIMIBILE

A. LARATTA *)

1. Introduzione.

Consideriamo il moto radiale di un fluido viscoso incomprimibile che occupi tutto lo spazio esterno ad una sfera Σ di raggio R_0, moto descritto in un sistema di coordinate sferiche $(0, R, \theta, \Phi)$ dalle funzioni

$$(1.1) \qquad \begin{cases} u = \pm\, U \left(\dfrac{R_0}{R}\right)^2, v = 0, w = 0 \\ p = \dfrac{\varrho U^2}{2} \left\{ H - \left(\dfrac{R_0}{R}\right)^4 \right\} \end{cases}$$

dove (u, v, w) sono le componenti della velocità e p è la pressione. U è una costante positiva avente il significato di modulo della componente radiale della velocità sui punti di Σ, ϱ è la densità del fluido e H una costante adimensionale.

Interessa studiare il comportamento del fluido in moto quando siano introdotte delle perturbazioni nei valori delle componenti di velocità o del tensore dello sforzo sulla superficie Σ.

*) Indirizzo dell'A.: Centro Studi Calcolatrici Elettroniche (C.S.C.E.) del C.N.R. presso l'Università, Pisa;

Istituto di Matematica Applicata - Università, Pisa.

Qui si dà un primo contributo a questo studio di stabilità attraverso l'esame delle proprietà di alcuni tipi di perturbazioni di piccola ampiezza per cui tra l'altro si suppone che:

a) la terza componente della velocità sia nulla;

b) le prime due componenti della velocità siano indipendenti da Φ;

c) la pressione sia indipendente da Φ.

Di tali perturbazioni esaminiamo, se ne esistono, alcune che diano luogo a moti stazionari diversi da quello banale (1.1).

È nota l'importanza che l'esistenza di perturbazioni di questo tipo ha nella ricerca di condizioni di stabilità marginale (si vedano ad esempio i risultati raccolti nel volume del Chandrasekhar [4]).

Il più spesso si può constatare che le condizioni che assicurano l'esistenza di moti perturbati stazionari sono anche quelle che individuano condizioni di transizione da stabilità ad instabilità per il moto fondamentale.

Facciamo vedere che sia nel caso di moto fondamentale convergente che in quello di moto divergente possono esistere perturbazioni stazionarie per certi valori del numero di Reynolds. Tali valori possono essere interpretati come valori critici di transizione.

2. Impostazione del problema.

Per meglio interpretare quantitativamente i risultati successivi, conviene introdurre le variabili adimensionali:

$$\tau = \frac{U}{R_0}\,t, \quad u_1 = \frac{u}{U}, \quad u_2 = \frac{v}{U}, \quad u_3 = \frac{w}{U}, \quad \pi = \frac{p}{\varrho U^2}, \quad r = \frac{R}{R_0}$$

e il numero di Reynolds

$$Re = \frac{R_0\, U \varrho}{\mu} \tag{2.1}$$

μ essendo la viscosità.

In corrispondenza le distribuzioni di velocità e di pressione nel moto fondamentale si possono scrivere:

$$(2.2) \qquad \begin{cases} u_1^* = \dfrac{c}{r^2} & (c = \pm 1) \\ \pi^* = \dfrac{1}{2}\left\{H - \dfrac{1}{r^4}\right\}. \end{cases}$$

Per studiare come si propaghino piccole perturbazioni introdotte nel moto fondamentale, cerchiamo soluzioni delle equazioni di moto della forma:

$$(2.3) \qquad \begin{cases} u_1 = u_1^* + u_1'(r, \theta, \tau) \\ u_2 = u_2'(r, \theta, \tau) \\ u_3 = 0 \\ \pi = \pi^* + \pi'(r, \theta, \tau) \end{cases}$$

imponendo ad $u_1'(r, \theta, \tau)$, $u_2'(r, \theta, \tau)$ le seguenti condizioni:

$$(2.4) \qquad \begin{cases} u_1(r, \theta, \tau) = 0 & \text{quando } r \to \infty \\ u_2'(r, \theta, \tau) = 0 & \text{quando } r \to \infty. \end{cases}$$

Per quanto riguarda le condizioni su Σ esaminiamo tre casi speciali:

1) Componenti dello sforzo inalterate su Σ

$$(2.5) \qquad \begin{cases} \tau_{rr}' = \varrho U^2 \left\{-\pi' + \dfrac{2}{Re}\dfrac{\partial u_1'}{\partial r}\right\} = 0 & \text{per} \quad r = 1 \\ \tau_{r\theta}' = \dfrac{\mu U}{R_0}\left\{\dfrac{\partial u_2'}{\partial r} - \dfrac{u_2'}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_1'}{\partial \theta}\right\} & \text{per} \quad r = 1. \end{cases}$$

2) Componenti di velocità inalterate su Σ

$$\left\{\begin{array}{l} u_1'(1,\theta,\tau)=0 \\ u_2'(1,\theta,\tau)=0. \end{array}\right. \tag{2.6}$$

3) Caso misto

$$\left\{\begin{array}{l} u_2'(1,\theta,\tau)=0 \\ \tau_{r\theta}'(1,\theta,\tau)=0. \end{array}\right. \tag{2.7}$$

Le equazioni di moto per le (2.3), quando si trascurino i termini di ordine superiore al primo in u_1' e u_2', divengono:

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2 u_1') + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(u_2'\operatorname{sen}\theta) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial u_1'}{\partial\tau} + \dfrac{c}{r^2}\dfrac{\partial u_1'}{\partial r} - \dfrac{2c}{r^3}u_1' = -\dfrac{\partial\pi'}{\partial r} + \dfrac{1}{Re}\left\{\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u_1'}{\partial r}\right) + \right. \\[2ex] \left. + \dfrac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial u_1'}{\partial\theta}\right) - \dfrac{2u_1'}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_2'}{\partial\theta} - \dfrac{2u_2'\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\right\} \\[2ex] \dfrac{\partial u_2'}{\partial\tau} + \dfrac{c}{r^2}\dfrac{\partial u_2'}{\partial r} + \dfrac{c}{r^3}u_2' = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\pi'}{\partial\theta} + \dfrac{1}{Re}\left\{\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial u_2'}{\partial r}\right) + \right. \\[2ex] \qquad \left. + \dfrac{1}{r^2\operatorname{sen}\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\operatorname{sen}\theta\dfrac{\partial u_2'}{\partial\theta}\right) + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u_1'}{\partial\theta} - \dfrac{u_2'}{r^2\operatorname{sen}^2\theta}\right\}. \end{array}\right. \tag{2.8}$$

3. Separazione delle variabili.

3.1. Cerchiamo di soddisfare le (2.8) con funzioni reali del tipo

$$\left\{\begin{array}{l} u_1' = T(\tau)\, m(\theta) f(r) \\ u_2' = S(\tau)\, n(\theta)\, g(r) \\ \pi' = V(\tau)\, p(\theta)\, h(r). \end{array}\right. \tag{3.1}$$

La prima delle (2.8) diviene

$$S(\tau)\, g(r)\, [n'(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, n(\theta)] + T(\tau)\, m(\theta)\, [2f(r) + r f'(r)] = 0 \tag{3.2}$$

che ci mostra come $m(\theta)$ non possa ridursi ad una costante e come nessuna delle funzioni che si trovano ai secondi membri delle (3.1) possa essere identicamente nulla, a meno che non ci si riduca al caso banale. Si noti a questo proposito che l'equazione $n'(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, n(\theta) = 0$ ha soluzione $n(\theta) = A/\operatorname{sen}\theta$, regolare per tutti i θ solo se la costante A è nulla; ed inoltre che, se la (3.2) è verificata quando $g(r) = 0$ e $2f(r) + r f'(r) = 0$, le (2.8) ammettono la soluzione:

$$\begin{cases} u_1' = (E/r^2)\, e^{b\tau} \\ u_2' = 0 \\ \pi' = E\,\{(b/r) - (c/r^4)\}\, e^{b\tau} \end{cases}$$

con E costante. Questa soluzione può verificare le condizioni al contorno solo nel caso banale $E = 0$. D'altra parte come conseguenza delle condizioni al contorno, neppure $f(r)$ può ridursi ad una costante, poichè $f(r) = \text{cost.}$ porta di conseguenza per la (3.2) $g(r) = \text{cost.}$

La (3.2) si può allora scrivere nella forma:

$$\frac{n'(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, n(\theta)}{m(\theta)} = - \frac{T(\tau)}{S(\tau)} \frac{2f(r) + r f'(r)}{g(r)}$$

e dovendo questa eguaglianza essere verificata identicamente rispetto alle tre variabili indipendenti r, θ, τ segue che:

$$\begin{cases} K\, m(\theta) = n'(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, n(\theta) \\ K_1\, g(r) = -\, 2f(r) - r f'(r) \\ K\, S(\tau) = K_1\, T(\tau), \end{cases} \tag{3.3}$$

con K e K_1 costanti certamente non nulle.

D'altra parte, se si tiene conto anche delle (3.3), la seconda e la terza delle (2.8) assumono la forma:

$$
(3.4)\quad \left\{
\begin{aligned}
& T(\tau)\, m(\theta) \left\{ \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} f(r) + \frac{c}{r^2} f'(r) - \frac{2c}{r^3} f(r) \right\} = \\
& \quad = - V(\tau)\, p(\theta)\, h'(r) + \frac{T(\tau)\, m(\theta)}{Re} \left\{ \frac{4}{r} f'(r) + f''(r) + \right. \\
& \qquad \left. + \frac{f(r)}{r^2} \frac{m''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, m'(\theta) + 2m(\theta)}{m(\theta)} \right\} \\
& T(\tau)\, n(\theta) \left\{ - \frac{1}{K} \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} (2rf(r) + r^2 f'(r)) - \frac{c}{K} f''(r) + \right. \\
& \quad \left. - \frac{4c}{Kr} f'(r) - \frac{2c}{Kr^2} f(r) \right\} = - V(\tau)\, p'(\theta)\, h(r) + \\
& \quad + \frac{T(\tau)\, n(\theta)}{Re} \left\{ - \frac{r^2}{K} f'''(r) - \frac{6r}{K} f''(r) + \right. \\
& \qquad \left. - \frac{6}{K} f'(r) - \frac{m'(\theta)}{n(\theta)} f'(r) \right\} .
\end{aligned}
\right.
$$

Per derivazione incrociata si ottiene:

$$
\begin{aligned}
& \left\{ m'(\theta) f(r) + \frac{n(\theta)}{K} (r^2 f''(r) + 4r f'(r) + 2f(r)) \right\} \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = \\
& = m'(\theta) \left\{ \frac{2c}{r^3} f(r) - \frac{c}{r^2} f'(r) \right\} + \frac{n(\theta)}{K} \left\{ \frac{2c}{r^2} f'(r) + \frac{4c}{r^3} f(r) - c f'''(r) + \right. \\
(3.5)\qquad & \left. - \frac{4c}{r} f''(r) \right\} + \frac{m'(\theta)}{Re} \left\{ \frac{4}{r} f'(r) + f''(r) + \right. \\
& \left. + \frac{f(r)}{r^2} \frac{1}{m'(\theta)} \frac{d}{d\theta} (m''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, m'(\theta) + 2m(\theta)) \right\} + \\
& + \frac{n(\theta)}{KRe} \left\{ r^2 f^{\mathrm{IV}}(r) + 8r f'''(r) + 12 f''(r) + \frac{m'(\theta)}{n(\theta)} K f''(r) \right\} .
\end{aligned}
$$

In questa relazione si possono ora separare le variabili.

3.2 Dimostriamo dapprima che nella (3.5) non può essere

$$m'(\theta) f(r) + \frac{n(\theta)}{K} (r^2 f''(r) + 4r f'(r) + 2f(r)) = 0. \tag{3.6}$$

Se fosse verificata la (3.6), si avrebbe

$$\frac{m'(\theta)}{n(\theta)} = N \tag{3.7}$$

con N costante non nulla e

$$r^2 f''(r) + 4r f'(r) + (2 + KN) f(r) = 0. \tag{3.8}$$

Mediante la (3.7), la (3.8) derivata una volta e due volte, la (3.5) si riduce a

$$\frac{d}{d\theta} (m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \, m'(\theta) - KNm(\theta)) = 0$$

da cui

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \, m'(\theta) - KNm(\theta) = A \tag{3.9}$$

con A costante.

Un integrale particolare di questa equazione è

$$m(\theta) = -\frac{A}{KN}.$$

Occupiamoci allora dell'equazione omogenea

$$m''(\theta) + \operatorname{ctg} \theta \, m'(\theta) - KNm(\theta) = 0. \tag{3.10}$$

Se eseguiamo in essa la sostituzione di variabile

$$\varphi = \cos \theta$$

otteniamo l'equazione di Legendre in $m(\varphi)$

$$(1 - \varphi^2) \frac{d^2 m}{d\varphi^2} - 2\varphi \frac{dm}{d\varphi} - KNm = 0.$$

È ben noto che tale equazione ammette soluzioni regolari in $\varphi = \pm 1$ solo se

$$KN = - l(l+1) \tag{3.11}$$

con l intero non negativo (nel nostro caso deve essere $l \neq 0$ poiché $KN \neq 0$); le soluzioni sono allora i polinomi di Legendre

$$m(\theta) = P_l(\cos\theta). \tag{3.12}$$

Pertanto la soluzione della (3.9) regolare per qualunque θ è

$$m(\theta) = B\, P_l(\cos\theta) + \frac{A}{l(l+1)}$$

con B un'altra costante.

Riprendiamo ora in esame la (3.8) che per la (3.11) si scrive

$$r^2 f''(r) + 4rf'(r) + (2 - l(l+1)) f(r) = 0.$$

Essa ha per integrale generale

$$f(r) = Dr^{-(l+2)} + Er^{l-1}$$

con D ed E costanti.

Allora le (3.4) per le (3.8) e la (3.9) si riducono a

$$\left\{\begin{aligned} & T(\tau)\, m(\theta) \left\{\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} f(r) + \frac{c}{r^2} f'(r) - \frac{2c}{r^3} f(r)\right\} = \\ & \qquad\qquad = - V(\tau)\, p(\theta)\, h'(r) + \frac{A\,T(\tau)}{Re} \frac{f(r)}{r^2} \\ & \frac{T(\tau)\, n(\theta)}{K} \left\{\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} (2r f(r) + r^2 f'(r)) - c\,KN \frac{f(r)}{r^2}\right\} = \\ & \qquad\qquad = V(\tau)\, p'(\theta)\, h(r). \end{aligned}\right. \tag{3.13}$$

La prima si può scrivere

$$p(\theta) = \left\{- \frac{T(\tau)}{V(\tau)\, h'(r)} \left(\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} f(r) + \frac{c}{r^2} f'(r) - \frac{2c}{r^3} f(r)\right)\right\} m(\theta) + $$
$$+ \frac{A\,T(\tau)}{Re\, V(\tau)} \frac{f(r)}{r^2\, h'(r)}$$

e poiché $m(\theta)$ non è costante discende

$$A = 0, \; p(\theta) = Sm(\theta) \text{ e } \frac{T'(\tau)}{T(\tau)} f(r) + \frac{c}{r^2} f'(r) - \frac{2c}{r^3} f(r) = -S \frac{V(\tau)}{T(\tau)} h'(r)$$

con S costante.

La seconda delle (3.13) si può ora scrivere nella forma

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} (2r f(r) + r^2 f'(r)) - \frac{cKN}{r^2} f(r) = SNK\, h(r) \frac{V(\tau)}{T(\tau)}$$

e quindi

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = b \text{ da cui } T(\tau) = K_2 e^{b\tau}$$

b, K_2, K_3 altre costanti. In definitiva si ottiene

$$\begin{cases} u_1' = K_2 e^{b\tau} P_l(\cos\theta) \{Dr^{-(l+2)} + Er^{l-1}\} \\ u_2' = \dfrac{K_2}{l(l+1)} e^{b\tau} \dfrac{d}{d\theta} [P_l(\cos\theta)] \{-lDr^{-(l+2)} + (l+1) Er^{l-1}\} \\ \pi' = -\dfrac{K_2}{l(l+1)} e^{b\tau} P_l(\cos\theta) \{b[-lDr^{-(l+1)} + (l+1) E r^l] + \\ \qquad\qquad + cl(l+1)[Dr^{-(l+4)} + Er^{l-3}]\} \end{cases}$$

e questa soluzione può verificare le condizioni al contorno solo nel caso banale $D = E = 0$.

3.3. Non potendo allora essere verificata la (3.6) da soluzioni non banali, dalla (3.5) discende necessariamente

$$\frac{T'(\tau)}{T(\tau)} = b \text{ e quindi } T(\tau) = K_2 e^{b\tau} \tag{3.14}$$

con b e K_2 costanti.

Se si sostituisce questa espressione di $T(\tau)$ in una delle equazioni (3.4), si ricava che

$$\frac{V(\tau)}{T(\tau)} = K_3$$

con K_3 un'altra costante e quindi

$$V(\tau) = K_2 K_3 e^{b\tau}. \tag{3.15}$$

Riscriviamo le (3.4) tenendo conto delle (3.14) e (3.15)

$$\left\{\begin{aligned} & bf(r) + \frac{c}{r^2} f'(r) - \frac{2c}{r^3} f(r) = - K_3 \frac{p(\theta)}{m(\theta)} h'(r) + \\ & + \frac{1}{Re}\left\{ f''(r) + \frac{4}{r} f'(r) + \frac{f(r)}{r^2} \frac{m''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, m'(\theta) + 2m(\theta)}{m(\theta)} \right\} \\ & - \frac{c}{K} f''(r) - \frac{1}{K}\left(br^2 + \frac{4c}{r}\right) f'(r) - \frac{1}{K}\left(2br + \frac{2c}{r^2}\right) f(r) = \\ & \qquad = - K_3 \frac{p'(\theta)}{n(\theta)} h(r) + \frac{1}{Re}\left\{ - \frac{r^2}{K} f'''(r) - \frac{6r}{K} f''(r) + \right. \\ & \qquad \left. - \frac{6}{K} f'(r) - \frac{m'(\theta)}{n(\theta)} f'(r) \right\}. \end{aligned}\right. \tag{3.16}$$

Perchè queste due eguaglianze siano verificate identicamente rispetto a r e θ, debbono necessariamente valere le seguenti relazioni:

$$\left\{\begin{aligned} & p(\theta) = Sm(\theta) \\ & m'(\theta) = Nn(\theta) \\ & m''(\theta) + \operatorname{ctg}\theta\, m'(\theta) - (M-2)\, m(\theta) = 0 \end{aligned}\right. \tag{3.17}$$

con S, N, M altre costanti e

$$\left\{\begin{aligned} & bf(r) + \frac{c}{r^2} f'(r) - \frac{2c}{r^3} f(r) = - SK_3 h'(r) + \\ & \qquad + \frac{1}{Re}\left\{ f''(r) + \frac{4}{r} f'(r) + M \frac{f(r)}{r^2} \right\} \\ & cf''(r) + \left(br^2 + \frac{4c}{r}\right) f'(r) + \left(2br + \frac{2c}{r^2}\right) f(r) = K_3 KSNh(r) + \\ & \qquad + \frac{1}{Re}\{ r^2 f'''(r) + 6r f''(r) + 6f'(r) + KNf'(r) \}. \end{aligned}\right. \tag{3.18}$$

La giustificazione si basa sul fatto che le (3.16) possono ridursi a due relazioni di identità del tipo

$$G(\theta) = F(r)\, G_1(\theta) + F_1(r)$$

e quindi deve necessariamente essere $F(r) = \text{cost.}$ e $F_1(r) = \text{cost.}$ Oppure $G_1(\theta) = \text{cost.}$ e $G(\theta) = \text{cost.}$. Esaminando le varie possibilità che così si ottengono sulle due relazioni si giunge al risultato già indicato.

3.4 Separate così le variabili, basta calcolare $m(\theta)$, $f(r)$ ed $h(r)$ per avere le soluzioni del tipo (3.1). La prima delle (3.3) e la seconda e terza delle (3.17) formano un sistema di tre equazioni differenziali lineari nelle due funzioni incognite $m(\theta)$ ed $n(\theta)$. Si può però constatare che queste equazioni sono fra loro compatibili allora e solo che

$$KN = M - 2. \tag{3.19}$$

La terza delle (3.17) con la (3.19) si riduce alla (3.10); sappiamo che affinché esistano soluzioni regolari per qualunque θ deve essere verificata la (3.11): le soluzioni sono allora date dalle (3.12).

La (3.19) si può ora scrivere nella forma

$$M = 2 - l(l+1) \tag{3.20}$$

con l intero positivo.

Pertanto le (3.1) assumono la forma

$$\begin{cases} u_1'^{(l)} = K_2\, e^{b\tau} P_l(\cos\theta)\, f_l(r) \\ u_2'^{(l)} = \dfrac{K_2}{l(l+1)}\, e^{b\tau} \dfrac{d}{d\theta}[P_l(\cos\theta)]\, \{2f_l(r) + rf_l'(r)\} \\ \pi'^{(l)} = K_2\, SK_3\, e^{b\tau}\, P_l(\cos\theta)\, h_l(r). \end{cases}$$

Le $f_l(r)$ e $SK_3\, h_l(r)$ si calcolano con le (3.18).

Si può a questo punto osservare che il flusso attraverso una superficie sferica σ di centro 0 e raggio $r > 1$ non è alterato dalla perturbazione. Infatti

$$Q = \int_\sigma u_1' \, d\sigma = 2\pi r^2 e^{b\tau} K_2 f_l(r) \int_{-1}^{1} P_l(\varphi) \, d\varphi$$

è nullo perché $P_0(\varphi) = 1$ e per la relazione di ortogonalità dei polinomi di Legendre l'ultimo integrale è nullo.

Restano ora da esaminare le (3.18) con le relative condizioni al contorno.

Ricordando che

$$\begin{cases} \tau_{RR} = -p + 2\mu \dfrac{\partial u_1}{\partial R} \\ \tau_{R\theta} = \mu \left(\dfrac{1}{R} \dfrac{\partial u_1}{\partial \theta} + \dfrac{\partial u_2}{\partial R} - \dfrac{u_2}{R} \right) \end{cases}$$

le (2.5) assumono la forma

$$(3.22) \quad \begin{cases} f'''(1) + (6 - c\,Re) f''(1) + (6 - 3l(l+1) - 4\,c\,Re) f'(1) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 2\,c\,Re\, f(1) = 0 \\ f''(1) + 2f'(1) - (2 - l(l+1)) f(1) = 0 \end{cases}$$

mentre per le (2.6) si ha

$$(3.23) \quad \begin{cases} f\,(1) = 0 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

e per le (2.7)

$$(3.24) \quad \begin{cases} 2f(1) + f'(1) = 0 \\ f''(1) + 2f'(1) - (2 - l(l+1)) f(1) = 0. \end{cases}$$

4. Soluzione delle equazioni in $f(r)$ ed $h(r)$.

Se nelle (3.18) eliminiamo $SK_3 h(r)$ e teniamo conto della (3.20) otteniamo l'equazione

$$
\begin{aligned}
&r^5 f^{\mathrm{IV}}(r) + (8r^4 - c\,Re\,r^3) f'''(r) - [2(l-2)(l+3)r^3 + Re(br^5 + \\
&\qquad + 4cr^2)] f''(r) + [-4l(l+1)r^2 + \\
&- Re(4b\,r^4 - c(2 + l(l+1))r)] f'(r) - (l-1)(l + \\
&\qquad + 2)[-l(l+1)r - Re(br^3 - 2c)] f(r) = 0.
\end{aligned} \tag{4.1}
$$

Le (2.4) suggeriscono di eseguire la sostituzione

$$r = y^{-1}$$

per cui la (4.1) diviene

$$
\begin{aligned}
&y^6 \frac{d^4 f}{dy^4} + (4y^5 + c\,Re\,y^6)\frac{d^3 f}{dy^3} + \{-2l(l+1)y^4 + 2c\,Re\,y^5 - b\,Re\,y^2\}\frac{d^2 f}{dy^2} + \\
&\qquad + \{-c\,Re(4 + l(l+1))y^4 + 2b\,Re\,y\}\frac{df}{dy} + \\
&+ (l-1)(l+2)\{l(l+1)y^2 + b\,Re - 2c\,Re\,y^3\} f = 0.
\end{aligned} \tag{4.2}
$$

Fino a questo punto i nostri sviluppi sono stati sufficientemente generali in modo da consentire eventualmente lo studio di soluzioni del sistema (2.8) dipendenti dal tempo. Come abbiamo annunciato nella introduzione, ci rivolgeremo qui specificatamente alla ricerca di soluzioni stazionarie; la loro importanza deriva dal fatto che ad esse si può spesso attribuire il significato di soluzioni descriventi condizioni di stabilità marginale. Il numero di Reynolds col quale esse possono esistere può spesso essere interpretato come numero critico al disopra del quale la soluzione è instabile. Prendiamo dunque in considerazione la (4.1) con $b = 0$

$$
\begin{aligned}
&y^4 \frac{d^4 f}{dy^4} + \{4y^3 + c\,Re\,y^4\}\frac{d^3 f}{dy^3} + \{-2l(l+1)y^2 + 2c\,Re\,y^3\}\frac{d^2 f}{dy^2} + \\
&- c\,Re(4 + l(l+1))y^2\frac{df}{dy} + (l-1)(l+2)\{l(l+1) - 2c\,Re\,y\} f = 0
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

che ammette, come è facile verificare, i due integrali

$$f_1(y) = y^{1-l}, \quad f_2(y) = y^{2+l}. \tag{4.4}$$

Si noti incidentalmente che essi sono anche integrali della (4.2).

Per trovare gli altri due integrali, eseguiamo nella (4.3) le sostituzioni

$$\begin{cases} f = y^{l+2}\, w(y) \\ w' = z(y). \end{cases} \tag{4.5}$$

Otteniamo l'equazione

$$\begin{aligned} y^3 z''' + \{4(l+3)y^2 + cRe\, y^3\} z'' + \{4(l^2+7l+9)y + cRe(3l+{} \\ + 8)y^2\} z' + \{12(l+1)(l+2) + 2cRe(l+1)(l+5)y\} z = 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

che ammette la soluzione

$$z = y^{-2(1+l)}.$$

Con le ulteriori sostituzioni nella (4.6)

$$\begin{cases} z = y^{-2(1+l)}\, q(y) \\ q' = \eta(y) \end{cases} \tag{4.7}$$

perveniamo all'equazione del secondo ordine di tipo Fuchsiano:

$$y^2\eta'' + \{-2(l-3)y + cRe\, y^2\}\eta' - \{6(l-1) + cRe(l-4)y\}\eta = 0. \tag{4.8}$$

Cerchiamo integrali della (4.8) del tipo

$$\eta = \sum_{h=0}^{\infty} b_h\, y^{\alpha+h}.$$

Otteniamo che α e i b_h debbono verificare le relazioni

$$\begin{cases} \alpha^2 - (2l-5)\alpha - 6(l-1) = 0 \\ \{(h+\alpha+1)(h+\alpha) - 2(l-3)(h+\alpha+1) + {} \\ - 6(l-1)\}\, b_{h+1} + cRe\{(h+\alpha) - (l-4)\}\, b_h = 0. \end{cases} \tag{4.9}$$

La prima di queste ammette le soluzioni :

$$\alpha_1 = -3, \alpha_2 = 2(l-1).$$

Poiché α_1 differisce da α_2 per un intero positivo

$$\alpha_2 = \alpha_1 + (2l+1)$$

nella seconda delle (4.9), il coefficiente di b_{h+1} si annulla per $h = 2l$, quando è $\alpha = \alpha_1$; fortunatamente il coefficiente di b_h si annulla per $h = l - 1$ e quindi i due integrali particolari della (4.8) sono

$$\eta_1 = \sum_{h=0}^{l-1} a_h\, y^{h-3}$$

con

$$a_h = a_0\,(c\,Re)^h \prod_{k=1}^{h} \frac{l-k}{k\,(k-2l-1)} \qquad h \geq 1 \tag{4.10}$$

e la serie di potenze

$$\eta_2 = \sum_{h=0}^{\infty} b_h\, y^{2(l-1)+h}$$

con

$$b_h = b_0\,(-c\,Re)^h \prod_{j=2}^{h+1} \frac{l+j}{(j-1)(2l+j)} \qquad h \geq 1. \tag{4.11}$$

Il raggio di convergenza di quella serie è infinito ; infatti

$$\lim_{h\to\infty} \left| \frac{b_{h+1}}{b_h} \right| = \lim_{h\to\infty} c\,Re\, \frac{l+h+2}{(h+1)(2l+h+2)} = 0.$$

Finalmente per le (4.7) e (4.5) otteniamo i due integrali particolari della (4.3).

$$f_3(y) = -\frac{a_2}{2l+1}\, y^{1-l}\left(\lg y + \frac{1}{2l+1}\right) + \tag{4.12}$$

$$+\, y^{1-l} \sum_{\substack{h=0\\ h\neq 2}}^{l-1} \frac{a_h}{(h-2)(h-2l-3)}\, y^{h-2}$$

con $a_2 = 0$ per $l = 1$ ed $l = 2$; e

$$f_4(y) = \frac{b_2}{2l+1} y^{l+2} \lg y + y^{l+2} \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq 2}}^{\infty} \frac{b_h}{(h-2)(h+2l-1)} y^{h-2}.$$

Ovviamente i quattro integrali particolari della (4.3) trovati valgono su tutto l'asse $y > 0$ che a noi interessa.

5. Ricerca degli autovalori.

5.1. Le (2.4) impongono alla $f(y)$ le seguenti condizioni:

$$\left\{\begin{aligned} &f\,(0) = 0 \\ &f'(0) = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.1}$$

La soluzione della (4.3) che verifica le (5.1) è

$$f(y) = Ay^{l+2} + \tag{5.2}$$

$$+ B\left\{\frac{b_2}{2l+1} y^{l+2} \lg y + y^{l+2} \sum_{\substack{h=0 \\ h\neq 2}}^{\infty} \frac{b_h}{(h-2)(h+2l-1)} y^{h-2}\right\}$$

con A e B costanti.

Prendiamo ora in considerazione alternativamente le condizioni al contorno (3.22), (3.23), e (3.24). Incominciamo con le (3.22); esse impongono alle $f(y)$ le condizioni:

$$\left\{\begin{aligned} &f''(1) - (2 - l(l+1))f(1) = 0 \\ &f'''(1) + c\,Re f''(1) - (2c\,Re + 3l(l+1))f'(1) + 2\,c\,Re f(1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{5.3}$$

Sostituendo la (5.2) nella (5.3) si ottiene un sistema di due equazioni lineari omogenee in A e B. Per l'esistenza di soluzioni non nulle deve essere:

$$\psi(l, c\,Re) = 0 \tag{5.4}$$

dove

$$(5.5) \qquad \psi(l, c\,Re) = 2(l+2)\sum_{h=0}^{\infty} \frac{h^2+4lh+2l^2+1}{h+2l-1} b_h + $$
$$+ c\,Re \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(l+3)h+2l^2+3l-5}{h+2l-1} b_h .$$

Osserviamo subito che se $c = -1$ la $\psi(l, c\,Re) > 0$; infatti, se si associa al termine $(h+1)$-simo della prima serie il termine h-simo della seconda, si ottiene una serie a termini positivi per qualunque l. Possiamo allora asserire che nel caso del moto convergente con le condizioni al contorno (2.5) non esistono soluzioni stazionarie.

Supponiamo allora $c = 1$. In questo caso la $\psi(l, c\,Re)$ si presta bene ad essere trattata numericamente poiché per ogni l ciascuna serie (a segni alternati) da un certo indice in poi ha gli elementi che decrescono in modulo ed inoltre i b_h si possono calcolare iterativamente.

5.2. Per dimostrare che nel caso $c = 1$ esiste almeno un Re che annulla la (5.4), calcoliamo la somma esplicita delle serie che figurano nella (5.5). Il procedimento di calcolo è lo stesso per ogni l e noi ci limiteremo ad eseguirlo solo per $l = 3$.

Innanzitutto si può osservare che ai b_h può essere data la forma:

$$b_h = \frac{(2l+1)!}{(l+1)!} \cdot \frac{(l+h+1)!}{(2l+h+1)!} \cdot \frac{(-Re)^h}{h!}$$

avendo posto $b_0 = 1$.

Per $l = 3$ la $\psi(l, Re)$ si scrive

$$\psi(3, Re) = 420 \left\{ 5 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h^2+12h+19)(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)}{(h+5)(h+6)(h+7)} \cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{(-Re)^h}{(h+5)!} + Re \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(3h+11)(h+1)(h+2)(h+3)(h+4)}{(h+5)(h+6)(h+7)} \cdot \frac{(-Re)^h}{(h+5)!} \right\}$$

oppure, avendo moltiplicato ambo i membri per $(-Re)^7$

$$(-Re)^7\ \psi(3, Re) = 420 \Bigg\{ 5 \Bigg[Re^2 \sum_{h=0}^{\infty} (h^3 + 4h^2 - 5h + 112) \frac{(-Re)^{h+5}}{(h+5)!} +$$

$$- 192\, Re^2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+5}}{(h+5)(h+5)!} - 120 \sum_{h=0}^{\infty} (7h + 25) \frac{(-Re)^{h+7}}{(h+7)!} \Bigg] +$$

$$+ Re \Bigg[Re^2 \sum_{h=0}^{\infty} (3h^2 - 13h + 128) \frac{(-Re)^{h+5}}{(h+5)!} +$$

$$- 48\, Re^2 \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+5}}{(h+5)(h+5)!} - 120 \sum_{h=0}^{\infty} (8h + 41) \frac{(-Re)^{h+7}}{(h+7)!} \Bigg] \Bigg\}.$$

Al secondo membro figurano tre tipi di serie: il primo tipo ha termine generale con denominatore uguale a $(h + 5)(h + 5)!$; il secondo e terzo tipo hanno termine generale con denominatore rispettivamente uguale a $(h + 5)!$ e $(h + 7)!$.

Per il primo tipo si può scrivere

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+5}}{(h+5)(h+5)!} = Re - \frac{Re^2}{4} + \frac{Re^3}{18} - \frac{Re^4}{96} + \sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-Re)^h}{h!\,h}$$

e quindi (vedi [3] p. 229)

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+5}}{(h+5)(h+5)!} = Re - \frac{Re^2}{4} + \frac{Re^3}{18} - \frac{Re^4}{96} - (\gamma + ln\, Re + E_1(Re))$$

in cui γ è la costante di Eulero e $E_1(x) = \int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt$ (con $x > 0$) è l'esponenziale integrale.

Occupiamoci ora delle serie del secondo tipo. Per questo consideriamo le seguenti identità:

$$(-DRe^3 + ERe^2 - FRe + G)\, e^{-Re} = D \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+3}}{h!} +$$

$$+ E \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+2}}{h!} + F \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+1}}{h!} + G \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^h}{h!} =$$

$$= G + (-F - G)\,Re + \left(E + F + \frac{G}{2}\right) Re^2 +$$

$$+ \left(- D - E - \frac{F}{2} - \frac{G}{6}\right) Re^3 + \left(D + \frac{E}{2} + \frac{F}{6} + \frac{G}{24}\right) Re^4 +$$

$$+ \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(- Re)^{h+5}}{(h+5)\,!} \{D\,(h^3 + 12h^2 + 47h + 60) +$$

$$+ E\,(h^2 + 9h + 20) + F\,(h+5) + G\}$$

e calcoliamo le costanti D, E, F e G imponendo che l'ultima serie delle identità considerate sia volta a volta identica alle serie del secondo tipo.

Per quanto riguarda le serie del terzo tipo si opera analogamente prendendo però in considerazione le seguenti identità:

$$(- F\,Re + G)\, e^{-Re} = G + (- F - G) Re + \left(F + \frac{G}{2}\right) Re^2 +$$

$$+ \left(- \frac{F}{2} - \frac{G}{6}\right) Re^3 + \left(\frac{F}{6} + \frac{G}{24}\right) Re^4 + \left(- \frac{F}{24} - \frac{G}{120}\right) Re^5 +$$

$$+ \left(\frac{F}{120} + \frac{G}{720}\right) Re^6 + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-Re)^{h+7}}{(h+7)\,!} \{F\,(h+7) + G\}\,.$$

Eseguiti i calcoli si trova

$$\psi(3, Re) = \frac{420}{Re^7} \{(2Re^5 - 168Re^3 - 1520Re^2 - 6000Re - 14400)\, e^{-Re} +$$

$$+ 14400 - 8400Re + 2720Re^2 + 208Re^3 +$$

$$- (960Re^2 + 48Re^3)\,(\gamma + ln\, Re + E_1\,(Re))\}.$$

Per $l = 1, l = 2$ si ottengono i risultati più semplici:

$$\psi\,(1, Re) = \frac{3}{Re^2} \{(2Re^2 - 12Re - 12)\, e^{-Re} + 12 - 2Re^2\}$$

$$\psi\,(2, Re) = \frac{20}{Re^5} \{(- 3Re^4 + 12\,Re^3 + 126Re^2 + 432\,Re + 576)\, e^{-Re} +$$

$$- 576 + 144\,Re + 18Re^2 - 6Re^3\}$$

Le $\psi(l, Re)$ hanno almeno uno zero; infatti per $Re = 0$ valgono

$$\psi(l, 0) = \frac{2(l+2)(2l^2+1)}{2l-1} > 0$$

mentre nell'intorno sinistro di $Re = \infty$ sono negative.

Si può inoltre vedere che per ogni l la $\psi(l, Re)$ ammette un unico zero.

Per il calcolo degli zeri si è operato sulla (5.5). Si è trovato, se si indica con $\overline{Re}(\overline{l})$ lo zero corrispondente a $\overline{l}$:

$$\overline{Re}(1) \cong 2.04, \ \overline{Re}(2) \cong 3.60, \ \overline{Re}(3) \cong 6.52, \ \overline{Re}(4) \cong 11.63.$$

4.4 Supponiamo ora che le condizioni al contorno a cui deve soddisfare la (5.2) siano le (3.23). Esse impongono alla $f(y)$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f'(1) = 0. \end{cases}$$

Operando come nel caso precedente si ottiene che l'analoga della (5.4) è

$$\psi(l, cRe) = 0$$

con

$$\psi(l, cRe) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{b_h}{h + 2l - 1}.$$

Se $c = -1$, i termini della serie sono tutti positivi e vale perciò la stessa conclusione del caso precedente. Se $c = 1$ si opera, e con più facilità di calcolo, come nel caso precedente. In particolare si ha:

$$\psi(1, Re) = \frac{3}{Re^3}\left\{(Re+1)e^{-Re} - 1 + \frac{Re^2}{2}\right\}$$

$$\psi(2, Re) = \frac{20}{Re^5}\{(-Re^2 - 6Re - 12)e^{-Re} + Re^2 - 6Re + 12\}$$

$$\psi(3, Re) = \frac{210}{Re^7}\{Re^3 + 13Re^2 + 60Re + 180)e^{-Re} +$$

$$-(43Re^2 - 120Re + 180) + 12\,Re^2(\gamma + \ln Re + E_1(Re))\}.$$

Le conclusioni che si traggono sono però diverse. Infatti

$$\psi(l, 0) = \frac{1}{2l - 1} > 0,$$

$\psi(l, Re)$ è sempre positiva, decrescente e tende asintoticamente a zero per $Re \longrightarrow \infty$. Pertanto in questo caso non esistono soluzioni stazionarie.

4.5 Prendiamo infine in considerazione le condizioni al contorno (3.24).

Esse impongono alla $f(y)$

$$\begin{cases} f'(1) - 2f(1) = 0 \\ f''(1) - (2 - l(l+1))\, f(1) = 0. \end{cases}$$

Con procedimento analogo ai casi precedenti si ottiene

$$\psi(l, cRe) = 0$$

dove ora

$$\psi(l, cRe) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{h - 3}{h + 2l - 1}\, b_h.$$

Le conclusioni sono però diverse da quelle precedenti, almeno per quanto riguarda il moto convergente. Dimostriamo infatti che se $c = -1$ la $\psi(l, cRe) = 0$ ammette almeno uno zero qualunque sia l'intero l.

Infatti

$$\psi(l, 0) = -\frac{3}{2l - 1} < 0$$

e se si scrive la $\psi(l, -Re)$ nella forma

$$\psi(l, -Re) = -\frac{3}{2l-1} - \frac{2}{2l}\,\frac{l+2}{2l+2}\, Re +$$

$$-\frac{1}{2l+1}\,\frac{l+3}{2(2l+3)}\,\frac{l+2}{2l+2}\, Re^2 +$$

$$+\frac{(2l+1)!}{(l+1)!} \sum_{h=4}^{\infty} \frac{h-3}{h+2l-1}\,\frac{(l+h+1)!}{(2l+h+1)!}\,\frac{Re^h}{h!}$$

e si osserva che la serie a secondo membro è a termini positivi, si vede che per Re sufficientemente grande è

$$\psi(l, -Re) > 0.$$

Sia allora $c = 1$. Con procedimento già eseguito in precedenza si ha

$$\psi(1, Re) = -\frac{3}{Re^2}\{(Re^2 + 6Re + 6)\, e^{-Re} + 2Re^2 - 6\}$$

$$\psi(2, Re) = \frac{20}{Re^5}\{(Re^3 + 12Re^2 + 54Re + 96)\, e^{-Re} - 6Re^2 + 42Re - 96\}$$

$$\psi(3, Re) = -\frac{210}{Re^7}\{(Re^4 + 20Re^3 + 176Re^2 + 720Re + 1800)\, e^{-Re} +$$

$$-1800 + 1080Re - 356Re^2 + 96Re^2(\gamma + \ln Re + E_1(Re)\}.$$

Le conclusioni sono del tutto uguali all'analogo caso precedente, cioè non esistono soluzioni stazionarie.

BIBLIOGRAFIA

[1] S. GOLDSTEIN, *Modern developments in fluid dynamics*. Vol. 1 Oxford Clarendon Press, (1952).

[2] F. TRICOMI, *Equazioni differenziali*. Einaudi (1948).

[3] *Handbook of Mathematical Functions*. N.B.S. Applied Mathematics, Vol. 55 (1964).

[4] S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamics and Hydromagnetic stability*. Oxford Clarendon Press (1961).

[5] J. C. BURKILL, *The theory of ordinary differential equations*. Oliver and Boyd (1956).

Manoscritto pervenuto in redazione il 23-6-1967