C. Foias

G. Prodi

Sur le comportement global des solutions non-stationnaires des équations de Navier-Stokes en dimension 2

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 39 (1967), p. 1-34

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__1_0>

SUR LE COMPORTEMENT GLOBAL DES SOLUTIONS NON-STATIONNAIRES DES EQUATIONS DE NAVIER-STOKES EN DIMENSION 2.

par C. FOIAS (Bucarest) et G. PRODI (Pisa) *)

L'étude du comportement global des solutions non stationnaires des équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} + \sum_i u_i \dfrac{\partial u_j}{\partial x_i} - \nu \Delta u_j = f_j - \dfrac{\partial p}{\partial x_j} & (j = 1, 2, \dots, n) \\ \operatorname{div} u = 0, \qquad u/\partial\Omega = 0 \end{cases}$$

a été commencé par LERAY, il y a plus de 30 ans ([10]; cas $\Omega = R^2$). Mais c'est surtout dans le dernier temps qu'il a attiré l'attention de nombreux mathématiciens (voir par exemple les travaux de synthèse [9], [16], [14] ou [18]). En dimension 2 beaucoup de problèmes ont été déjà résolus. Ainsi on connaît aujourd'hui l'existence et l'unicité globale des solutions faibles [7], [11], l'existence des solutions périodiques [12], [19], aussi bien que des conditions effectives pour l'existence des solutions stables [8], [13] ou presque périodiques [15]. Le but de cette Note est de pousser cette étude en démonstrant que le comportement asymptotique des solutions non-stationnaires dépend en un certain sens seulement de la projection de ces solu-

*) Indirizzzo degli A. A.: C. Foias, Depart. of Mathematics, University, Bucarest, Roumania.

G. Prodi, Istituto Matematico, Università, Pisa.

tions sur des espaces de dimension finie, c'est-à-dire du comportement d'un nombre fini de paramètres numériques.

Les démonstration réposent sur une certaine généralisation de la relation de l'énérgie établie par l'un des auteurs dans [12].

§ 1. Préliminaires.

Commençons par rappeler les notions et définitions fondamentales (cf. aussi [12] et [13]).

Soit $\Omega \subset R^2$ un domaine borné et soit L^p l'espace des vecteurs réels $u = (u_1, u_2)$ définis dans Ω mesurables et vérifiant

$$| u |_p = \left[\int_\Omega | u(x) |^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{où} \quad | u(x) | = [u_1(x)^2 + u_2(x)^2]^{\frac{1}{2}} .$$

Soit H^1 l'espace des $u \in L^2$ tels que $\dfrac{\partial u}{\partial x_j} = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_j}, \dfrac{\partial u_2}{\partial x_j} \right) \in L^2$ ($j = 1, 2$; les dérivations étant prises au sens généralisé). La norme dans H^1 est $(| u |^2 + \| u \|^2)^{\frac{1}{2}}$ où $| u |^2 = (u, u)$, $\| u \|^2 = ((u, u))$ et

$$(u, v) = \int_\Omega \left(\sum_i u_i v_i \right) dx \qquad (u, v \in L^2)$$

$$((u, v)) = \int_\Omega \left(\sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) dx \qquad (u, v \in H^1).$$

(Donc : $| u | = | u |_2$).

Soit $\mathcal{N}$ l'espace des vecteurs solenoïdaux (c'est-à-dire $\operatorname{div} u = 0$) définis dans Ω dont les composantes sont indéfiniment différentiables et aux supports compacts dans Ω. On désigne par N, resp. N^1, l'adhérence de $\mathcal{N}$ dans L^2, resp. H^1. Il est évident que dans N^1 $\| u \|$ est une norme équivalente à celle induite par H^1. Il sera utile d'introduire la constante d'immersion $N^1 \subset N$, c'est-à-dire

$$C_\Omega = \sup_{u \in N^1} | u | (\| u \|)^{-1}.$$

Pour $u, v, w \in N^1$ on pose

$$b(u, v, w) = \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j \right) dx.$$

En vertu de l'inégalité

(1) $$|u|_4 \leq 2^{\frac{1}{4}} |u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} \qquad (u \in N^1)$$

de LADYZENSKAYA [7] et de celle évidente

(2) $$|b(u, v, w)| \leq |u|_4 \|v\| |w|_4$$

on déduit que $b(u, v, w)$ est une forme trilinéaire continue sur N^1. De plus on déduit par continuité

(3) $$b(u, v, w) = -b(u, w, v) \qquad (u, v, w \in N^1)$$

(puisque cette relation est évidente pour $u, v, w \in \mathcal{N}$).

Enfin si B est un espace de Banach, $L^p_{\text{loc}}(T_1, T_2; B)$ désignera la réunion des espaces usuels de Lebesgue $L^p((T_1', T_2'); B)$ où $[T_1', T_2'] \subset (T_1, T_2)$.

Cela étant, une fonction $u(t)$ définie sur (T, ∞) est *une solution (faible) des équations de Navier-Stokes* à membre droit

(4) $$f(t) \in L^\infty((T, \infty); L^2)$$

si

(5) $$u(t) \in L^2_{\text{loc}}(T, \infty; N^1) \cap L^\infty_{\text{loc}}(T, \infty; N)$$

et

(6) $$\int_T^\infty [-(u(t), v'(t)) + \nu((u(t), v(t))) + b(u(t), u(t), v(t))]\, dt = \int_T^\infty (f(t), v(t))\, dt$$

quelle que soit la fonction $v(t)$ vérifiant

(i) $v(t)$ est continue de (T, ∞) dans N^1,

(ii) $v(t)$ est dérivable (dans N) et $v'(t) \in L^2_{\text{loc}}(T, \infty; N)$,

(iii) $v(t)$ est à support compact dans (T, ∞).

Il est manifeste que dans (5) les intégrales ont sens. Remarquons aussi que $\nu > 0$ est le coefficient de viscosité. De plus on a les propriétés suivantes :

a) Toute solution peut être considérée continue comme fonction de (T, ∞) à N (*cf.* [12]).

b) Si $T > -\infty$, alors pour tout $u_0 \in N$ il existe une solution (et une seule) dans (T, ∞) telle que

$$\lim_{t \to T+0} u(t) = u_0 ,$$

la limite étant prise dans N (*cf.* [11]).

Finalement, remarquons que l'opérateur de Laplace considèré dans $\mathcal{N}$ engendre dans N un et un seul opérateur autoadjoint D tel que $-D \geq 0$ et $\mathcal{D}_D \subset N^1$. De plus si $A \geq 0$ est la racine carrée de $-D$ alors $\mathcal{D}_A = N^1$ et $\| u \| = | Au |, u \in N^1$. D^{-1}, comme A^{-1}, est un opérateur compact dans N ; c'est ici où intervient le fait que Ω est supposé borné. Par suite il existe un système orthonormal complet $\{w_n\}$ dans N tel que $Dw_n = -\lambda_m w_n$. En choisissant les indices d'une manière convenable nous pouvons considérer

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \to \infty. \tag{7}$$

Rappelons à titre d'information que les w_n sont les solutions (au sens gènéralisé) des équations

$$\Delta w + \text{grad } q = -\lambda w, \text{div } w = 0, w/\partial\Omega = 0.$$

Evidemment $\lambda_1 = (C_\Omega)^{-2}$.

Pour $u \in N$ et $n = 0, 1, 2, \dots$, on posera

$$pr_0 u = 0, \; pr_n u = ((u, w_1), \dots, (u, w_n)) \in R^n. \tag{8}$$

Remarquons aussi que sous des conditions de régularité assez larges on a que pour tout $u \in \mathcal{D}_D$, les dérivées au sens géneralisé $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ appartiennent à L^2 et qu'il existe une constante K_Ω telle que

$$\sum_{i,j} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|_2^2 \leq K_\Omega \, | Du |^2 \qquad (cf. [2] \text{ ou } [17]). \tag{9}$$

§ 2. Une forme généralisée de la relation de l'énergie.

Soient $u(t)$ et $u_1(t)$ deux solutions dans (T, ∞) des équations de Navier-Stokes aux membres droits $f(t)$, resp. $f_1(t)$. Posons

$$w(t) = u(t) - u_1(t) \text{ et } h(t) = f(t) - f_1(t).$$

De (6) on déduit

$$(6') \quad \int_T^\infty [-(w(t), v'(t)) + \nu((w(t), v(t))) + b(u(t), w(t), v(t)) + \\ + b(w(t), u_1(t), v(t))]\, dt = \int_T^\infty (h(t), v(t))\, dt$$

quelle que soit la fonction $v(t)$ vérifiant les conditions (i)-(iii) du § 1. Soit maintenant $T < s < t < \infty$ et soit $v(t)$ une fonction vérifiant les conditions

(i′) $v(t) \in L^2_{\text{loc}}(T, \infty; N^1)$

(ii′) $v(t)$ est dérivable (dans N) et $v'(t) \in L^2_{\text{loc}}(T, \infty; N)$.

Posons

$$v^*(\tau) = \begin{cases} v(\tau) & \text{si } s \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Choisissons une fonction indéfiniment différentiable $e(t)$ telle que

$$e(t) \geq 0, \quad e(t) = e(-t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} e(t)\, dt = 1, \quad e(t) = 0 \quad \text{pour } |t| \geq 1.$$

En considérant $e_\delta(t) = \delta^{-1} e(\delta^{-1} t)$ (pour $\delta > 0$) nous pouvons (pour $\delta > 0$ assez petit) introduire dans (6′)

$$v(\tau) = e_\delta * v^*(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e_\delta(\tau - \sigma)\, v^*(\sigma)\, d\sigma.$$

Pour $\delta \rightarrow 0$ nous avons les convergences

$$e_\delta * v^* \rightarrow v^* \text{ (dans } L^2((T, \infty); N^1)),$$

$$e_\delta * v'^* \rightarrow v'^* \text{ (dans } L^2((T, \infty); N)),$$

et (en tenant compte de la continuité de w)

$$-\int_T^\infty e_\delta(\tau - t)(w(\tau), v(t))\, d\tau = -\int_{-\infty}^\infty e_\delta(t - \tau)(w(\tau), v(t))\, dt \rightarrow -(w(t), v(t))$$

(où l'égalité a lieu pour $\delta > 0$ assez petit) et analoguement

$$\int_T^\infty e_\delta(\tau - s)(w(\tau), v(s))\, d\tau \rightarrow (w(s), v(s)).$$

Ainsi si dans (6′), nous faisons maintenant $\delta \rightarrow 0$, alors en vertu des relations (1), (2) et

$$(e_\delta * v^*)'(\tau) = \int_{-\infty}^\infty e'_\delta(\tau - \sigma)\, v^*(\sigma)\, d\sigma = \int_s^t e'_\delta(\tau - \sigma)\, v(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= -e_\delta(\tau - t)\, v(t) + e_\delta(\tau - s)\, v(s) + \int_s^t e_\delta(\tau - \sigma)\, v'(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= -e_\delta(\tau - t)\, v(t) + e_\delta(\tau - s)\, v(s) + e_\delta * v'^*(\tau)$$

aussi bien de ce que nous savons sur les fonctions u, u_1, w, v (en particulier qu'elles sont continues de (T, ∞) dans N), on obtient aussitôt

$$(10) \quad (w(t), v(t)) - (w(s), v(s)) + \int_s^t [-(w(\tau), v'(\tau)) + \nu((w(\tau), v(\tau))) +$$

$$+ b(u(\tau), w(\tau), v(\tau)) + b(w(\tau), u_1(\tau), v(\tau))]\, d\tau = \int_s^t (h(\tau), v(\tau))\, d\tau$$

puisque par exemple

$$\left|\int_{T}^{\infty} b(u(\tau), w(\tau), v(\tau))\, d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} b(u(\tau), w(\tau), e_\delta * v^*(\tau))\, d\tau\right| \leq$$

$$\leq 2^{\frac{1}{2}} \int_{s-\delta}^{t+\delta} |u(\tau)|^{\frac{1}{2}} \|u(\tau)\|^{\frac{1}{2}} \|w(\tau)\| \, |v^*(\tau) - e_\delta * v^*(\tau)|^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \|v^*(\tau) - e_\delta * v^*(\tau)\|^{\frac{1}{2}} d\tau \leq \text{const.} \int_{s-\delta}^{t+\delta} \|u(\tau)\|^{\frac{1}{2}} \|w(\tau)\| \cdot$$

$$\cdot \|v^*(\tau) - e_\delta * v^*(\tau)\|^{\frac{1}{2}} d\tau \leq \text{const.} \int_{s-\delta}^{t+\delta} \|v^*(\tau) - e_\delta * v^*(\tau)\|^2 d\tau \longrightarrow 0.$$

Soit maintenant $B \geq 0$ un opérateur linéaire borné dans N commutant avec D (ou avec A). Il résulte en particulier $|Bu| \leq |B|\,|u|$, $\|Bv\| = |ABv| = |B\,Av| \leq |B|\,|Av| = |B|\,\|v\|$ $(u \in N,\ v \in N^1)$. Par conséquent en posant

$$w^*(\tau) = \begin{cases} Bw(\tau) & \text{si } s \leq \tau \leq t \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

et par suite

$$v_\delta(\tau) = e_\delta * w^*(\tau) \qquad (\delta > 0 \text{ assez petit}),$$

cette dernière fonction vérifie les conditions (i′) et (ii′). Ainsi nous avons

$$(10') \qquad (w(t), v_\delta(t)) - (w(s), v_\delta(s)) - \int_s^t (w(\tau), v'_\delta(\tau))\, d\tau +$$

$$+ \nu \int_s^t ((w(\tau), v_\delta(\tau)))\, d\tau + \int_s^t [b(u(\tau), w(\tau), v_\delta(\tau)) +$$

$$+ b(w(\tau), u_1(\tau), v_\delta(\tau))]\, d\tau = \int_s^t (h(\tau), v_\delta(\tau))\, d\tau.$$

Or

$$\int_s^t (w(\tau), v'_\delta(\tau))\, d\tau = \int_s^t \int_s^t (w(\tau), Bw(\sigma))\, e'_\delta(\tau - \sigma)\, d\tau\, d\sigma =$$

$$= \int_s^t \int_s^t (B^{\frac{1}{2}} w(\tau), B^{\frac{1}{2}} w(\sigma))\, e'_\delta(\tau - \sigma)\, d\tau\, d\sigma = \iint_{\tau > \sigma} + \iint_{\tau < \sigma} = \iint_{\tau > \sigma} - \iint_{\tau > \sigma} = 0$$

puisque $e'_\delta(\tau - \sigma) = - e'_\delta(\sigma - \tau)$. Par conséquent (10′) devient

$$(10'') \qquad (w(t), v_\delta(t)) - (w(s), v_\delta(s)) + \nu \int_s^t ((w(\tau), v_\delta(\tau)))\, d\tau$$

$$+ \int_s^t [b(u(\tau), w(\tau), v_\delta(\tau)) + b(w(\tau), u_1(\tau), v_\delta(\tau))]\, d\tau = \int_s^t (h(\tau), v_\delta(\tau))\, d\tau.$$

Faisons $\delta \rightarrow 0$ et tenons compte de

$$v_\delta(t) \rightarrow \frac{1}{2} Bw(t), \qquad v_\delta(s) \rightarrow \frac{1}{2} Bw(s) \qquad (\text{dans } N),$$

et des considérations qui nous ont conduit de (6) à (10). Nous obtenons

$$\frac{(w(t), Bw(t)) - (w(s), Bw(s))}{2} + \nu \int_s^t ((w(\tau), Bw(\tau)))\, d\tau$$

$$+ \int_s^t [b(u(\tau), w(\tau), Bw(\tau)) + b(w(\tau), u_1(\tau), Bw(\tau))]\, d\tau = \int_s^t (h(\tau), Bw(\tau))\, d\tau.$$

En résumant nous avons obtenu la suivante *relation généralisée de l'énergie* :

Soient $u(t)$ et $u_1(t)$ deux solutions (faibles) dans (T, ∞) des équations de Navier-Stokes aux membres droits $f(t)$ et $f_1(t)$, selon les cas, et soit $B \geq 0$ un opérateur linéaire borné dans N commutant avec

D. Alors.

$$(11)\qquad \frac{(w(t), Bw(t)) - (w(s), Bw(s))}{2} +$$

$$+ \int_s^t [\nu((w(\tau), Bw(\tau))) + b(u(\tau), w(\tau), Bw(\tau)) +$$

$$+ b(w(\tau), u_1(\tau), Bw(\tau))]\, d\tau = \int_s (h(\tau), Bw(\tau))\, d\tau$$

où $T < s < t < \infty$ *sont arbitraires* (*si* $T > -\infty$ *alors on peut évidemment prendre aussi* $s = T$) *et*

$$w(t) = u(t) - u_1(t), \quad h(t) = f(t) - f_1(t).$$

Avant de finir ce numéro donnons quelques conséquences connues de la relation de l'énergie (*cf.* [13]). Dans ce but remarquons que si dans (11) nous prenons $B = I$, $u_1(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$ et puis nous dérivons, alors nous obtenons la *relation de l'énergie* établie dans [12], notamment

$$(11')\qquad \frac{1}{2}\frac{d\,|u(t)|^2}{dt} + \nu\,\|u(t)\|^2 = (f(t), u(t))$$

où $|u(t)|^2$ est absolument continue.

Désignons maintenant par

$$(12)\qquad [f]_\infty = \operatorname*{vrai\ max}_{T<t<\infty} |f(t)|.$$

Alors de (11′) on déduit facilement l'estimation

$$(13)\qquad |u(t)| \leq |u(s)|\, e^{-\nu\lambda_1(t-s)} + \frac{1}{\lambda_1\nu}[f]_\infty$$

quels que soient $T < s < t < \infty$ (où $T = s$ si $T > -\infty$). Par conséquent on a pour toute solution $u(t)$

$$(13')\qquad \limsup_{t\to\infty} |u(t)| \leq \frac{1}{\lambda_1\nu}[f]_\infty .$$

De même, on peut déduire de (11′) l'inégalité

$$\nu \int_s^t \| u(\tau) \|^2 \, d\tau \leq \frac{1}{2} | u(s) |^2 + [f]_\infty \int_s^t | u(\tau) | \, d\tau$$

d'où en appliquant (13) on en obtient

$$\int_s^t \| u(\tau) \|^2 \, d\tau \leq \frac{1}{2\nu} | u(s) |^2 + [f]_\infty^2 \frac{t-s}{\lambda_1 \nu^2} + | u(s) | \, [f]_\infty \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} . \tag{14}$$

En particulier de cette relation on déduit

$$\int_s^{s+1} \| u(\tau) \|^2 \, d\tau \leq \frac{1}{2\nu} | u(s) |^2 + [f]_\infty^2 \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} + | u(s) | \, [f]_\infty \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} \tag{14′}$$

et

$$\limsup_{t-s \to \infty} \frac{1}{t-s} \int_s^t \| u(\tau) \|^2 \, d\tau \leq \frac{[f]_\infty^2}{\lambda_1 \nu^2} . \tag{14″}$$

Pour d'autres conséquences de (11), correspondantes au cas où $B = I, f(t) \equiv f_1(t)$ ne dépend pas de t et $u_1(t) \equiv u_1$ est une solution stationnaire, nous nous contentons d'envoyer le lecteur à la Note déjà citée [13].

§ 3. La limitation dans N^1 des solutions faibles des équations de Navier-Stokes.

Dès ce moment nous supposerons que Ω vérifie les conditions de régularité exigées par le théorème de CATTABRIGA-VOROVICH-YUDOVICH (voir le § 1), *par exemple que Ω est de classe C^2.*

Commençons par établir le suivant

LEMME. *Soit $u \in \mathcal{D}_D$ et $v \in N$. Alors*

$$| b(u, u, v) | \leq K'_\Omega | u |^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}} (\| u \| + \| u \|^{\frac{1}{2}} | Du |^{\frac{1}{2}}) | v | ,$$

où K'_Ω est une constant dépendant seulement de Ω.

DÉMONSTRATION. On a évidemment

$$|\, b(u, u, v) \,| \leq |\, v \,| \left[\int_\Omega |\, u \,|^2 \,|\, \operatorname{grad} u \,|^2 \, dx \right]^{\frac{1}{2}} \leq |\, v \,| \,|\, u \,|_4 \,|\, \operatorname{grad} u \,|_4 \,.$$

Par l'inégalité de Ladyzenskaya (1) appliquée à $|\, u \,|_4$ on a

$$(15) \qquad |\, b(u, u, v) \,| \leq 2^{\frac{1}{4}} \,|\, v \,| \,|\, u \,|^{\frac{1}{2}} \,\|\, u \,\|^{\frac{1}{2}} \,|\, \operatorname{grad} u \,|_4 \,,$$

mais comme peut-être grad $u \notin N^1$ on appliquera à ce terme la généralisation suivante de l'inégalité de Ladyzenskaya

$$(16) \qquad \left(\int_\Omega \varphi^4 \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{4}} \leq K \left[\left(\int_\Omega \varphi^2 \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} + \right.$$

$$\left. + \left(\int_\Omega \varphi^2 \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{4}} \left(\int_\Omega |\, \operatorname{grad} \varphi \,|^2 \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{4}} \right]$$

où K est une constante dépendante de Ω. En tenant compte de cette inégalité (16) et de l'inégalité (9) on déduit aussitôt

$$|\, \operatorname{grad} u \,|_4 \leq k' \left(\|\, u \,\| + k'' \,\|\, u \,\|^{\frac{1}{2}} \,|\, Du \,|^{\frac{1}{2}} \right)$$

ce qui permet de déduire de (15) l'inégalité exigée.

Il reste à prouver (16). La preuve qui suit est due au Prof. G. STAMPACCHIA.

D'après l'amélioration de GAGLIARDO [6] du théorème d'immersion de SOBOLEV nous avons $W_1^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ donc

$$\left(\int_\Omega \psi^2 \, dx_1 \, dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq k_1 \left(\int_\Omega |\, \operatorname{grad} \psi \,| \, dx_1 \, dx_2 + \int_\Omega |\, \psi \,| \, dx_1 \, dx_2 \right).$$

Appliquons cette inégalité à $\psi = \varphi^2$. Nous obtenons

$$\left(\int_\Omega \varphi^4\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \leq k_1 \left(2 \int_\Omega | \varphi \cdot \operatorname{grad} \varphi \,|\, dx_1\, dx_2 + \right.$$

$$\left. + \int_\Omega \varphi^2\, dx_1\, dx_2\right) \leq k \left[\left(\int_\Omega \varphi^2\, dx_1\, dx_2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \left(\int | \operatorname{grad} \varphi |^2\, dx_2\right)^{\frac{1}{2}} + \int_\Omega \varphi^2\, dx_1\, dx_2\right]$$

d'où (16) s'ensuive facilement. Ceci achève la démonstration du lemme.

Soit maintenant $u(s) \in N^1$ où $u(t)\,(T < t < \infty)$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes. L'ensemble des s vérifiant la condition précédente est évidemment de mesure totale. Soit

$$u_n(t) = \sum_{k=1}^{n} C_k^{(n)}(t)\, w_k$$

choisi de la manière que $C_k^{(n)}(s) = (u(s), w_k)$ et que

$$\left(\frac{du_n(t)}{dt}, w_k\right) + \nu\, ((u_n(t), w_k)) = -\, b\,(u_n(t), u_n(t), w_k) + (f(t), w_k)$$

pour $k = 1, 2, \ldots, n$. Ce choix est possible puisque le système ci-dessus est un système différentiel ordinaire sous forme normale. En multipliant la k-ème équation par $C_k^{(n)}(t)$ et aussi par $\lambda_k\, C_k^{(n)}(t)$ et en sommant séparement les équations obtenues nous aboutissons aux relations suivantes :

(17) $$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} | u_n(t) |^2 + \nu \,\| u_n(t) \|^2 = (f(t), u_n(t))$$

et

(17′) $$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_n(t) \|^2 + \nu \,| D\, u_n(t) |^2 =$$

$$= b\,(u_n(t), u_n(t), Du_n(t)) - (f(t), Du_n(t)).$$

Exactement comme dans la fin du § 2, de la première relation on déduit que

$$(18)\quad \begin{cases} | u_n(t) | \leq | u(s) | e^{-\nu\lambda_1(t-s)} + \dfrac{1}{\lambda_1 \nu} [f]_\infty = h_s(t) \\ \displaystyle\int_t^{t+1} \| u_n(\tau) \|^2 d\tau \leq \frac{1}{2\nu} | u(t) |^2 + [f]_\infty^2 \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} + \\ \qquad\qquad + | u(t) | [f]_\infty \dfrac{1}{\lambda_1 \nu} = k_t . \end{cases}$$

De la relation (17′) nous obtenons (en nous appuyant sur le lemme)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \| u_n \|^2 + \nu | Du_n |^2 \leq K'_\Omega | u_n |^{\frac{1}{2}} \| u_n \|^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot (\| u_n \| + \| u_n \|^{\frac{1}{2}} | Du_n |^{\frac{1}{2}}) | Du_n | + [f]_\infty | Du_n |,$$

d'où, par des calculs simples (en utilisant plusieurs fois l'inegalité $AB \leq \frac{\nu}{2} A^2 + \frac{1}{2\nu} B^2$!), il vient

$$(17'')\quad \frac{d}{dt} \| u_n \|^2 + \nu | Du_n |^2 \leq \frac{K''}{\nu} \Big(| u_n | \| u_n \|^3 + \\ + \frac{1}{\nu^2} | u_n |^2 \| u_n \|^4 \Big) + \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 ,$$

où K'', K''' sont des constantes dépendant seulement de Ω.

En négligeant dans (17″) le terme $\nu | Du_n |^2$, nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \| u_n \|^2 \leq \left\{ \frac{K^{\mathrm{IV}}}{\nu} \left(1 + \frac{| u_n |^2}{\nu^2} \right) \| u_n \|^2 \right\} \| u_n \|^2 + \left\{ \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 \right\}$$

(où on a utilisé aussi l'inégalité $| u_n | \leq C_\Omega \| u_n \|$).

Par l'integration de l'inégalité de ci-dessus, où les parenthèses $\{...\}$ sont considérées des coefficients on aboutit facilement à l'inégalité

$$\| u_n(t') \|^2 \leq \widetilde{K}_{s,t} \left\{ \| u_n(t) \|^2 + \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 \right\} \tag{19}$$

où

$$s \leq t \leq t' \leq t+1 \text{ et } \widetilde{K}_{s,t} = \exp \left\{ \frac{K^{\mathrm{IV}}}{\nu} k_t \cdot \right. \tag{19'}$$

$$\left. \cdot \left[1 + \frac{1}{\nu^2} \sup_{t \leq t' \leq t+1} h_s(t')^2 \right] \right\}.$$

Ceci montre que dans tout intervalle $[s, s+\eta]$, la suite $\{\| u_n(t) \|\}$ est uniformément bornée. On déduit aussitôt des limitations uniformes (en n) pour

$$\int_s^{s+\eta} | Du_n(t) |^2 \, dt \quad \text{et} \quad \int_s^{s+\eta} \left| \frac{du_n}{dt} \right|^2 dt.$$

On peut extraire una suite partielle $\{u_{n_k}\}$, telle que $\{u_{n_k}\}$ converge fortement dans $L^2(s, s+\eta); N)$ vers une fonction $v(t)$ continue de $[s, s+\eta]$ dans N et que $\{Du_{n_k}\}$ et $\left\{\frac{du_{n_k}}{dt}\right\}$ convergent faiblement dans $L^2((s, s+\eta); N)$ vers Dv et $\frac{dv}{dt}$, respectivement, ce qui entraîne en particulier que

$$\int_s^{s+\eta} | Dv(t) |^2 \, dt < \infty. \tag{19''}$$

On peut supposer aussi que $u_{n_k} \to v$ dans $L^\infty((s, s+\eta), N^1)$ dans la topologie faible d'espace dual de $L^1((s, s+\eta), N^1)$. Cela entraîne que $\| v(t) \|$ est essentiellement bornée dans $[s, s+\eta]$.

On peut vérifier ensuite que $v(t)$ est une solution faible des équations de Navier-Stokes dans $\bigcup_{\eta>0}(s, s+\eta] = (s, \infty)$ telle que $v(s) = u(s)$.

Par l'unicité d'une telle solution nous sommes arrivés au résultat partiel suivant :

I. *Soit* $u(t)$ *une solution faible (dans* (T, ∞)*) des équations de Navier-Stokes. Sous l'hypothèse de régularité de* $\partial\Omega$ *discutée au commencenent de ce paragraphe, cette solution vérifie de plus*

$$Du \in L^2_{\mathrm{loc}}((T, \infty), N) \quad \text{et} \quad u \in L^\infty_{\mathrm{loc}}((T, \infty), N^1). \tag{20}$$

Nous pouvons préciser sensiblement ce résultat. Dans ce but, soit

$$P_n v = (v, w_1)\, w_1 + (v, w_2) + \ldots + (v_1\, w)\, w_n$$

et soit dans (11), $B = DP_n = P_n D$, $u_1(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$. Pour $T < s < t$, nous avons donc

$$\frac{\| P_n u(t) \|^2 - \| P_n u(s) \|^2}{2} + \int_s^t [\nu \mid DP_n u(\tau) \mid^2 +$$

$$+ b(u(\tau), u(\tau), DP_n u(\tau))]\, d\tau = \int_s^t (f(\tau), DP_n u(\tau))\, d\tau.$$

Soit $u(s) \in N^1$. En vertu de (20) et du lemme, en faisant $n \to \infty$, nous obtenons que $\{ \| P_n u(t) \|^2 \}$ convèrge uniformément dans $[s, s + \eta]$ vers une limite $\lambda(t)$ vérifiant

$$\frac{\lambda(t) - \| u(s) \|^2}{2} + \int_s^t [\nu \mid Du(\tau) \mid^2 + b(u(\tau), u(\tau), Du(\tau))]\, d\tau =$$

$$= \int_s^t (f(\tau), Du(\tau))\, d\tau.$$

Or

$$\| P_{n+m} u(t) - P_n u(t) \|^2 = \mid P_{n+m} Au(t) - P_n Au(t) \mid^2 =$$

$$= \mid P_{n+m} Au(t) \mid^2 - \mid P_n Au(t) \mid^2 = \| P_{n+m} u(t) \|^2 - \| P_n u(t) \|^2,$$

ce qui montre que $\{P_n u(t)\}$ est une suite de fonctions continues de $[s, s+\eta]$ dans N^1 uniformément convergente. Comme dans N, nous avons $P_n u(t) \longrightarrow u(t)$ pour tout $t \in [s, s+\eta]$, il en découle que $P_n u(t) \longrightarrow u(t)$ dans N^1, uniformément dans $[s, s+\eta]$, ce qui montre que $u(t)$ est une fonction continue de $[s, s+\eta]$ dans N^1, donc aussi de (T, ∞) dans N^1.

Dans la relation d'énergie de ci-dessus, on a donc $\lambda(t) = \| u(t) \|^2$ d'où en dérivant nous obtenons

$$\frac{1}{2} \frac{d \| u(t) \|^2}{dt} + \nu \, | Du(t) |^2 = - b(u(t), \; u(t), \; Du(t)) + (f(t), \; Du(t))$$

relation valable presque partout dans (s, ∞), où d'ailleurs $\| u(t) \|^2$ est absolument continue. Cette relation est identique à (17′). Par conséquent nous pouvons déduire d'elle une relation identique à (19), (19′), c'est-à-dire

$$\| u(t') \|^2 \leq \widetilde{K}_{s,t} \left\{ \| u(t) \|^2 + \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 \right\} \tag{20′}$$

où s, t, t' et $\widetilde{K}_{s,t}$ vérifient (19′). Il résulte que pour $t' \geq s+1$

$$\| u(t') \|^2 \leq \int_{t'-1}^{t'} \widetilde{K}_{s,t} \| u(t) \|^2 \, dt + \int_{t'-1}^{t'} \widetilde{K}_{s,t} \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 \, dt \leq$$

$$\leq \widetilde{\widetilde{K}}_{s,t'} k_{t'-1} + \widetilde{\widetilde{K}}_{s,t'} \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 ,$$

où

$$\widetilde{\widetilde{K}}_{s,t'} = \sup_{t'-1 \leq t \leq t'} \widetilde{K}_{s,t} .$$

Par conséquent

$$\limsup_{t' \to \infty} \| u(t') \|^2 \leq \limsup_{t' \to \infty} \left(k_{t'-1} + \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 \right) \limsup_{t' \to \infty} \widetilde{\widetilde{K}}_{s,t'} =$$

$$= \limsup_{t' \to \infty} \left(k_{t'-1} + \frac{K'''}{\nu} [f]_\infty^2 \right) \limsup_{t \to \infty} \widetilde{K}_{s,t}$$

d'où nous obtenons finalement

$$\limsup_{t\to\infty} \| u(t) \|^2 \le K^{\mathrm{V}} [f]_\infty^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2 \nu^3} + \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} + \frac{1}{\lambda_1^2 \nu^2} + \frac{1}{\nu} \right) \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ \frac{K^{\mathrm{IV}}}{\nu} [f]_\infty^2 \left(\frac{1}{\lambda_1^2 \nu^3} + \frac{1}{\lambda_1 \nu^2} + \frac{1}{\lambda_1^2 \nu^2} \right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda_1^2 \nu^4} [f]_\infty^2 \right) \right\}.$$

Récapitulant nous avons donc

II. *Dans les conditions da la proposition* I, *toute solution faible* $u(t)$ *dans* (T, ∞) *est continue de* (T, ∞) *dans* N^1, *bornée dans tout intervalle* $[s, \infty) \subset (T, \infty)$. *De plus il existe une constante* $\mathcal{C}$ *dépendant seulement de* Ω, $[f]_\infty$ *et* ν *telle que*

$$\limsup_{\to\infty} \| u(t) \| \le \mathcal{C}, \tag{21}$$

et que $\mathcal{C} \longrightarrow 0$ *si* $\dfrac{1}{\nu}$ *or* $[f]_\infty$ *tendent vers* 0.

§ 4. Comportement asymptotique des solutions.

Utilisons la relation généralisée de l'énergie dans le cas où $B = E$ est une projection orthogonale dans N. En dérivant (11) nous obtenons alors

$$\frac{1}{2} \frac{d\,| Ew(t) |^2}{dt} + \nu \| Ew(t) \|^2 + b(u(t), w(t), Ew(t)) +$$
$$+ b(w(t), u_1(t), Ew(t)) = (Eh(t), Ew(t)). \tag{11''}$$

En tenant compte de (1), (2) et (3) nous avons

$$| b(u, w, Ew) | = | b(u, (I-E)w, Ew) | = | b(u, Ew, (I-E)w) | \le$$

$$\le \sqrt{2}\, | u |^{\frac{1}{2}} \| u \|^{\frac{1}{2}} \| Ew \| \; | (I-E)w |^{\frac{1}{2}} \| (I-E)w \|^{\frac{1}{2}}$$

et

$$|b(w, u_1, Ew)| \leq |b(Ew, u_1, Ew)| + |b((I-E)w, u_1, Ew)| \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\, \|u_1\|\, |Ew|\, \|Ew\| + \sqrt{2}\, |u_1|^{\frac{1}{2}} \|u_1\|^{\frac{1}{2}} \|Ew\| \cdot$$

$$\cdot |(I-E)w|^{\frac{1}{2}} \|(I-E)w\|^{\frac{1}{2}};$$

par suite (11″) devient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Ew|^2 + \nu \|Ew\|^2 \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\,(|u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} + |u_1|^{\frac{1}{2}} \|u_1\|^{\frac{1}{2}})\, |(I-E)w|^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \|(I-E)w\|^{\frac{1}{2}} \|Ew\| + \sqrt{2}\, \|u_1\|\, |Ew|\, \|Ew\| + |Eh|\, |Ew|.$$

Désignons par $\mathcal{C}_\sigma$ une constante telle que

$$\|u(t)\| \leq \mathcal{C}_\sigma, \quad \|u_1(t)\| \leq \mathcal{C}_\sigma$$

pour $\sigma \leq t < \infty$ et $\mathcal{C}_\sigma \downarrow \mathcal{C}$ pour $\sigma \to \infty$. Nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Ew|^2 + \nu \|Ew\|^2 \leq 2\sqrt{2C_\Omega}\, \mathcal{C}_\sigma\, |(I-E)w|^{\frac{1}{2}} \cdot$$

$$\cdot \|(I-E)w\|^{\frac{1}{2}} \|Ew\| + \sqrt{2}\, \mathcal{C}_\sigma\, |Ew|\, \|Ew\| + |Eh|\, |Ew|,$$

pour $t \geq \sigma$.

Il vient aisément

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|Ew|^2 + \frac{\nu}{4}\|Ew\|^2 \leq \frac{8C_\Omega \mathcal{C}_\sigma^2}{\nu} |(I-E)w|\, \|(I-E)w\| + \tag{22}$$

$$+ \frac{4}{\nu}\mathcal{C}_\sigma^2 |Ew|^2 + |Eh|\, |Ew|.$$

Posons ici $E = E_n$ où

$$E_n u = (u, w_{n+1}) w_{n+1} + (u, w_{n+2}) w_{n+2} + \dots$$

et tenons compte de ce que

$$| (I - E_n) w | = | pr_n w |, \quad \| E_n w \|^2 \geq \lambda_{n+1} | E_n w |^2$$

et

$$\| (I - E_n) w \|^2 = \Sigma_{k=1}^{n} \lambda_k | (w, w_k) |^2 \leq \lambda_n | pr_n w |^2 .$$

Nous obtenons de (22)

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} | E_n w |^2 + \frac{\nu \lambda_{n+1}}{4} | E_n w |^2 \leq \frac{8 C_\Omega \mathcal{C}_\sigma^2 \sqrt{\lambda_n}}{\nu} | pr_n w |^2 +$$

$$+ \frac{1}{2\delta} | E_n h |^2 + \left(\frac{4}{\nu} \mathcal{C}_\sigma^2 + \frac{\delta}{2} \right) | E_n w |^2$$

(quel que soit $\delta > 0$), d'où pour n assez grand afin que

$$\frac{\nu \lambda_{n+1}}{4} - \frac{4}{\nu} \mathcal{C}_\sigma^2 - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} \tag{23}$$

nous avons finalement

$$\frac{d}{dt} | E_n w |^2 + \delta | E_n w |^2 \leq A_n | pr_n w |^2 + \frac{1}{2\delta} | E_n h |^2. \tag{24}$$

De (24) on déduit aussitôt pour $\sigma \leq s \leq t < \infty$

$$\left\{ \begin{aligned} & | E_n w (t) |^2 \leq | E_n w (s) |^2 e^{-\delta(t-s)} + \\ & \quad + A_n \int_s^t e^{-\delta(t-\tau)} | pr_n w (\tau) |^2 d\tau + \frac{1}{2\delta} \int_s^t e^{-\delta(t-\tau)} | E_n h (\tau) |^2 d\tau. \end{aligned} \right. \tag{24'}$$

Cela étant supposons que

$$| pr_n w (t) | \longrightarrow 0 \quad \text{et} \quad | h (t) | \longrightarrow 0 \quad \text{pour} \quad t \longrightarrow \infty.$$

Alors de (24′) il resulte aussitôt que $|E_n w(t)|^2 \longrightarrow 0$ aussi, donc

$$|w(t)|^2 = |pr_n w(t)|^2 + |E_n w(t)|^2 \longrightarrow 0 \quad (\text{pour } t \longrightarrow \infty).$$

Ainsi nous avons obtenu la proposition suivante (où nous utiliserons déjà le fait que $\mathcal{C}_\sigma \downarrow \mathcal{C}$ pour $\sigma \longrightarrow \infty$ et que σ peut être pris assez grand):

I. *Soient* $u(t)$ *et* $u_1(t)$ *deux solutions dans* (T, ∞) *des équations de Navier-Stokes à membre droit* $f(t)$, *resp.* $f_1(t)$. *On suppose que* Ω *et* $f(t)$, $f_1(t)$ *vérifient les conditions des* §§ 1 *et* 3. *Alors pour* n *vérifiant*

$$\lambda_{n+1} > \left(\frac{4}{\nu}\right)^2 \mathcal{C}^2 \tag{25}$$

nous avons que si $f(t) - f_1(t) \longrightarrow 0$ (*dans* N *pour* $t \longrightarrow \infty$) *et* $pr_n u(t) - pr_n u_1(t) \longrightarrow 0$ (*dans* R^n *pour* $t \longrightarrow \infty$), *alors* $u(t) - u_1(t) \longrightarrow 0$ (*dans* N *pour* $t \longrightarrow \infty$) *aussi.*

Passons maintenant au fait suivant

II. *Soit* $u(t)$ *une solution dans* (T, ∞) *des équations de Navier-Stokes à membre droit* $f(t)$. *On suppose que* Ω *et* $f(t)$ *vérifient les conditions des* §§ 1 *et* 3. *Si* n *vérifie* (25) *et si*

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = F \qquad \text{et} \qquad \lim_{t \to \infty} pr_n u(t)$$

existent (*la première dans* L^2 *et la deuxième dans* R^n), *alors*

$$\lim_{t \to \infty} u(t) = U \qquad (\textit{dans } N)$$

existe aussi et est une solution stationnaire des équations de Navier-Stokes à membre droit F.

Posons $u_h(t) = u(t+h)$. Alors $u_h(t)$ est une solution dans (T, ∞) des équations de Navier-Stokes à membre droit $f_h(t) = f(t+h)$. En vertu de (24′) avec σ assez grand et δ assez petit, nous avons donc

$$|E_n u(t+h) - E_n u(t)|^2 \leq e^{-\delta(t-s)} |E_n u(s+h) - E_n u(t)|^2 +$$

$$+ A_n \int_s^t e^{-\delta(t-\tau)} \, | pr_n u(\tau + h) - pr_n u(\tau) |^2 \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\delta} \int_s^t e^{-\delta(t-\tau)} \, | f(\tau + h) - f(\tau) |^2 \, d\tau$$

où $T < s < t < t + h$ et s est fixé. De la relation précédente on déduit (en tenant compte des hypothèses) sans peine que

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{h > 0} | E_n u(t + h) - E_n u(t) |^2 = 0, \tag{26}$$

puisque les hypothèses entraînent

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{h > 0} | f(t + h) - f(t) |^2 = 0,$$

$$\lim_{t \to \infty} \sup_{h > 0} | pr_n u(t + h) - pr_n u(t) |^2 = 0.$$

La relation (24) nous assure l'existence de $\lim\limits_t u(t) = U$ (dans N). Le fait que U est une solution (stationnaire) des équations de Navier-Stokes se déduit aisément du fait que u est limite uniforme (pour $h \to \infty$) sur tout $[T_0, \infty) \subset (T, \infty)$ des solutions u_h des équations de Navier-Stokes aux membres droits $f_q \to F$ (dans N, uniformément dans tout intervalle $[T_0, \infty) \subset (T, \infty)$, pour $h \to \infty$).

Une propriété moins simple qui découle aussi de (24′) est liée à *la presque périodicité asymptotique*. Rappelons qu'une fonction $u(t)$ définie dans $[0, \infty)$ s'appelle *asymptotiquemeut presque périodique* (a. p. p.) si de toute suite $\{u(t + h_m)\}$ de translations (par $h_m \geq 0$) de $u(t)$ on peut extraire une sous-suite $\{u(t + h_{m_p})\}$ uniformément convergente sur $[0, \infty)$. La convergence a lieu dans la topologie de l'espace des valeurs de $u(t)$. Dans notre cas cet espace sera L^2, N ou R^n.

Remarque. Il convient de faire le remarque que tandis que les fonctions vectorielles presque périodiques ont été considérées par beaucoup des chercheurs (voir par exemple l'exposé de AMERIO [1]), les fonctions vectorielles asymptotiquement presque périodiques (introduites dans le cas numérique par FRÉCHET [5]) semblent avoir été ignorées, bien qu'elles sont beaucoup plus adéquates dans l'étude asymptotique des solutions des équations d'évolution non-reversibles. Ainsi par exemple (comme cela sera remarque à la fin de ce paragraphe) on peut aisément donner un critère effectif pour que *toutes* les solutions non-stationnaires de Navier-Stokes soient asymptotiquement presque périodiques, tandis que d'habitude dans ce cas il peut exister au plus une solution presque périodique (il convient de comparer la suite de ce paragraphe aux travaux [4] et [15]).

Dans cet ordre d'idées nous avons la proposition suivante:

III. *Soit $u(t)$ une solution dans $[0, \infty)$ des équations de Navier-Stokes à membre droit $f(t)$ a. p. p.. Supposons que Ω et $f(t)$ vérifient les conditions des §§ 1 et 3. Soit n assez grand pour que* (25) *soit vérifiée. Alors si $pr_n u(t)$ est aussi a. p. p. il en est de même pour $u(t)$.*

La preuve qui suive est partielement calquée sur une argumentation utilisée dans [4].

Soit donc $\{u(t+h_m)\}$ une suite de translations de $u(t)$. Nous pouvons déjà supposer que $\{f(t+h_m)\}$ et $\{pr_n u(t+h_m)\}$ convergent uniformément sur $[0, \infty)$ puisque $f(t)$ et $pr_n u(t)$ sont supposées a. p. p.. Il est évident aussi que nous pouvons supposer désormais que $0 < h_m \rightarrow \infty$ (puisque au cas contraire, si $h_{m_p} \rightarrow h_0$ on déduit facilement $u(t+h_{m_p}) \rightarrow u(t+h_0)$ (dans N) uniformément dans $[0,\infty)$). Comme $\|u(h_m)\| \leq \mathcal{C}_\sigma$ pour un certain $\sigma_0 > 0$, $\sigma_0 \leq h_m (m=1,2,...)$, nous pouvons extraire une sous-suite $\{h_{m_p}\}$ telle que $u(h_{m_p}) \rightarrow u_0$ dans N, vu que $\{u \mid \|u\| \leq \mathcal{C}_{\sigma_0}\}$ est compacte dans N. Soit $v(t)$ la solution (faible) des équations de Navier-Stokes à membre droit.

$$\lim_{p \to \infty} f(t+h_{m_p}) = g(t)$$

et à donnée initiale v_0. Choisissons σ et δ convenablement afin que (23) et par suite (24') soient vérifiées. Soit $s > \sigma$ fixé. Il est évident que

$$u(t+h_{m_p}) \rightarrow v(t) \qquad \text{(dans } N)$$

pour $p \to \infty$ et cela uniformément dans tout intervalle compact $[0, t_0]$ en particulier dans $[0, s]$. Il nous reste d'envisager la convergence sur l'intervalle $[s, \infty)$. Nous avons

$$| E_n u (t + h_{m_p}) - E_n u (t + h_{m_q}) |^2 \leq$$

$$\leq e^{-\delta(t-s)} \cdot | E_n u (s + h_{m_p}) - E_n u (s + h_{m_q}) |^2 +$$

$$+ A_n \int_s^t e^{-\delta(t-\tau)} | pr_n \; u (t + h_{m_p}) - pr_n \; u (t + h_{m_q}) |^2 \, d\tau +$$

$$+ \frac{1}{2\delta} \int_s^t e^{-\delta(t-\tau)} | E_n f (\tau + h_{m_p}) - E_n f (\tau + h_{m_q}) |^2 \, d\tau.$$

Compte tenu de ce que précède pour $\varepsilon > 0$ donné il existe r_ε tel que pour $p, q \geq r_\varepsilon$ nous avons

$$| pr_n \, u (\tau + h_{m_p}) - pr_n \, u (\tau + h_{m_q}) |^2 < \frac{\varepsilon \delta}{A_n}$$

et

$$| f (\tau + h_{m_p}) - f (\tau + h_{m_q}) |^2 < 2 \varepsilon \delta^2$$

quel que soit $0 \leq \tau < \infty$. Ainsi

$$| E_n u (t + h_{m_p}) - E_n u (t + h_{m_q}) |^2 \leq e^{-\delta(t-s)} \cdot$$

$$\cdot | E_n u (s + h_{m_p}) - E_n u (s + h_{m_q}) |^2 + 2\varepsilon$$

et par suite faisant $q \to \infty$

$$| E_n u (t + h_{m_p}) - E_n v (t) |^2 \leq 2\varepsilon +$$

$$+ e^{-\delta(t-s)} | u (s + h_{m_p}) - v (s) |^2.$$

Cela montre que $E_n u (t + h_{m_p}) \to E_n v (t)$ uniformément sur $[s, \infty)$. Par conséquent $u (t + h_{m_p}) \to v (t)$ uniformément sur $[0, \infty)$ et cela achève notre preuve.

REMARQUES : *a.* Vu que dans (25), $\mathcal{C}^2 \longrightarrow 0$ pour $[f]_\infty \longrightarrow 0$, il résulte que si

$$[f]_\infty \leq \gamma_{\Omega,\nu}$$

(où γ est une certaine constante), alors dans les propositions II, III de ce paragraphe, on peut prendre $n = 0$.

Donc les propositions donnent des critères effectives de stabilité et presque périodicité asymptotique (de toute solution des équations de Navier-Stokes).

b. La proposition I a elle aussi une conséquence directe qui ne semble pas dépourvue d'intérêt, notamment la suivante :

Si $f(t) \equiv F$ ne dépend pas de t et u, v sont deux solutions stationnaires des équations de Navier-Stokes alors, dès que n est assez grand pour que (25) soit valable, on a que

$$pr_n\, u = pr_n\, v \Longrightarrow u = v.$$

Cela signifie que *sous la condition de régularité de $\partial\Omega$ l'ensemble des solutions* **stationnaires** *des équations de Navier-Stokes est homeomorphe à un sous-ensemble compact de R^n.*

§ 5. Quelques considérations ergodiques sur les solutions des équations de Navier-Stokes.

Une mesure $\mu \geq 0$ définie sur les ensembles boreliens de N, telle que $\mu(N) = 1$ s'appelle invariante lorsque

$$\mu(T_\tau^{-1} A) = \mu(A) \qquad (A \subset N),$$

où $T_\tau\,(\tau \geq 0)$ est le transformation dans N définie par $u_0 \longrightarrow T_\tau u_0 = u(\tau_0)$ la valeur en τ_0 de la solution faible $u(t)$ des équations de Navier-Stokes à *membre droit f indépendant de t,* telle que $u(0) = u_0$. Il est manifeste que toute mesure borélienne $\mu \geq 0$ de mesure totale $= 1$ ayant le support inclus dans l'ensemble des solutions stationnaires (c'est-à-dire telles que $u(\tau) \equiv u_0$) est automatiquement invariante. Une condition nécéssaire et suffisante pour l'existence d'une mesure invariante n'ayant pas le support inclus dans l'ensemble des solutions stationnaires a été donnée dans [13]. De plus, dans ce même travail [13] on a montré, en s'appuyant sur (11) et (14″) que pour toute mesure μ invariante on a

$$\mu(\{u \mid u \in N,\ |u| \leq \lambda_1^{-1} \nu^{-1} |f|\}) = 1 \tag{27}$$

et

$$\mu(\{u \mid u \in N^1,\ \|u\| \leq n\}) \geq 1 - n^{-1} \lambda_1^{-1} \nu^{-2} |f|^2. \tag{28}$$

En particulier (28) entraîne

$$\mu(N^1) = 1. \tag{28'}$$

Complétons ces faits par la suivante remarque, donnée dans le but de faciliter la compréhension des considérations supplémentaires faites dans la suite sous l'hypothèse que $\partial\Omega$ soit régulière.

I. *Soit μ une mesure invariante alors*

$$\int \|u\|^2 d\mu \leq \lambda_1^{-1} \nu^{-2} |f|^2 \tag{29}$$

et

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t u(\tau)\, d\tau = u^* \tag{29'}$$

existent (au sens fort) dans N pour toute donnée initiale $u(0) = u_0$ en dehors d'un ensemble de mesure μ-nulle. De plus on a

$$u^* \in N^1 \quad \text{et} \quad \|u^*\| \leq \lambda_1^{-1/2} \nu^{-1} |f| \tag{29''}$$

chaque fois que u^* existe.

Soit $M \subset N$ un sous-ensemble dénombrable dense dans N, qui soit un espace vectoriel par rapport aux scalaires rationnels. Vu le théorème de Birkhoff [1]), il existe un ensemble de mesure μ-nulle Q

[1]) Pour ce qui concerne la théorie ergodique voir par exemple [3], ch. VIII, § 7.

tel que si $u \notin Q$ alors

$$\lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t (u(\tau), a)\, d\tau = g(a) \qquad (\text{où } u(\tau) = T_\tau u)$$

existe pour tout $a \in M$. Il est manifeste que

$$g(\alpha a + \beta b) = \alpha g(a) + \beta g(b) \qquad (\alpha, \beta \text{ rationnels}, a, b \in M)$$

et que

$$|g(a)| \leq \frac{|f|}{\nu \lambda_1} |a| \qquad (a \in M).$$

Par continuité il découle qu'il existe un $u^* \in N$ tel que $g(a) = (u^*, a)$ pour tout $a \in M$, puis, de nouveau par continuité, on en déduit que

$$(29''') \qquad v_t = \frac{1}{t} \int_0^t u(\tau)\, d\tau \longrightarrow u^* \qquad (\text{pour } t \longrightarrow \infty)$$

faiblement dans N. Or d'une part $v_t \in N^1$ et

$$(30) \quad \| v_t \| \leq \frac{1}{t} \left\| \int_0^t u(\tau)\, d\tau \right\| \leq \frac{1}{t} \int_0^t \| u(\tau) \|\, d\tau \leq \left(\frac{1}{t} \int_0^t \| u(\tau) \|^2 d\tau \right)^{1/2}$$

et d'autre part (14″) nous montre que

$$(30') \qquad \limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \| u(\tau) \|^2 d\tau \leq \frac{|f|^2}{\lambda_1 \nu^2}.$$

Vu la compacité de l'imersion identique de N^1 dans N il vient de (29″) et (30)-(30′) que actuellement $v_t \longrightarrow u^*$ fortement dans N ce qui prouve (29′).

Soit maintenant $P_n = I - E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ la projection orthogonale dans N sur l'espace de premiers vecteurs propres $w_1, w_2, \ldots, w_n$ de $-D$ (cf. § 1). Alors $P_n \longrightarrow I$ dans N (où la convergence a lieu fortement, I étant l'opérateur identique de N) et, vu que AP_n est borné, nous avons $AP_n v_t \longrightarrow AP_n u^*$. Ainsi, il vient

$$|AP_n u^*| = \lim_{t\to\infty} |AP_n v_t| = \lim_{t\to\infty} |P_n Av_t| \leq \limsup_{t\to\infty} \| v_t \| \leq \lambda_1^{-1|2} \nu^{-1} |f|$$

quel que soit $n = 1, 2, \ldots$. Or

$$O \leq | AP_{n+p}u^* - AP_n u^* |^2 = | AP_{n+p}u^* |^2 - 2 (AP_{n+p}u^*, AP_n u^*) +$$

$$+ | AP_n u^* |^2 = | AP_{n+p}u^* |^2 - 2 (AP_{n+p}u^*, P_n AP_n u^*) + | AP_n u^* |^2 =$$

$$= | AP_{n+p}u^* |^2 - 2 (AP_n P_{n+p}u^*, AP_n u^*) + | AP_n u^* |^2 =$$

$$= | AP_{n+p}u^* |^2 - | AP_n u |^2$$

puisque $\{| AP_n u^* |^2\}$ est une suite non-décroissante bornée. Ainsi $AP_n u^* \longrightarrow v$ dans N. Comme A est fermé nous avons donc $u^* \in \mathcal{D}_A = N^1$ et $Au^* = v$ ce qui achève le démonstration de (29'').

Quant à (29) on procède comme il suit. Soit $\Phi_n(u) = | AP_n u |^2$; c'est une fonction bornée sur la boule considérée dans (27), donc intégrable. Per le théorème de Birkhoff nous avons donc

$$\int \Phi_n(u)\, d\mu(u) = \int \Phi_n^*(u)\, d\mu(u) \tag{31}$$

où μ-presque partout

$$\Phi^*(u) = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Phi_n(u(\tau))\, d\tau.$$

Or en vertu de (30') et du fait que $| AP_n u |^2 \leq \| u \|^2$ nous avons

$$\Phi^*(u) \leq \lambda_1^{-1} \nu^{-2} |f|^2 \qquad \mu\text{-presque partout.}$$

Ainsi (31) donne

$$\int | P_n Au |^2\, d\mu(u) \leq \frac{|f|^2}{\lambda_1 \nu^2}$$

où $| P_n Au |^2 \longrightarrow \| u \|^2$, ce qui montre que (29) résulte maintenant par une application directe du théorème de B. Levi.

Dans ces considérations on n'a imposé à $\partial\Omega$ aucune restriction de regularité. Par suite *dorénavant nous supposerons que $\partial\Omega$ remplit la condition de régularité du* § 3. Dans ce cas commençons d'abord par la remarque suivante qui constitue l'amélioration des relations (27)-(28′) due à la régularité de $\partial\Omega$.

II. *Soit μ une mesure invariante. Alors*

$$\mu(\{u \mid u \in N^1,\ \| u \| \leq \mathcal{C}\}) = 1, \tag{32}$$

où $\mathcal{C}$ est la constante envisagée dans le proposition II § 3. *En particulier le support Σ de μ est compact dans N.*

Le démonstration de (32) reproduit celle de (27) donnée dans [13]. À cet effect soit $\chi_\varepsilon(u)$ la fonction caractéristique de

$$\{u \mid u \in N^1,\ \| u \| \leq \mathcal{C} + \varepsilon\}.$$

Par le théorème de Birkhoff nous avons que

$$\frac{1}{t}\int_0^t \chi_\varepsilon(T_\tau u)\, d\tau \longrightarrow \chi_\varepsilon^*(u) \qquad (\mu - pp)$$

et que

$$\int \chi_\varepsilon\, d\mu = \int \chi_\varepsilon^*\, d\mu.$$

Or en vertu de la proposition II. § 3 nous avons $\chi_\varepsilon^*(u) \equiv 1$ donc

$$\mu(\{u \mid u \in N^1,\ \| u \| \leq \mathcal{C} + \varepsilon\}) = \mu(N) = 1.$$

Faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$ on obtient (32).

En vertu de cette proposition on déduit aisément que

$$\int \| E_n u \|\, d\mu(u) \longrightarrow 0 \qquad (n \longrightarrow \infty) \tag{33}$$

$$\sup_{u \in \Sigma} | E_n u | \leq \frac{\mathcal{C}}{\sqrt{\lambda_{n+1}}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{33′}$$

car $\Sigma \subset N^1$, donc $\| E_n u \| \longrightarrow 0$ sur Σ, et que $\| E_n u \| \geq \sqrt{\lambda_{n+1}}\, | E_n u |$.

La relation généralisée de l'énergie nous permet d'améliorer les relations (33)-(33').

Dans ce but reprenons l'égalité (11'') avec $E = E_n$, $f(t) \equiv f$ et $f_1(t) \equiv u_1(t) \equiv 0$. Nous avons

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|E_n u|^2 + \nu \|E_n u\|^2 = -b(u, u, E_n u) + (f, E_n u) \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\, |u|^{\frac{1}{2}} \|u\|^{\frac{1}{2}} |E_n u|^{\frac{1}{2}} \|E_n u\|^{\frac{1}{2}} + |f|\,|E_n u| \leq$$

$$\leq \mathcal{C} \sqrt[14]{\lambda_{n+1}}\, \|E_n u\| + |f| \sqrt{\lambda_{n+1}}\, \|E_n u\| \leq \frac{\mathcal{C}''}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}} \|E_n u\|$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}|E_n u|^2 + \nu \|E_n u\|^2 \leq \frac{\mathcal{C}''}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}} \|E_n u\| \tag{34}$$

où $\mathcal{C}'$ est une constante qui dépend de Ω et $|f|$. De (34) on déduit sussitôt

$$\nu \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|E_n u(\tau)\|^2 d\tau \leq \frac{\mathcal{C}''}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{t}\int_0^t \|E_n u(\tau)\|\, d\tau. \tag{35}$$

Soit maintenant

$$\varphi(u) = \|E_n u\| \qquad \text{et} \qquad \psi(u) = \|E_n u\|^2.$$

D'apès le théorème de Birkhoff nous avons

$$\frac{1}{t}\int_0^t \varphi(T_\tau u)\, d\tau \longrightarrow \varphi^*(u), \quad \frac{1}{t}\int_0^t \psi(T_\tau u)\, d\tau \longrightarrow \psi^*(u)$$

$\mu - pp$ pour $t \longrightarrow \infty$, et

$$\int \varphi\, d\mu = \int \varphi^*\, d\mu, \quad \int \psi\, d\mu = \int \psi^*\, d\mu.$$

Or en vertu de (35) nous avons

$$\nu\psi^*(u) \leq \frac{\mathcal{C}''}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}}\,\varphi^*(u) \qquad (\mu - pp)$$

et par suite

$$\nu \int \psi \, d\mu \leq \frac{\mathcal{C}''}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}} \int \varphi \, d\mu,$$

c'est-à-dire

$$\nu \int \| E_n u \|^2 \, d\mu(u) \leq \frac{\mathcal{C}''}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}} \int \| E_n u \| \, d\mu(u).$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz on en déduit aussitôt la première égalité de la proposition suivante :

III. *Si μ est une mesure invariante et Σ est son support alors pour $n \longrightarrow \infty$ on a*

$$(36) \qquad \int \| E_n u \| \, d\mu(u) \leq \frac{\mathcal{C}''}{\nu} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}}}$$

et

$$(36') \qquad \sup_{u \in \Sigma} | E_n u | \leq \frac{\mathcal{C}''}{\nu} \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda_{n+1}^3}}$$

où $\mathcal{C}''$ est une constante dépendant seulement de Ω et $|f|$.

Il nous reste à prouver (36'). Pour cela il suffit de démontrer que

$$(37) \qquad \limsup_{t \to \infty} | E_n u(t) | \leq \frac{\mathcal{C}''}{\nu} \lambda_{n+1}^{-\frac{3}{4}} = \mathcal{C}_n''$$

quelle que soit la solution u des équations de Navier-Stokes. En effet de (37) nous pouvons déduire, par le même argument que celui utilisé dans la démonstration de la proposition II (cf. (32)), que pour $\varepsilon > 0$

$$\mu(\{u \mid u \in N, | E_n u | \leq \mathcal{C}_n'' + \varepsilon\}) = 1$$

d'où (36′) résulte en faisant $\varepsilon \longrightarrow 0$. Quant à (37) remarquons que de (34) il vient facilement

$$\frac{d}{dt} \mid E_n u \mid^2 + \nu \lambda_{n+1} \mid E_n u \mid^2 \leq \frac{d}{dt} \mid E_n u \mid^2 + \nu \parallel E_n u \parallel^2 \leq \frac{\mathcal{C}''^2}{\nu \sqrt{\lambda_{n+1}}}$$

d'où

$$\mid E_n u(t) \mid^2 \leq \mid E_n u(0) \mid^2 e^{-\nu\lambda_{n+1}t} + \left(\frac{\mathcal{C}''}{\nu}\right)^2 \lambda_{n+1}^{-\frac{3}{2}} (1 - e^{-\nu\lambda_{n+1}t})$$

ce qui évidemment entraîne (37).

Nous allons donner maintenant l'amélioration de la proposition I due de nouveau au fait que $\partial\Omega$ est soumise à la condition de régularité du § 3.

IV. *Soit μ une mesure invariante. Alors*

$$\int \mid Du \mid^2 d\mu(u) \leq \mathcal{C}^{\mathrm{IV}} \tag{38}$$

et si u^* est la limite définie par (28) *alors*

$$u^* \in \mathcal{D}_D \ \ et \ \mid Du \mid \leq \sqrt{\mathcal{C}^{\mathrm{IV}}}. \tag{38′}$$

Ici $\mathcal{C}^{\mathrm{IV}}$ est une constante qui dépend de Ω, ν et $|f|$, mais ni de μ ni de u.

Pour démontrer (38), écrivons d'abord la relation généralisée de l'energie (11) dans le cas où $u_1(t) \equiv f_1(t) \equiv 0$, $f(t) \equiv f$, $B = -DP_n$ et $s = 0$:

$$\frac{1}{2}(\parallel P_n u(t) \parallel^2 - \parallel P_n u(0) \parallel^2) + \int_0^t \nu \mid DP_n u(\tau) \mid^2 d\tau =$$

$$= \int_0^t b(u(\tau), u(\tau), DP_n u(\tau))\, d\tau + \int_0^t (f, DP_n u(\tau))\, d\tau.$$

Soit $u(0) = u \in \Sigma$. D'après le lemme du § 3 nous avons

$$\frac{1}{2}(\| P_n u(t) \|^2 - \| P_n u(0) \|^2) + \nu \int_0^t | DP_n u(\tau) |^2 d\tau \leq$$

$$\leq K'_\Omega \int_0^t | u |^{1/2} \| u \|^{1/2} (\| u \| + \| u \|^{1/2} | Du |^{1/2}) | DP_n u | d\tau +$$

$$+ \int_0^t |f| | DP_n u | d\tau \leq \mathcal{C}_1 t + \mathcal{C}_2 \int_0^t | Du |^{3/2} d\tau + \frac{\nu}{4} \int_0^t | Du |^2 d\tau \leq$$

$$\leq \mathcal{C}_3 t + \frac{\nu}{2} \int_0^t | Du |^2 d\tau$$

où C_1, C_2 et C_3 sont des constantes indépendentes de u (puisque $u(0) \in \Sigma$. La dernière intégrale existe en vertu de la proposition I du § 3 (voir (19″), où l'on peut prendre $s = 0$). Par suite en faisant $n \longrightarrow \infty$ nous obtenons facilement

$$\| u(t) \|^2 - \| u(s) \|^2 + \frac{\nu}{2} \int_0^t | Du(\tau) |^2 d\tau \leq \mathcal{C}_3 t$$

d'où en posant $\mathcal{C}^{\mathrm{IV}} = 2\, \mathcal{C}_3 \nu^{-1}$ et en utilisant II. § 3 nous obtenons finalement

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{1}{t} \int_0^t | Du(\tau) |^2 d\tau \leq \mathcal{C}^{\mathrm{IV}} . \tag{39}$$

De cette relation on déduit maintenant (38) et (38″) exactement de la manière que (28) et (28″) on été déduites de (30′), en remplaçant A par D. Vu la facilité de cette transcription nous laissons les détails au lecteur.

Remarque. Les proposition I et IV montrent que statistiquemente presque chaque solution des équations de Navier-Stokes se régularise! D'ailleurs dans la cas où μ serait ergodique les relations (28″) et (38′) découleraient directement des relations (28) et (38), selon les cas, et du fait que dans ce cas

$$u^* = \int u \, d\mu(u).$$

OUVRAGES CITÊS

[1] L. AMERIO : *Abstract almost-periodic functions and functional equations.* Boll. della Unione Mat. Italiana, 20, 1965, 287-334.

[2] L. CATTABRIGA : *Su un problema relativo al sistema di equazioni di Stokes.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 31, 1961, 308-340.

[3] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ : *Linear Operators. Part. I: General theory* (New York, 1958).

[4] C. FOIAS : *Essais dans l'étude des solutions des équations de Navier-Stokes. L'unicité et la presque-périodicité des solutions « petites ».* Rend. Sem. Mat. Univ Padova, 32, 1962, 261-294.

[5] M. FRÉCHET : *Sur les fonctions asymptotiquement presque-périodiques,* Revue Scientifique, Paris (1941).

[6] E. GAGLIARDO : *Proprietà di alcune classi di funzioni in più variabili.* Ricerche di Matematica, 7, 1958, 102-137.

[7] O. A. LADYZENSKAYA : *Solution globale du problème aux limites pour les équations de Navier-Stokes en deux variables.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 123, 1958, 1112-1131.

[8] O. A. LADYZENSKAYA : *Solution « in large » of the nonstationary boundary value problem for the Navier-Stokes system with two space variables.* Comm. Pure Appl. Math., 12, 1959 427-433.

[9] O. A. LADYZENSKAYA: *Questions mathématiques de la dynamique des fluides visqueux incompressibles* (Moscou, 1961).

[10] J. LERAY : *Essai sur les mouvements plans d'un liquide visqueux que limitent des parois.* Journal Math. pures et appl. 9⁰ série, 13, 1934, 331-418.

[11] J. L. LIONS, G. PRODI : *Un théorème d'existence et unicité dans les équations de Navier-Stokes en dimension* 2. C. R. Acad. Sci. Paris, 250, 1959, 3519-3521.

[12] G. PRODI : *Qualche risultato riguardo alle equazioni di Navier-Stokes nel caso bidimensionale.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 30, 1965, 1-15.

[13] G. PRODI : *Teoremi ergodici per le equazioni della idrodinamica* (C. I. M. E. Roma, 1960).

[14] G. Prodi: *Résultats récents dans le théorie des équations de Navier-Stokes.* Les équations aux dérivées partielles, 181-196 (Colloqnes Intern. du CNRS, Paris 1962).

[15] G. Prouse: *Soluzioni quasi-periodiche dell'equazione differentiale di Navier-Stokes in due dimensioni.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, 33, 1963, 186-212.

[16] J. Serrin: *The initial value problem for the Navier-Stokes equations. Non linear problems,* 69-98 (Proc. Symp. Univ. Minnesota, 1962).

[17] I. I. Vorovich, V. I. Yudovich: *Le mouvement stationnaire d'un liquide visqueux incompressible.* Mat. Florwik 53 (95), 1961, 393-428.

[18] K. Vo-Khan: *Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles.* Bull. Soc. Math. France, supplément au numéro de Juin 1966, Mémoire 6.

[19] Y. I. Yudovich: *Mouvements periodiques d'un fluide visqueux inoompressible.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 1960, 1214-1217.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 gennaio 1967.