

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO

**Sulle localizzazioni di ideali e moduli di tipo finito
privi di torsione. (Proprietà del chiuso di un
fascio algebrico coerente e liscio)**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 205-218

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__205_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SULLE LOCALIZZAZIONI DI IDEALI E MODULI
DI TIPO FINITO PRIVI DI TORSIONE.
(PROPRIETÀ DEL CHIUSO DI UN FASCIO
ALGEBRICO COERENTE E LISCIO).

SANTUZZA BALDASSARRI GHEZZO *)

Sommario.

Sia V una varietà affine (irriducibile) su un corpo K commutativo algebricamente chiuso, ed $A = A[V]$ il suo anello delle coordinate, il quale è isomorfo all'anello delle sezioni globali del fascio \mathcal{A}_V degli anelli locali di V . Sia inoltre M un A -modulo di tipo finito, il quale può sempre pensarsi come modulo delle sezioni globali d'un fascio \mathcal{M} algebrico coerente su V .

È noto che, detto A_x l'anello locale in un punto (x) di V , se l' A_x -modulo $M_x \simeq M \otimes_A A_x$ è libero di rango r , esiste un aperto U di V contenente (x) , tale che per ogni $(x') \in U$ siano liberi di rango r gli $A_{x'}$ -moduli $M_{x'}$, e sia $(\mathcal{M}/U) \simeq (\mathcal{A}_V^r/U)$.

Inoltre ([1], [7] e [10]) il fascio \mathcal{M} su V è certo libero fuori di un chiuso di cdm 1 in V , mentre se V è normale ed \mathcal{M} privo di torsione, allora \mathcal{M} è localmente libero fuori di un chiuso di cdm > 1 in V .

Nella presente nota dimostro che se I è un ideale d'un dominio d'integrità noetheriano A e $H(I)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi p di A nei quali I possiede localizzazione non libera, $I_p \simeq A_p$, allora accanto alla nota equivalenza:

$$I \subseteq p \iff I_p \neq A_p$$

*) Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

vale la :

$$H(I) \subseteq p \iff I_p \simeq A_p .$$

Da ciò segue anche che se un fascio d'ideali su di una varietà V affine, ha fibra libera in un punto, l'ideale associato ha localizzazioni libere (sui propri anelli locali) in tutti i chiusi propri irriducibili (sottovarietà) della varietà V , passanti per quel punto.

Dimostro poi (n. 13) che: *per ogni ideale I , d'un dominio noetheriano A , l'ideale $H(I)$ non ha divisori primi minimali principali.*

Ciò anche che: *se \mathcal{I} è un fascio d'ideali sulla varietà affine V , e $\chi(\mathcal{I})$ è il chiuso fuori del quale \mathcal{I} è libero, $\chi(\mathcal{I})$ non ha componenti irriducibili di cdm 1 le quali non siano intersezione non completa di V con forme di K^n .*

Inoltre per ogni A -modulo M , detto $H(M)$ l'ideale intersezione degli ideali primi p di A in cui M_p non è libero su A_p , dimostro (n. 10) che per qualsiasi sequenza esatta di A -moduli del tipo

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$$

vale la relazione

$$H(M') \cap H(M'') \subseteq H(M).$$

Dopo di che posso infine dimostrare (n. 14) che: *per ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione, sopra un dominio noetheriano A , l'ideale $H(M)$ non ha divisori primi minimali principali, e quindi anche che: un fascio algebrico coerente e liscio \mathcal{M} di rango $r \geq 1$ sopra una K -varietà algebrica affine non può avere nel suo chiuso $\chi(\mathcal{M})$ componenti irriducibili di cdm. 1, le quali non siano intersezione non completa di V con forme dell'ambiente.*

1. Indicheremo qui sempre con K un corpo commutativo algebricamente chiuso e con K^n lo spazio affine n -dimensionale, dotato della topologia di Zariski, per la quale i chiusi sono tutti e soli gli insiemi algebrici $V(E)$ di K^n costituiti dalle totalità degli zeri delle famiglie E di polinomi di $K[X]$.

Indicheremo inoltre con $D(E)$ gli aperti complementari dei $V(E)$, e con $I(H)$ l'ideale appartenente ad un insieme algebrico H di K^n , cioè l'ideale (radicale) di tutti i polinomi nulli in ogni punto di H .

$I(H)$ sarà primo se e solo se H è irriducibile, (e quindi qui assolutamente irriducibile, poichè K è algebricamente chiuso).

2. Sia V un qualunque sottospazio non vuoto di K^n .

Si dice fascio degli anelli locali di V , il fascio \mathcal{A}_V , determinato dal prefascio (canonico) ottenuto associando ad ogni porzione aperta U di V , l'anello delle applicazioni regolari $U \rightarrow K$, e ad ogni coppia di aperti U e U' , con $U' \subseteq U$, l'omomorfismo canonico $\varphi_{U'}^U$ di restrizione, operante sulle applicazioni $f: U \rightarrow K$ con $\varphi_{U'}^U(f) = f|_{U'}$.

Ogni fibra \mathcal{A}_{V, x_0} di \mathcal{A}_V è un anello locale, il cui ideale massimale è costituito con i germi rappresentati da applicazioni regolari nulle nel punto (x_0) , cioè il cui numeratore appartiene all'ideale del punto (x_0) .

Inoltre il nucleo dell'omomorfismo canonico ε_{x_0} dell'anello $A[x_0]$, delle frazioni regolari in (x_0) , sulla fibra \mathcal{A}_{V, x_0} , che associa ad ogni frazione regolare in (x_0) il germe da essa rappresentato, è l'ideale di $A[x_0]$, formato con gli elementi esprimibili come prodotto di un elemento di $I(V)$, per un elemento di $A[x_0]$. Ideale che si indica con $I(V) \cdot A[x_0]$.

3. Sia, d'ora in poi, V un chiuso irriducibile di K^n e quindi $I(V)$ primo in $K[X]$, allora $I(V) \cdot A[x_0]$ è primo in $A[x_0]$.

Inoltre se $A[V] = K[X]/I(V)$, che indicheremo soltanto con A , è l'anello delle coordinate del chiuso V ; e se p è l'ideale (primo) di A appartenente ad (x_0) , la fibra \mathcal{A}_{V, x_0} di \mathcal{A}_V s'identifica canonicamente con l'anello $S^{-1}A$ delle frazioni di elementi di A con denominatore nella parte moltiplicativa $S = A - p$, anello che indicheremo anche con $A_p \simeq A[x_0]/(I(V) \cdot A[x_0])$, o anche con A_{x_0} .

Dunque ogni germe di \mathcal{A}_{V, x_0} può esser rappresentato in uno ed un sol modo con una frazione, elemento di A_p , ed essendo V irriducibile, \mathcal{A}_{V, x_0} è un dominio d'integrità (per ogni x_0).

4. L'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ delle sezioni globali di \mathcal{A}_V , cioè delle applicazioni di V in K ovunque regolari su V , può identificarsi con l'anello $A = A[V]$ delle coordinate di V .

Inoltre le sezioni di \mathcal{A}_V su un aperto U , $f \in \Gamma(U, \mathcal{A}_V)$, si possono identificare (in modo naturale) con le applicazioni regolari

$f: U \rightarrow K$, tenendo però essenzialmente distinto, per ogni $(x) \in U$, il valore f_x della sezione f nel punto (x) , (elemento della fibra $\mathcal{A}_{V, x}$ di \mathcal{A}_V nel punto (x)), dal valore $f(x)$ della applicazione regolare f nel punto (x) , (elemento di K).

5. Se V è ancora un insieme chiuso irriducibile di K^n con la topologia relativa rispetto a quella di K^n , indicheremo con V anche la varietà affine, sottovarietà chiusa di K^n , definita dallo spazio anellato (V, \mathcal{A}_V) ; e, in generale, diremo varietà algebrica affine ogni spazio anellato (X, \mathcal{A}_X) , isomorfo ad una sottovarietà chiusa di K^n .

Sia dunque V una varietà affine (irriducibile) su K .

L'anello $\Gamma(V, \mathcal{A}_V) \simeq A[V]$, che indicheremo come in 4) con A , risulta evidentemente un dominio d'integrità noetheriano (in quanto immagine omomorfa d'un anello di polinomi in un n^0 finito d'indeterminate sopra un corpo).

Ricordiamo qui che se \mathcal{M} è un fascio algebrico coerente su V , $\Gamma(V, \mathcal{M})$ (o $\Gamma(\mathcal{M})$), è un A -modulo di tipo finito, e $\Gamma(\)$ è funtore covariante esatto sulla categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini V , e omomorfismi algebrici, con valori nella categoria degli A -moduli di tipo finito.

Inoltre per ogni A -modulo di tipo finito M , se si considera su V il fascio costante M a fibra isomorfa ad M , tenuto conto che \mathcal{A}_V è in modo naturale fascio di A -moduli, resta individuato ([10] n° 48) un fascio di \mathcal{A}_V -moduli, cioè, algebrico coerente su V :

$$\mathcal{A}_V \otimes_A M$$

che si indica con $\mathcal{A}(M)$.

Poichè l'essere di tipo finito, per un A -modulo equivale ad ammettere una suriezione del tipo $A^q \rightarrow M \rightarrow 0$, e l'operatore tensoriale è esatto a destra (anzi qui A_x è addirittura piatto), la fibra di $\mathcal{A}(M)$ nel punto $(x) \in V$ è un A_x -modulo di tipo finito (su A_x (n° 3)) che s'identifica con:

$$M_x \simeq M \otimes_A A_x.$$

L'operatore $\mathcal{A}(\)$ risulta funtore covariante esatto sulla categoria degli A -moduli di tipo finito ed A -omomorfismi (se $\mathcal{A}(\varphi) = i_{\mathcal{A}_V} \otimes \varphi$)

con valori nella categoria dei fasci algebrici coerenti su varietà affini e degli omomorfismi algebrici.

(Ricordiamo che A deve essere una K -algebra di tipo finito, priva di nullipotent, affinché la si possa pensare come K -algebra delle sezioni globali del fascio degli anelli locali di qualche varietà affine).

Infine per i funtori $\Gamma(\)$ e $\mathcal{O}(\)$, così definiti valgono gli isomorfismi (canonici) $\Gamma(\mathcal{O}(M)) \simeq M$ e $\mathcal{O}(\Gamma(\mathcal{M})) \simeq \mathcal{M}$.

6. Diciamo che un fascio di \mathcal{A}_V -moduli \mathcal{M} è liscio o privo di torsione, se l' $\mathcal{A}_{V,x}$ -modulo \mathcal{M}_x , fibra di \mathcal{M} nel punto (x) , e quindi l' A_x -modulo $M_x \simeq M \otimes_A A_x$ (con $M = \Gamma(\mathcal{M})$ ed $A = \Gamma(\mathcal{A}_V)$) è privo di torsione per ogni $(x) \in V$, o (il che sopra le varietà V , in quanto hanno il chiuso irriducibile, è lo stesso), se \mathcal{M}_x è privo di germi f_x appartenenti a sezioni $f \in \Gamma(U, \mathcal{M})$, con U aperto contenente (x) , tali che in qualche punto $(x_0) \in U$ sia $f_{x_0} = 0$.

In caso contrario, l'insieme dei germi suddetti costituisce un sottofascio di \mathcal{M} : il sottofascio di torsione $t(\mathcal{M})$.

È noto che se \mathcal{M} è algebrico, coerente e privo di torsione, sulla varietà V esso è isomorfo ad un sottofascio di un \mathcal{A}_V^r , anzi [3] se \mathcal{M} ha rango r , esso ammette una iniezione:

$$0 \rightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{i} \mathcal{A}_V^r \quad (\text{con } \text{supp.}(\mathcal{A}_V^r/i(\mathcal{M})) \neq V),$$

e viceversa.

Ogni fascio algebrico coerente e liscio su di una varietà affine, il quale sia di rango 1, è dunque un fascio d'ideali.

(L'esistenza della i si può dedurre, del resto, dalla analoga ([6] pg. 131) per i moduli di tipo finito, privi di torsione, tramite il funtore \mathcal{O} del n° 5).

7. Diciamo che un fascio algebrico coerente \mathcal{M} , sulla varietà V affine, è localmente libero se l' A_x -modulo M_x è libero di tipo finito su A_x , per ogni (x) di V .

D'altra parte è noto ([7] e [10]) che, se per un $(x) \in V$ l' A_x -modulo M_x è libero, esiste un aperto connesso U di V contenente (x) ed un intero $r \geq 0$, tali che \mathcal{M}/U sia isomorfo ad \mathcal{A}_V^r/U ; e in tal caso sono

anche liberi gli $A_{x'}$ -moduli $M_{x'}$ per ogni $(x') \in U$; ed il rango r di M_x su A_x è costante al variare di (x) in U .

Perciò si può dire che un fascio algebrico coerente è localmente libero su V , se per ogni $(x) \in V$, esiste un aperto U di V contenente (x) tale che \mathcal{M}/U sia isomorfo ad un (\mathcal{A}_V/U) -fascio della forma \mathcal{A}_V^r/U , ed è noto ([10]) che ciò accade se e solo se $\Gamma(V, \mathcal{M})$ è un A -modulo proiettivo.

Inoltre ([7] e [10]) per ogni fascio algebrico \mathcal{M} su V , l'insieme degli $(x) \in V$ tali che M_x sia libero su A_x , è un aperto W non vuoto di V , e su W , per quanto detto prima, il rango r di M_x su A_x sarà localmente costante, ed il fascio \mathcal{M} localmente libero. Il chiuso X complementare di W in V (come è detto al n° 5), V è pensata sempre come sottovarietà chiusa di K^n si dice il *chiuso del fascio* \mathcal{M} , e si indica con $\chi(\mathcal{M})$.

Anzi risulta [1] che ogni fascio algebrico coerente \mathcal{M} è addirittura libero fuori di un chiuso proprio X , cioè sarà su tutto $V - X$, $\mathcal{M}/(V - X) \simeq \mathcal{A}_V/V - X$, e il chiuso X avrà generalmente codimensione 1 in V .

Mario Baldassarri ha dimostrato inoltre [1] che, se si aggiunge alle ipotesi precedenti la condizione che V sia normale, ed \mathcal{M} liscio, esso risulta localmente libero fuori di un chiuso X di V di $\text{cdm} > 1$ su V .

8. OSSERVAZIONE. L'ipotesi della normalità di V è in [1] usata per escludere l'esistenza su V di luoghi singolari di $\text{cdm} = 1$. Mentre l'esempio riportato in [2] nella osservazione di pag. 280 mostra come $M = I = (\bar{x}, \bar{y})$ su $A = K[x, y]/(x^3 - y^2)$, abbia nel punto singolare $(x) = (0, 0)$, localizzazione non libera, (anzi non proiettiva).

Osserviamo che in tale esempio il punto $(0, 0)$ della varietà lo si ottiene sia come sottovarietà dell'ideale (\bar{x}) , cioè su K^2 come $V_1(x, x^3 - y^2)$, ma è in sostanza una componente irriducibile dell'insieme algebrico appartenente all'ideale (\bar{x}, \bar{y}) di A , il quale non è principale, cioè è una componente di $V_1(x, y, x^3 - y^2)$.

In altre parole il chiuso irriducibile costituito dal punto 0 , è intersezione completa di $V(x^3 - y^2)$ con $V(x)$, ma si presenta anche come intersezione non completa di $V(x^3 - y^2)$ con $V(y - mx)$.

Ebbene, vogliamo dimostrare come solo su chiusi siffatti di codimensione 1, di una varietà affine, un fascio algebrico coerente e liscio può essere non libero, e mai su chiusi di codim 1 che si ottengono solo come intersezione completa della varietà con divisori irriducibili dello spazio.

9. Sia ancora V una varietà affine sul corpo K , e quindi il chiuso di V (n^0 5)) abbia l'anello delle coordinate $A \simeq \Gamma(V, \mathcal{A}_V)$ d'integrità e noetheriano.

Sia \mathcal{M} un fascio algebrico coerente di rango r su V , e quindi $M = \Gamma(V, \mathcal{M})$ sia un A -modulo di tipo finito e rango r . Consideriamo l'insieme dei chiusi irriducibili di V sui quali M_p non è libero su A_p , cioè l'insieme, che indichiamo con $\mathbf{H}(M)$, degli ideali primi p di A per cui $M_p \simeq M \otimes_A A_p \not\sim A_p^r$.

Abbiamo detto in 7), che esiste almeno un punto $(x) \in V$ tale che, se p è l'ideale appartenente ad (x) , M_p sia libero su A_p , e che se e soltanto se M è proiettivo, M_p è libero per tutti gli ideali p dei punti di V (v. del resto anche [5] teor. 2 pag. 141).

Dunque in generale l'insieme $\mathbf{H}(M)$ degli ideali p per cui $M_p \not\sim A_p^r$ non è vuoto; indichiamo con $H(M)$ l'ideale intersezione di tutti gli ideali di questo insieme, cioè $H(M) = \bigcap_a p_a$, con $p_a \in \mathbf{H}(M)$.

10. Dimostriamo intanto che, per ogni modulo sopra un anello A , vale il seguente:

LEMMA 1: Se M è un A -modulo per il quale esiste una sequenza esatta del tipo:

$$a) \quad 0 \rightarrow Nc(\varphi) \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} A^q \rightarrow 0,$$

risulta $\mathbf{H}(M) = \mathbf{H}(Nc(\varphi))$.

Infatti, essendo A^q proiettivo, la sequenza $a)$ è spezzante, ed $M \simeq A^q \oplus Nc(\varphi)$, pertanto, ponendo $Nc(\varphi) = M'$, da

$$0 \rightarrow M \rightarrow A^q \oplus M' \rightarrow 0,$$

si ha:

$$0 \rightarrow M \otimes_A A_p \rightarrow (A^q \oplus M') \otimes_A A_p \rightarrow 0$$

e quindi:

$$0 \rightarrow M_p \rightarrow A_p^q \oplus M'_p \rightarrow 0,$$

da cui si vede che M'_p è libero se e solo se lo è M_p , donde l'asserto.

Si può allora dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 1). *Per ogni sequenza esatta di A -moduli, del tipo:*

$$1) \quad 0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0,$$

risulta:

$$2) \quad H(M') \cap H(M'') \subseteq H(M).$$

In altri termini: *per gli insiemi algebrici appartenenti agli ideali $H(\quad)$, vale la reazione:*

$$2') \quad V(H(M')) \cup V(H(M'')) \supseteq V(H(M)).$$

Infatti, localizzando negli ideali primi p , dalla 1) si ottengono sequenze esatte (per la piatezza di A_p) del tipo:

$$0 \rightarrow M'_p \rightarrow M_p \rightarrow M''_p \rightarrow 0.$$

Siano $\mathbf{H}(M')$, $\mathbf{H}(M)$ ed $\mathbf{H}(M'')$ gli insiemi degli ideali in cui non sono liberi rispettivamente M'_p , M_p ed M''_p , allora $H(M') \cap H(M'')$ sarà l'intersezione degli ideali appartenenti all'insieme $\mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'')$, e $H(M)$ l'intersezione degli ideali appartenenti ad $\mathbf{H}(M)$.

Ora se M''_p è libero, per il lemma 1), si ha che, per l'ideale p , l'appartenenza ad $\mathbf{H}(M')$ ed $\mathbf{H}(M)$ si verifica o no simultaneamente, quindi in tal caso:

$$p \in \mathbf{H}(M) \implies p \in \mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'');$$

se invece M''_p non è libero, $p \in \mathbf{H}(M'')$ e quindi $p \in \mathbf{H}(M') \cup \mathbf{H}(M'')$, anche se $p \notin \mathbf{H}(M)$.

Ne segue perciò l'affermazione 2) voluta.

11. Sia ora A un dominio d'integrità noetheriano, ed I un ideale di A , che possiamo considerare come sottomodulo di A , cioè come un A -modulo di tipo finito.

Consideriamo l'ideale $H(I)$, intersezione di tutti gli ideali primi di A , nei quali I ha localizzazione non libera. Analogamente al n° precedente, indicheremo con $\mathbf{H}(I)$ l'insieme di siffatti ideali.

Poichè A è noetheriano, $H(I)$ ammette una rappresentazione normale come intersezione di un numero finito di ideali primari: $H(I) = \cap Q_i$ (nessun Q_i contiene l'intersezione dei rimanenti Q_j (rappresentazione ridotta), ed i divisori primi delle varie componenti primarie Q_i , cioè gli ideali primi associati a $H(I)$, sono tutti distinti).

Osserviamo subito che quì per la definizione di $H(I)$, si ha una rappresentazione normale che dà $H(I)$ come intersezione di ideali primi, tutti appartenenti all'insieme $\mathbf{H}(I)$.

D'altra parte ricordando che per la localizzazione di I in un ideale primo p di A , si ha:

$$I_p = IA_p,$$

e cioè che I_p può considerarsi l'ideale esteso di I nell'anello locale A_p , risulta come è noto, che se $I \subseteq p$ è $IA_p \subseteq pA_p$ e perciò IA_p non contiene elementi invertibili, dunque $IA_p \neq A_p$, anzi si ha l'equivalenza:

$$(1.11) \quad I \subseteq p \iff I_p \neq A_p,$$

poichè se $I \not\subseteq p$, esiste un elemento $f \in I$ che non appartiene a p , e quindi ha immagine invertibile in A_p , per cui $f/f = 1 \in IA_p$ e dunque $IA_p = A_p$.

La (1.11) permette quì di affermare che vale la relazione:

$$I \subseteq H(I).$$

Infatti per ogni ideale $p \in \mathbf{H}(I)$, è certo $I_p \neq A_p$, e quindi risulta $I \subseteq p$.

Ne segue che il chiuso d'un fascio d'ideali \mathcal{J} è contenuto nel chiuso degli zeri dell'ideale $F(\mathcal{J})$.

12. Si può ora dimostrare la seguente:

PROPOSIZIONE 2). *Se $H(I)$ è l'intersezione di tutti gli ideali primi del dominio noetheriano A , nei quali un ideale I di A possiede loca-*

lizzazione non libera, nessun ideale primo p' di A tale che $I_{p'} \simeq A_{p'}$ può contenere $H(I)$.

Si potrà quindi affermare che vale l'equivalenza :

$$(1.12) \quad H(I) \subseteq p \iff I_p \simeq A_p .$$

Infatti se in p è $I_p \simeq A_p$ allora $H(I) \subseteq p$ per la definizione di $H(I)$. Viceversa, sia p' un ideale primo di A che contenga $H(I)$; in tal caso è noto ([8], (2.5)) che p' contiene necessariamente qualche divisore primo minimale p di $H(I)$, il quale, come, osservato in 11), appartiene all'insieme $\mathbf{H}(I)$, cioè si ha $I_p \simeq A_p$.

Vogliamo far vedere che deve essere anche $I_{p'} \simeq A_{p'}$.

Infatti poichè essendo $p \subseteq p'$, esiste il monomorfismo d'anelli dato dall'inclusione :

$$0 \rightarrow A_{p'} \rightarrow A_p ,$$

A_p risulta $A_{p'}$ -modulo (oltre che A -modulo), e quindi si ha :

$$A_p \otimes_{A_{p'}} I_{p'} \simeq A_p \otimes_{A_{p'}} (A_{p'} \otimes_A I) \simeq (A_p \otimes_{A_{p'}} A_{p'}) \otimes_A I \simeq A_p \otimes_A I \simeq I_p .$$

Allora se fosse $I_{p'} \simeq A_{p'}$ seguirebbe

$$A_p \otimes_{A_{p'}} I_{p'} \simeq A_p \otimes_{A_{p'}} A_{p'} ,$$

e quindi risulterebbe anche

$$I_p \simeq A_p ,$$

in contraddizione col fatto che $p \in \mathbf{H}(I)$.

Ciò completa la dimostrazione della proposizione 2), anzi della (1.12).

Ne segue anche che se $p \subseteq p'$ sono ideali di A , ed è :

$$I_{p'} \simeq A_{p'}$$

è anche :

$$I_p \simeq A_p .$$

Infatti $I_{p'} \simeq A_{p'} \implies H(I) \not\subseteq p'$, quindi esiste un elemento di $H(I)$ che non sta in p' è quindi neanche in p . Perciò $H(I) \not\subseteq p$ e quindi $I_p \simeq A_p$.

Cioè in particolare: *se un fascio $\mathcal{A}(I)$ d'ideali su di una K -varietà V affine, ha fibra libera in un punto, I_p è libero su A_p in tutti i chiusi propri $V(p)$ irriducibili della varietà passanti per quel punto.*

Dunque il supporto del chiuso di $H(I)$ contiene tutti e soli i punti in cui $\mathcal{A}(I)$ possiede fibra non libera, e quindi coincide col chiuso del fascio $\mathcal{A}(I)$, (n. 7).

13. Premettiamo ora un'osservazione che ci sarà utile in quel che segue.

Sia ancora A un dominio noetheriano. È noto che una potenza di un ideale primo P di A , può non essere un ideale primario, però per un ideale primo P di A , P è l'unico divisore primo minimale di P^r (per ogni numero naturale r).

Ora se P è primo principale in A , cioè se $P = (f)$ con $f \neq 0$ e non invertibile, $P^r = (f^r)$ e P risulta anche divisore primo massimale di P^r (si verifica facilmente che nel nostro caso P contiene tutti i divisori di zero modulo P^r). Ne segue che P^r ha il solo divisore primo P e quindi è primario per P . ([8], Ch. I, n. 7).

Dimostriamo ora che vale il seguente:

TEOREMA 1) *Per ogni ideale I , d'un dominio d'integrità noetheriano A , l'ideale $H(I)$ non ha divisori primi minimali principali.*

Questo teorema, per quanto è ricordato ai nn. 5) e 7), e tenuto conto del fatto che in un dominio noetheriano ogni ideale primo principale proprio è minimale e quindi di altezza 1, afferma che:

Se V è una varietà affine sul corpo K , ed \mathcal{I} un fascio d'ideali su V , se il chiuso $\chi(\mathcal{I})$ del fascio \mathcal{I} contiene componenti irriducibili di codimensione 1, queste sono forme intersezione non completa di V con forme di K^n .

Dimostrazione del teorema 1): Consideriamo per l'ideale $H(I)$ la rappresentazione normale di cui abbiamo detto al n. 11).

Supponiamo che l'ideale $H(I)$ abbia un divisore primo minimale principale (proprio) P , allora P è minimale fra gli ideali primi che contengono $H(I)$ e per la costruzione stessa della rappresentazione normale di $H(I)$, $P \in H(I)$ quindi $I_P \sim A_P$.

Consideriamo ora una rappresentazione normale dell'ideale I ,

come intersezione finita di ideali primari, sia :

$$1) \quad I = \bigcap_i q_i .$$

Poichè P contiene I (n. 11), P contiene un divisore primo minimale p_i di I , e sarà anzi $P = p_i$, poichè essendo P principale primo nel dominio noetheriano A , esso è anche minimale in A . Dunque P è divisore primo minimale (ideale primo isolato) di I .

Sia $P = (f)$ con $f \neq 0$ e non invertibile; e nella decomposizione 1) primaria normale di I , sia $q_{i_1} \subset P$ la componente primaria ad esso associata univocamente (in quanto P è divisore primo minimale di I). Vista l'osservazione precedente, sarà $q_{i_1} = (f^v)$, per un intero $v \neq 0$, e potremo intanto scrivere la decomposizione sopra considerata $I = \bigcap_i q_i$ nel seguente modo :

$$I = q_{i_1} \cap I' , \text{ dove } I' = \bigcap_{i \neq i_1} q_i ,$$

e q_{i_1} non contiene I' , trattandosi di decomposizione ridotta.

È subito visto che esistono ideali primi associati a $H(I)$ che contengono P e non contengono I' (per es. P stesso, poichè se un ideale primo contiene I' , contiene qualche ideale primo p_j associato ad I' , ma P è divisore primo minimale di I , e la 1) è una rappresentazione normale di I).

Ora essendo A noetheriano esisterà in $\mathbf{H}(I)$ un ideale primo p massimale rispetto alle condizioni ; $f \equiv 0 (p)$ e $I' \not\subseteq p$.

Per un siffatto ideale p sarà intanto $I'_p = A_p$ (n. 11), e di conseguenza

$$I_p = IA_p = (q_{i_1} \cap I') A_p = q_{i_1} A_p ,$$

poichè

$$q_{i_1} I' \subseteq q_{i_1} \cap I' \subset q_{i_1}$$

e dunque

$$q_{i_1} I' A_p \subseteq (q_{i_1} \cap I') A_p \subseteq q_{i_1} A_p$$

dove $I' A_p = I'_p = A_p$.

Ma inoltre è $q_{i_1} A_p \simeq A_p$ nell'isomorfismo $\varphi : f^v \rightarrow 1$.

In conclusione, nelle ipotesi poste, sarebbe $I_p \simeq A_p$ il che è in contraddizione col fatto che $p \in \mathbf{H}(I)$. Se ne deduce che l'ideale $H(I)$ non può avere divisori primi minimali principali.

14. Ricordando ora che ogni fascio algebrico coerente e liscio di rango 1, su una varietà affine è isomorfo ad un fascio \mathcal{I} d'ideali, siamo in grado di dimostrare che :

Un fascio algebrico coerente e liscio \mathcal{M} di rango $r \geq 1$ sopra una varietà V algebrica affine sul corpo K , non può avere nel suo chiuso $\chi(\mathcal{M})$ componenti irriducibili di codimensione 1 le quali non siano intersezione non completa di V con forme dell'ambiente.

Dimostriamo precisamente il seguente :

TEOREMA 2): *Per ogni modulo M di tipo finito, privo di torsione, sopra un dominio d'integrità noetheriano A , l'ideale $H(M)$ non ha divisori primi minimali principali.*

La dimostrazione può farsi per induzione sul rango r di M , poichè per il teorema 1) l'affermazione è vera se M ha rango 1, giacchè in tal caso esso può sempre pensarsi come un ideale di A .

Se $r > 1$, ammettiamo vero il teorema 2) per i moduli di rango $\leq r - 1$, e dimostriamo che di conseguenza esso è vero per $rg(M) = r$.

Sia quindi M di rango r , e consideriamo una iniezione (n^0 6) :

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{i} A^r;$$

componiamo i con la proiezione canonica r -sima :

$$A^r \xrightarrow{p} A \rightarrow 0,$$

cioè restringiamo la p ad $i(M)$; otterremo una sequenza esatta del tipo :

$$0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow I \rightarrow 0$$

dove ora $rg(M') = r - 1$ e $rg(I) = 1$, per cui : $H(M')$ non ha divisori primi minimali principali per l'ipotesi induttiva e $H(I)$ nemmeno per il teorema 1) del n^0 precedente.

Ma per la proposizione 1) del n^0 10)

$$H(M') \cap H(I) \subseteq H(M)$$

e poichè $H(M')$ e $H(I)$ non hanno divisori primi minimali principali non può averne neanche $H(M)$, come volevasi dimostrare.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BALDASSARRI, *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*, Atti del Conv. Internaz. di Geom. Alg. di Torino del 1961.
- [2] S. BALDASSARRI GHEZZO, C. MARGAGLIO e T. MILLEVOI, *Considerazioni sulla conferenza tenuta da M BALDASSARRI a Torino nel 1961: « Osservaz. sulla struttura dei fasci lisci »* Rend. del Seminario Mat. della Univ. di Padova CEDAM, (1966).
- [3] S. BALDASSARRI GHEZZO, C. MARGAGLIO e T. MILLEVOI, *Introduzione ai metodi della geometria algebrica*. Cremonese Roma, (1967).
- [4] N. BOURBAKI, *Algèbre linéaire*. Paris. Hermann, (1962).
- [5] N. BOURBAKI, *Algèbre commutative*. Paris. Hermann, (1961).
- [6] H. CARTAN and S. EILENBERG, *Homological algebra*. Princeton Univ. Press, (1956).
- [7] P. CARTIER, *Questions de rationalité des diviseurs en géométrie algébrique*. Bull. Soc. Math. France. T. 86, (1958).
- [8] M. NAGATA, *Local rings*. Interscience Publishers, (1962).
- [9] D. G. NORTHCOTT, *Ideal theory*. Cambridge at the Univ. Press, (1953).
- [10] J. P. SERRE, *Faisceaux algébriques cohérents*. Annals. of Mathematics. Vol. 61, No. 2. U.S.A., (1955).
- [11] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*. Springer-Verlag. Berlin, (1955).
- [12] O. ZARISKI and P. SAMUEL, *Commutative algebra*. D. van Nostrand Comp. Inc. (1958).

Manoscritto pervenuto in redazione il 6 Marzo 1967.