

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

PIERGIULIO CORSINI

Sulle potenze di un ideale generato da una A -successione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 39 (1967), p. 190-204

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__39__190_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLE POTENZE DI UN IDEALE GENERATO DA UNA A -SUCCESIONE

PIERGIULIO CORSINI *)

1. È ben noto (cfr. ad. es. [2]) che l'algebra simmetrica, l'algebra di Rees, e l'anello graduato relativi ad un ideale \mathfrak{a} generato da n elementi a_1, \dots, a_n di un anello A si possono rappresentare come opportuni quozienti dell'anello di polinomi $A[Z_1, \dots, Z_n]$ in n indeterminate su A .

In particolare, se φ è l'omomorfismo canonico di $A[Z_1, \dots, Z_n]$ sull'algebra di Rees $R(\mathfrak{a})$, il nucleo di φ è generato dalle forme (polinomi omogenei nelle Z) che si annullano per $Z_1=a_1, \dots, Z_n=a_n$.

In questo lavoro ci siamo proposti di determinare un sistema minimale di generatori di $\text{Ker } \varphi$, nel caso in cui \mathfrak{a} sia la potenza n -esima (n intero positivo) di un ideale generato da una A -successione y_1, \dots, y_s di elementi di A , con $s \geq 2$.

Perveniamo al nostro scopo nel n° 5, dopo aver stabilito varie premesse concernenti gli anelli di polinomi e particolari proprietà relative alle n -ple di numeri interi. Nel n° 6 concludiamo il lavoro, mostrando che insieme all'algebra di Rees vengono completamente determinate anche l'algebra simmetrica e l'anello graduato associato all'ideale considerato.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del CNR.

Indirizzo dell'Autore: Istituto Matematico, Via L. B. Alberti, 4 - Genova.

L'autore ringrazia il Prof. P. Salmon per avergli dato utili consigli nella redazione della presente nota.

2. Siano A un anello commutativo con identità, y_1, y_2, \dots, y_s , elementi di A costituenti una A -successione¹⁾ \mathfrak{m} l'ideale da essi generato in A e supponiamo \mathfrak{m} proprio. Vale la seguente:

PROPOSIZIONE 1. *Se F è una forma di $A[X_1, \dots, X_s]$ tale che $F(y_1, \dots, y_s) = 0$, allora $F \in \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$.*

Per la dimostrazione si veda: [3], dimostrazione del teorema 2-1 pag. 33.

COROLLARIO. *Se $y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} = y_1^{r_1} y_2^{r_2} \dots y_s^{r_s}$ dove $t_1, t_2, \dots, t_s, r_1, r_2, \dots, r_s$ sono interi ≥ 0 , si ha $t_i = r_i$ per $1 \leq i \leq s$, cioè: gli esponenti di ogni monomio unitario negli elementi y_i sono univocamente determinati.*

Sia σ l'omomorfismo di $A[X_1, \dots, X_s]$ su A così definito: $\sigma(a) = a$ se $a \in A$, $\sigma(X_j) = y_j$ se $1 \leq j \leq s$. Posto $M = X_1^{t_1} \dots X_s^{t_s}$, $M' = X_1^{r_1} \dots X_s^{r_s}$ basta provare che: $\sigma(M) = \sigma(M') \implies M = M'$. Supponiamo infatti $M \neq M'$. Per ogni monomio T di $A[X_1, \dots, X_s]$ denotiamo con ∂T il suo grado totale nelle X_j . Sia $\partial M \geq \partial M'$: esistono allora due monomi P e N tali che $M = PN$, $\partial N = \partial M'$, $\partial P \geq 0$. Posto $Q = \sigma(P)N - M'$, si ha $Q \notin \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$; d'altra parte, poichè $\sigma(M) = \sigma(M')$, si ha anche $\sigma(Q) = 0$ e quindi, per la prop. 1, $Q \in \mathfrak{m}A[X_1, \dots, X_s]$ assurdo. Dunque $M = M'$ c.v.d.

Consideriamo adesso l'ideale $\mathfrak{m}^n = (y_1, \dots, y_s)^n$, di cui vogliamo determinare certe algebre particolari, come abbiamo detto nel n° 1.

Osserviamo che un insieme di generatori di \mathfrak{m}^n è costituito dai « monomi » del tipo $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s}$ tali che $i_1 + i_2 + \dots + i_s = n$. Sia $B = A[\dots, Z_{i_1 \dots i_s}, \dots]$ l'anello dei polinomi a coefficienti in A nelle $\binom{n+s-1}{s-1}$ indeterminate $Z_{i_1 \dots i_s}$ indicate nelle s -uple (i_1, \dots, i_s) tali che $\sum_{k=1}^s i_k = n$ (cioè le indeterminate sono in corrispondenza biunivoca con i generatori fissati di \mathfrak{m}^n). Sia $\varphi: B \rightarrow A$ l'omomorfismo così definito: $\varphi(a) = a$ se $a \in A$, $\varphi(Z_{i_1 \dots i_s}) = y_1^{i_1} \dots y_s^{i_s}$.

¹⁾ Ricordiamo la seguente ben nota definizione: si dice che s elementi di un anello A , y_1, y_2, \dots, y_s costituiscono una A -successione se si ha $(y_1, \dots, y_{i-1}) : (y_i) = (y_1, \dots, y_{i-1})$ per ogni i , $1 \leq i \leq s$.

Ci proponiamo ora di stabilire, colla successiva prop. 2, una notevole proprietà relativa ai polinomi Φ di B tali che $\varphi(\Phi) = 0$.

Consideriamo il sottoinsieme S di B costituito dai monomi del tipo $y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1}^{r_1} \dots Z_{i_s}^{r_s} \dots Z_{i_1}^{r_1} \dots Z_{i_s}^{r_s} (t_1, \dots, t_s \text{ interi } \geq 0)$.

Il corollario alla prop. 1 consente allora di porre la seguente

DEFINIZIONE 1. Se M è un monomio di S e se $\varphi(M) = y_1^{d_1} \dots y_s^{d_s}$, diciamo *peso* di M la s -pla univocamente determinata (d_1, \dots, d_s) e *peso globale* di M l'intero $\sum_{k=1}^s d_k$.

DEFINIZIONE 2. Diciamo che due monomi M e M' di S sono *isobari* (risp. *globalmente isobari*) se hanno lo stesso peso (risp. lo stesso peso globale). Dunque se M e M' sono monomi di S , posto $M = y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1}^{r_1} \dots Z_{i_s}^{r_s} \dots Z_{i_1}^{r_1} \dots Z_{i_s}^{r_s}$, $M' = y_1^{t'_1} y_2^{t'_2} \dots y_s^{t'_s} Z_{j_1}^{r'_1} \dots Z_{j_s}^{r'_s} \dots Z_{j_1}^{r'_1} \dots Z_{j_s}^{r'_s}$ segue dalle definizioni 1 e 2 che M e M' sono isobari se e solo se $t_u + \sum_{k=1}^r i_u^k = t'_u + \sum_{k=1}^r j_u^k$ per ogni $u = 1, 2, \dots, s$.

DEFINIZIONE 3. Diciamo che un binomio di B è *isobaro* se è differenza di monomi isobari di S .

LEMMA 1. Sia M un A -modulo, m_1, m_2, \dots, m_k , elementi di M e sia $m = a_1 m_1 + a_2 m_2 + \dots + a_k m_k$ dove $a_j \in A$. Allora esistono degli elementi $b_1, b_2, \dots, b_k \in A$ tali che $m = b_1(m_1 - m_2) + b_2(m_2 - m_3) + \dots + b_{k-1}(m_{k-1} - m_k) + b_k m_k$.

Infatti si ha: $m = a_1 m_1 - a_1 m_2 + a_1 m_2 + a_2 m_2 - (a_1 + a_2) m_3 + (a_1 + a_2) m_3 + a_3 m_3 - (a_1 + a_2 + a_3) m_4 + (a_1 + a_2 + a_3) m_4 + \dots - (a_1 + \dots + a_{k-1}) m_k + a_k m_k$ da cui: $m = a_1(m_1 - m_2) + (a_1 + a_2)(m_2 - m_3) + \dots + (a_1 + \dots + a_{k-1})(m_{k-1} - m_k) + (a_1 + \dots + a_k) m_k$.

DEFINIZIONE 4. Siano Φ e Φ' elementi di B . Diciamo che Φ è *equivalente* a Φ' , e notiamo $\Phi \simeq \Phi'$, se $\Phi - \Phi' \in K$, dove K è il sotto- A -modulo di B generato dai binomi isobari. La relazione \simeq è manifestamente una congruenza.

Immediata conseguenza del lemma 1 e della definizione 4 è il

COROLLARIO 1. *Se Φ è combinazione su A di monomi di S isobari M_1, \dots, M_k , esiste $c \in A$ tale che $\Phi \subset cM_k$.*

Nel seguito denoteremo spesso per brevità con (h) le s -uple (h_1, \dots, h_s) con $h_j \geq 0$.

COROLLARIO 2. *Ogni elemento di B è equivalente a una espressione del tipo $\Phi = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ dove $d_{(h)} \in A$ e gli $M_{(h)}$ sono monomi di S di peso (h) ; in particolare Φ è combinazione di monomi di peso distinto.*

Infatti Φ si può decomporre nella somma $\sum_{(h)} \Phi_{(h)}$ dove le $\Phi_{(h)}$ sono combinazioni su A di monomi di S isobari di peso (h) .

A ciascuna $\Phi_{(h)}$ si applica il corollario 1, donde l'asserto.

LEMMA 2. *Sia M un monomio di S di grado r nelle Z avente peso $(k_1, \dots, k_v, 0, \dots, 0)$ con $k_v > 0$; sia j un intero tale che $1 \leq j \leq v - 1$. Esiste allora un monomio M'_j , avente peso superiore a quello di M , ma globalmente isobaro a M tale che $y_j M$ e $y_v M'$ sono isobari.*

Sia infatti $M = y_1^{t_1} \dots y_v^{t_v} \cdot N$, dove

$$N = Z_{i_1^1 \dots i_v^1 0 \dots 0} \dots Z_{i_1^r \dots i_v^r 0 \dots 0}.$$

Se $t_v > 0$, basta porre; $M'_j = y_1^{t_1} \dots y_j^{t_j+1} \dots y_v^{t_v-1} N$.

Se $t_v = 0$, da $k_v > 0$ segue l'esistenza di $q (1 \leq q \leq r)$ tale che $i_v^q > 0$. Allora si prende per M'_j il monomio che si ottiene da M sostituendo $Z_{i_1^q, \dots, i_v^q, 0, \dots, 0}$ con $Z_{i_1^q, \dots, i_j^q+1, \dots, i_v^q-1, 0, \dots, 0}$.

PROPOSIZIONE 2. *Sia Φ un polinomio di B , combinazione a coefficienti in A di monomi di S globalmente isobari, tale che $\varphi(\Phi) = 0$. Allora si ha $\Phi \subset 0$. Inoltre, se Φ è omogeneo nelle Z , Φ è combinazione di binomi isobari ed omogenei nelle Z .*

Ordiniamo lexicograficamente le s -uple di interi $(h) = (h_1, \dots, h_s)$ tali che $h_j \geq 0, \sum_{j=1}^s h_j = q$, dove q è il peso globale dei monomi di

Φ , ponendo $(h_1, \dots, h_s) > (h'_1, \dots, h'_s)$ se esiste un intero p , $1 \leq p < s$, tale che $h_j = h'_j$ se $1 \leq j \leq p - 1$, $h_p > h'_p$. Possiamo supporre per il corollario 2 al lemma 1, che sia $\Phi = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ dove i monomi

$M_{(h)}$ hanno peso (h) . Nell'insieme delle s -ple $(h) = (h_1, \dots, h_s)$ indicanti i monomi di S che compaiono in Φ , sia $(k) = (k_1, \dots, k_v, 0, \dots, 0)$ quella minima (v è il massimo intero nell'insieme degli j tali che $k_j > 0$). Proveremo innanzitutto che $d_{(k)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j v_j$ dove $b_j \in A$.

Essendo $\varphi(\Phi) = 0$ si ha :

$$d_{(k)} y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_v^{k_v} \in (y_1^{k_1+1}, y_1^{k_1} y_2^{k_2+1}, \dots, y_1^{k_1} y_2^{k_2} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}).$$

Poichè y_1 e quindi $y_1^{k_1}$ non è divisore dello zero, si può dividere per $y_1^{k_1}$ e si ha :

$$d_{(k)} y_2^{k_2} \dots y_v^{k_v} \in (y_2^{k_2+1}, y_2^{k_2} y_3^{k_3+1}, \dots, y_2^{k_2} y_3^{k_3} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}) \text{ mod } y_1.$$

Ma y_2 (e quindi $y_2^{k_2}$) non è divisore dello zero mod y_1 ; quindi nella relazione precedente si può dividere per $y_2^{k_2}$ (mod y_1) e si ottiene :

$$d_{(k)} y_3^{k_3} \dots y_v^{k_v} \in (y_3^{k_3+1}, y_3^{k_3} y_4^{k_4+1}, \dots, y_3^{k_3} \dots y_{v-2}^{k_{v-2}} y_{v-1}^{k_{v-1}+1}) \text{ mod } (y_1, y_2),$$

da cui proseguendo analogamente, si deduce

$$d_{(k)} y_v^{k_v} = 0 \text{ mod } (y_1, \dots, y_{v-1})$$

ed infine: $d_{(k)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j y_j$ dove $b_j \in A$.

Per ogni combinazione $Q = \sum_{(h)} d_{(h)} M_{(h)}$ del tipo sopra considerato, diciamo ordine di Q e lo denotiamo con $\nu(Q)$, l' s -pla minima (h) tale che $d_{(h)} \neq 0$. Allora $\nu(\Phi) = (k)$. Proveremo che esiste un polinomio Φ' tale che: $\Phi' \simeq \Phi$, $\nu(\Phi') > \nu(\Phi)$, Φ' è combinazione di monomi globalmente isobari. Infatti, per quanto precede si ha :

$$\Phi = d_{(k)} M_{(k)} + \sum_{(h) > (k)} d_{(h)} M_{(h)} = \sum_{j=1}^{v-1} b_j y_j M_{(k)} + \sum_{(h) > (k)} d_{(h)} M_{(h)}.$$

Inoltre, in virtù del lemma 2, si può scrivere, per ogni j :

$$y_j M_{(k)} = (y_j M_{(k)} - y_v M'_j) + y_v M'_j$$

dove $y_v M'_j$ è isobaro a $y_j M_{(k)}$.

Dunque, posto $\Phi' = \sum_{j=1}^{v-1} (b_j y_v) M'_j + \sum_{(h)>(k)} d_{(h)} M_{(h)}$, si ha:

$$\Phi \simeq \Phi' \quad \text{e} \quad \nu(\Phi') > \nu(\Phi).$$

Proseguendo in questo modo si ottiene in conclusione che esiste $c \in A$ tale che $\Phi \simeq cM_{q, 0, \dots, 0}$. Essendo $\varphi(\Phi) = 0$ segue che $cy_1^q = 0$ da cui, poichè y_1 non divide lo zero, $c = 0$ e quindi $\Phi \simeq 0$.

Inoltre se Φ è una forma nelle Z di grado r , si può supporre che i monomi $M_{(h)}$ siano tutti di grado r nelle Z ; dal corso della dimostrazione segue allora anche l'ultima asserzione della proposizione.

3. Ci proponiamo adesso di stabilire, colla seguente proposizione 3, una proprietà di riduzione dei binomi isobari ed omogenei a binomi unitari nelle Z , modulo particolari binomi lineari appartenenti al nucleo di φ .

Siano n, r , interi positivi. Sia J l'insieme costituito dai sistemi di r s -ple non necessariamente distinte di numeri interi ≥ 0 :

$$(i_1^1, \dots, i_s^1), (i_1^2, \dots, i_s^2), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r)$$

tali che $\sum_{u=1}^s i_u^k = n$ per ogni $k = 1, 2, \dots, r$.

Sia $W = \mathbb{N}^s \times J$ (prodotto cartesiano).

Se $T \in W$ chiamiamo *peso* di T , e lo notiamo $P(T)$, l' s -upla

$$c_1 + \sum_{k=1}^r i_1^k, \quad c_2 + \sum_{k=1}^r i_2^k, \dots, \quad c_s + \sum_{k=1}^r i_s^k$$

e diciamo che due elementi di W sono *isobari* se hanno lo stesso peso. Ogni elemento T di W si spezza in $T = C \times I$ dove $C \in \mathbb{N}^s$ e I è un insieme di r s -ple (i_1^v, \dots, i_s^v) tali che $\sum_{k=1}^s i_k^v = n$ $v = 1, 2, \dots, r$.

Se $T = C \times I$ e $T' = C' \times I'$ sono elementi di W e si ha $C = (c_1, c_2, \dots, c_s)$, $C' = (c'_1, c'_2, \dots, c'_s)$, poniamo $D(T, T') = \sum_{j=1}^s |c_j - c'_j|$.

Sia $T = (c_1, \dots, c_s, (i_1^1, \dots, i_s^1), (i_1^2, \dots, i_s^2), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r))$ un elemento di W tale che, per almeno un h , risulti $c_h > 0$, e siano k, q , tali che $i_k^q > 0$, (k e q esistono certamente essendo $\sum_{t=1}^s i_t^v = n$ per ogni v). Denotiamo allora con $\psi(T)$ il sottoinsieme di W costituito dagli elementi T' isobari a T del tipo $T' = (c_1, \dots, c_h - 1, \dots, c_k + 1, \dots, c_s, (i_1^1, \dots, i_s^1), \dots, (i_1^q, \dots, i_k^q + 1, \dots, i_k^q - 1, \dots, i_s^q), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r))$, al variare di h, k, q , in modo che $c_h > 0$, $i_k^q > 0$.

LEMMA 3. *Dati due elementi $T = C \times I$, $T' = C' \times I'$, appartenenti a W e isobari, se $C \neq C'$, esiste una successione $T_0 = C_0 \times I_0$, $T_1 = C_1 \times I_1, \dots, T_g = C_g \times I_g$ di elementi di W isobari tali che $T_0 = T$, $T_{i+1} \in \psi(T_i)$, $D(T_g, T') = 0$ ovvero $C_g = C'$.*

Poniamo $H = \{h \in N \mid c_h > c'_h\}$, $K = \{k \in N \mid c_k < c'_k\}$. Poichè $C \neq C'$, H e K sono entrambi non vuoti. Sia $h_1 \in H$, $k_1 \in K$, per la condizione di isobarità si ha: $c_{k_1} + \sum_{v=1}^r i_{k_1}^v = c'_{k_1} + \sum_{v=1}^r i'_{k_1}^v$, di qui si deduce che esiste q tale che $i_{k_1}^q > 0$. Da $h_1 \in H$, segue che $\psi(T)$ non è vuoto; sia $T_1 \in \psi(T)$, allora:

$$P(T_1) = P(T) \quad \text{e} \quad 0 \leq D(T_1, T') < D(T, T').$$

Se $D(T_1, T') = 0$ allora $C_1 = C'$ e la dimostrazione è conclusa, altrimenti si opera allo stesso modo su T_1 e si ottiene un sistema T_2 tale che $P(T_2) = P(T_1)$ e $0 \leq D(T_2, T') < D(T_1, T')$. Così proseguendo si perviene infine a un sistema T_g che soddisfa a:

$$P(T_g) = P(T) \quad \text{e} \quad D(T_g, T') = 0$$

da cui $C_g = C'$ c.v.d.

PROPOSIZIONE 3. *Denotiamo con A_1 l'ideale di B generato dai binomi del tipo $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ tali che $i_u = j_u$ se $u \neq h, k$*

$i_h + 1 = j_h, i_k = j_k + 1$; allora se Q è un binomio isobaro e omogeneo nelle Z , si ha: $Q = NF \bmod A_1$ dove N è un monomio nelle sole y e F un binomio isobaro (e quindi omogeneo) nelle sole Z .

Sia $\vartheta : S \rightarrow W$ la corrispondenza così definita

$$y_1^{t_1} y_2^{t_2} \dots y_s^{t_s} Z_{i_1}^{i_1} \dots Z_{i_s}^{i_s} \dots Z_{i'_1}^{i'_1} \dots Z_{i'_s}^{i'_s} \rightarrow (t_1, \dots, t_s), (i_1^1, \dots, i_s^1), \dots, (i_1^r, \dots, i_s^r).$$

Per il corollario alla proposizione 1, ϑ è biunivoca. Sia ora dato un binomio isobaro e omogeneo nelle Z : $Q = M - M'$ e sia T_1 un sistema appartenente a $\psi(\vartheta(M))$. Notiamo che $M = \vartheta^{-1}(T_1) \bmod A_1$.

Allora $Q = M - M' = (\vartheta^{-1}(T_1) - M') \bmod A_1$ e per il lemma 3, si ha: $Q = (\vartheta^{-1}(T_g) - M') \bmod A_1$ da cui: $Q = NF \bmod A_1$ dove N è un monomio nelle sole y_j e F un binomio isobaro nelle sole Z c.v.d.

4. Premettiamo adesso alcuni lemmi concernenti sistemi di numeri naturali, mediante i quali possiamo esprimere i binomi isobari nelle sole Z come combinazione dei binomi isobari di secondo grado (Prop. 4).

Sia L l'insieme dei sistemi ordinati costituiti da $r \geq 2$ s -uple di interi ≥ 0 : $(i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ tali che $\sum_{k=1}^s i_k^h = n$ per ogni h , dove l'ordinamento è quello lexicografico (introdotto nella prop. 2).

L'insieme L ora definito è equipotente all'insieme J introdotto nel n° 3.

DEFINIZIONE 5. Dati due elementi $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ e $N = (j_1^1, \dots, j_s^1) \geq \dots \geq (j_1^r, \dots, j_s^r)$ di L , poniamo $M > N$ se per il più piccolo u tale che $(i_1^u, \dots, i_s^u) \neq (j_1^u, \dots, j_s^u)$ si ha $(i_1^u, \dots, i_s^u) > (j_1^u, \dots, j_s^u)$. In tal modo L è totalmente ordinato.

Sia ora dato un elemento di L : $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$.

Denotiamo con $\sigma(M)$ il sottoinsieme di L costituito dai sistemi $F = (f_1^1, \dots, f_s^1) \geq \dots \geq (f_1^r, \dots, f_s^r)$ tali che:

$$(1) \quad \sum_{h=1}^r f_k^h = \sum_{h=1}^r i_k^h \quad \text{per ogni } k, 1 \leq k \leq s.$$

Siano inoltre p, q due interi distinti tali che $1 \leq p, q \leq r$.

Sia $F' = (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^r, \dots, f_s^r)$ un elemento di $(\mathbb{N}^s)^r$ tale che

$$(f_1^t, \dots, f_s^t) = (i_1^t, \dots, i_s^t) \quad \text{se } t \neq p, q,$$

$$f_h^p + f_h^q = i_h^p + i_h^q \quad \text{se } 1 \leq h \leq s,$$

$$\sum_{h=1}^s f_h^p = \sum_{h=1}^s f_h^q = n.$$

F' individua un elemento di J e quindi un elemento F di L nella bigezione $J \rightarrow L$.

Diciamo allora che F è dedotto da M con una sostituzione elementare e denotiamo con $\tau(M)$ il sottoinsieme di L costituito dai sistemi deducibili da M con sostituzioni elementari successive al variare della coppia (p, q) . Si ha manifestamente: $\tau(M) \subset \sigma(M)$.

LEMMA 4. Sia $M = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r)$ un sistema di L , sia t un intero ($1 \leq t \leq s - 1$) per cui valgono le seguenti condizioni:

$$(2) \quad \sum_{k=1}^t i_k^1 < n \qquad (2') \quad i_t^1 < \sum_{h=1}^r i_t^h.$$

Allora esiste in $\tau(M)$ un sistema M' tale che $M' > M$.

Infatti, essendo $\sum_{k=1}^s i_k^1 = n$, da (2) si deduce che esiste un intero p ($t < p \leq s$), tale che $i_p^1 > 0$. Inoltre da (2') segue che esiste un intero q , ($1 < q \leq r$), tale che $i_t^q > 0$. Allora se si pone:

$$F' = (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^r, \dots, f_s^r) \in (\mathbb{N}^s)^r;$$

dove:

$$f_v^u = i_v^u \quad \text{per } u \neq 1, q; \quad f_v^1 = i_v^1, \quad f_v^q = i_v^q \quad \text{per } v \neq t, p;$$

$$f_t^1 = i_t^1 + 1, \quad f_p^1 = i_p^1 - 1, \quad f_t^q = i_t^q - 1, \quad f_p^q = i_p^q + 1,$$

F' individua un elemento di J , dunque un elemento F di L , t tale che: $F \in \tau(M)$, $F > M$ (in quanto $(f_1^1, \dots, f_s^1) > (i_1^1, \dots, i_s^1)$). Siano ora: M_0 il massimo di $\sigma(M)$ ed M_1 il massimo di $\tau(M)$. Vale il

LEMMA 5. Per ogni sistema M di L si ha $M_0 = M_1$. Essendo $M_1 \leq M_0$, è sufficiente provare che M_1 non può essere strettamente minore di M_0 ; supponiamo infatti $M_1 < M_0$. Sia

$$M_1 = (i_1^1, \dots, i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r), M_0 = (j_1^1, \dots, j_s^1) \geq \dots \geq (j_1^r, \dots, j_s^r).$$

Sia u il più piccolo intero tale che $(i_1^u, \dots, i_s^u) < (j_1^u, \dots, j_s^u)$, sia t il minimo intero tale che $i_t^u < j_t^u$. Si ha $t < s$, perchè, se fosse $i_k^u = j_k^u$ per $1 \leq k < s$, e $i_s^u < j_s^u$: seguirebbe:

$$n = \sum_{k=1}^s i_k^u < \sum_{k=1}^s j_k^u = n:$$

assurdo. Si ha inoltre, in virtù di (1):

$$(3) \quad \sum_{h=1}^{u-1} i_t^h + \sum_{h=u}^r i_t^h = \sum_{h=1}^{u-1} j_t^h + \sum_{h=u}^r j_t^h;$$

poichè, per la definizione di u : $h < u \implies i_p^h = j_p^h$ per ogni $p = 1, 2, \dots, s$, si ha $i_t^h = j_t^h$ e quindi, per (3): $\sum_{h=u}^r i_t^h = \sum_{h=u}^r j_t^h$. Poniamo ora ²⁾

$$N = (i_1^u, \dots, i_s^u) \geq (i_1^{u+1}, \dots, i_s^{u+1}) \geq \dots \geq (i_1^r, \dots, i_s^r),$$

$g_k^p = i_k^{p+u-1}$, onde si ha $N = (g_1^1, \dots, g_s^1) \geq \dots \geq (g_1^q, \dots, g_s^q)$ dove $q = r - u + 1$. Risulta:

$$g_t^1 = i_t^u < j_t^u \leq \sum_{h=u}^r j_t^h = \sum_{h=u}^r i_t^h = \sum_{h=1}^q g_t^h$$

²⁾ ripetendo in $(\mathbb{N}^s)^{r-u+1}$ le stesse considerazioni fatte all'inizio del n° 4 per $(\mathbb{N}^s)^r$.

da cui :

$$(4) \quad g_t^1 < \sum_{h=1}^q g_t^h .$$

Si ha inoltre :

$$\sum_{k=1}^t g_k^1 = \sum_{k=1}^{t-1} g_k^1 + g_t^1 = \sum_{k=1}^{t-1} i_k^u + i_t^u < \sum_{k=1}^{t-1} j_k^u + j_t^u \leq n .$$

Ne segue :

$$(5) \quad \sum_{k=1}^t g_k^1 < n .$$

In virtù delle relazioni (4) e (5), segue dal lemma 4 che esiste un sistema $N_1 \in \tau(N)$ tale che $N_1 > N$. Allora, se poniamo $N_1 = (f_1^1, \dots, f_s^1) \dots (f_1^q, \dots, f_s^q)$ e denotiamo con M_2 l'elemento individuato in L dal sistema: $(i_1^1, \dots, i_s^1), \dots, (i_1^{u-1}, \dots, i_s^{u-1}), (f_1^1, \dots, f_s^1), \dots, (f_1^q, \dots, f_s^q)$ di $(N^s)^r$, si ha $M_2 \in \tau(M_1) = \tau(M)$ e $M_2 > M_1$, contro l'ipotesi che M_1 sia massimo in $\tau(M)$. Ciò è assurdo e quindi: $M_1 = M_0$ c.v.d.

DEFINIZIONE 6. Diciamo *semplice* un binomio del tipo

$$Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$$

dove $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h .

Per ogni monomio $F = Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r}$, si può supporre

$$(i_1^1 \dots i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r \dots i_s^r) .$$

Se T è il sottoinsieme di S costituito dai monomi di grado r nelle sole Z , si ha allora la corrispondenza biunivoca $\delta: T \rightarrow L$ così definita :

$$Z_{i_1^1 \dots i_s^1} \dots Z_{i_1^r \dots i_s^r} \rightarrow (i_1^1 \dots i_s^1) \geq \dots \geq (i_1^r \dots i_s^r) .$$

Dimostriamo adesso la

PROPOSIZIONE 4. *Ogni binomio Q nelle sole Z isobaro e quindi omogeneo, appartiene all'ideale Λ_2 generato in B dai binomi semplici.*

Proviamo innanzitutto che se F e F' sono due monomi nelle sole Z isobari e se $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$ allora vale

$$(6) \quad F = F' \text{ mod } \Lambda_2.$$

Infatti, $F - F'$ è un binomio nelle Z isobaro e omogeneo, e si ha quindi necessariamente $\partial F = \partial F' \geq 2$.

Allora se $\delta(F')$ è deducibile da $\delta(F)$ mediante una sostituzione elementare, si possono fattorizzare F e F' nel modo seguente $F = KG$, $F' = KG'$ dove G e G' sono monomi isobari nelle Z di secondo grado e $K \in S$.

Di qui $F - F' = K(G - G') \in \Lambda_2$.

Più generalmente, se $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$, ragionando come sopra, si vede che $F - F'$ è combinazione finita a coefficienti in B di binomi semplici, cioè: $F = F' \text{ mod } \Lambda_2$.

Sia ora $Q = F - F'$ un binomio nelle sole Z , isobaro; ciò implica: $\sigma(\delta(F)) = \sigma(\delta(F'))$ da cui, con le notazioni introdotte nel lemma 5: $(\delta(F))_0 = (\delta(F'))_0$. Per il lemma 5 si ha allora $(\delta(F))_1 = (\delta(F'))_1$, e di qui si deduce: $\delta(F) \in \tau(\delta(F'))$. Dunque vale la (6) e $Q \in \Lambda_2$ c.v.d.

5. Siamo adesso in grado di stabilire il teorema centrale del presente lavoro, dal quale trarremo immediatamente, nel numero successivo, le annunciate applicazioni alle algebre relative all'ideale \mathfrak{m}^n .

TEOREMA 1. *L'ideale \mathfrak{q}_∞ di B^3 generato dalle forme Φ tali che $\varphi(\Phi) = 0$, ha un sistema di generatori costituito dai binomi del tipo*

³⁾ Abbiamo adottato per l'ideale in questione la notazione \mathfrak{q}_∞ già introdotta da Micali in [2].

(λ_1) $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ dove $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$, e

(λ_2) $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$ dove $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h .

Sia infatti Φ una forma di \mathfrak{q}_∞ di grado r nelle Z . Si ha: $\Phi = \sum a_i M_i$ dove gli M_i sono monomi unitari di grado r , $a_i \in A$, per ogni i . Allora il peso globale di ogni M_i vale nr , onde Φ è combinazione di monomi globalmente isobari. Si può quindi applicare la proposizione 2 e si ha: Φ è combinazione a coefficienti in A di binomi isobari e omogenei nelle Z . D'altra parte, per le proposizioni 3 e 4, ogni binomio isobaro e omogeneo nelle Z appartiene all'ideale generato da binomi dei tipi (λ_1) e (λ_2) ; di qui l'asserto.

COROLLARIO. *L'ideale \mathfrak{q} di B generato dalle forme lineari $\sum b_{i_1 \dots i_s} Z_{i_1 \dots i_s}$ tali che $\sum b_{i_1 \dots i_s} y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s} = 0$ ha un sistema di generatori costituito dai binomi del tipo (λ_1) .*

6. I risultati ottenuti permettono di determinare l'algebra simmetrica, l'algebra di Rees e l'anello graduato associato relativi all'ideale \mathfrak{m}^n .

Ricordiamo brevemente il significato di queste strutture. Sia A un anello e \mathfrak{a} un suo ideale proprio.

DEFINIZIONE 7. Sia T l'algebra tensoriale relativa all'ideale \mathfrak{a} e Q l'ideale di T generato dagli elementi del tipo $xy - yx$, dove $x, y \in \mathfrak{a}$. Chiamiamo *algebra simmetrica* di \mathfrak{a} l'algebra quoziente T/Q ⁴⁾.

Nel seguito denoteremo con \mathfrak{a} un ideale di tipo finito e con a_1, a_2, \dots, a_s , un suo sistema di generatori.

Si ha la seguente proposizione (cf. [2], ch I, n° 2).

PROPOSIZIONE 5. *Posto $B = A[Z_1, \dots, Z_s]$ chiamiamo \mathfrak{q} l'ideale di B generato dalle forme lineari $b_1 Z_1 + b_2 Z_2 + \dots + b_s Z_s$, dove $b_j \in A$ ($1 \leq j \leq s$), tali che $b_1 a_1 + \dots + b_s a_s = 0$. Allora si ha $S(\mathfrak{a}) \simeq B/\mathfrak{q}$.*

⁴⁾ Per maggiori particolari sulle algebre tensoriali e simmetriche, cf. [1].

DEFINIZIONE 8. Diciamo *algebra di Rees* $R(\mathfrak{a})$ dell'ideale \mathfrak{a} il sottoanello di $A[Z]$ costituito dalle somme finite del tipo $c_0 + c_1Z + c_2Z^2 + \dots + c_nZ^n$ dove $c_i \in \mathfrak{a}^i$.

Vale la seguente proposizione (cf. [2]):

PROPOSIZIONE 6. Se chiamiamo \mathfrak{q}_∞ l'ideale omogeneo di B generato dalle forme $g(Z_1, \dots, Z_s)$ tali che $g(a_1, \dots, a_s) = 0$, allora $R(\mathfrak{a})$ è isomorfa a B/\mathfrak{q}_∞ .

Si ha evidentemente $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}_\infty$.

DEFINIZIONE 9. Chiamiamo *anello graduato associato* dell'ideale \mathfrak{a} , l'anello $G(\mathfrak{a}) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathfrak{a}^n/\mathfrak{a}^{n+1}$.

Segue facilmente dalla proposizione 6 la seguente

PROPOSIZIONE 7. È possibile rappresentare $G(\mathfrak{a})$ come quoziente di $A[Z_1, \dots, Z_s]$ rispetto all'ideale $\mathfrak{q}' = \mathfrak{q}_\infty + \mathfrak{a}A[Z_1, \dots, Z_s]$.

Possiamo adesso concludere, in virtù del teorema 1, che per l'ideale \mathfrak{m}^n , dove \mathfrak{m} è un ideale generato da una A -successione y_1, \dots, y_s , vale il seguente teorema.

TEOREMA 2. Si hanno i seguenti isomorfismi:

$S(\mathfrak{m}^n) = A[\dots Z_{i_1 \dots i_s} \dots] / \mathfrak{q}$, dove \mathfrak{q} è generato dai binomi del tipo $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ con $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; $R(\mathfrak{m}^n) = A[\dots Z_{i_1 \dots i_s} \dots] / \mathfrak{q}_\infty$, dove \mathfrak{q}_∞ è generato dai binomi $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$ con $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h e da $y_h Z_{i_1 \dots i_s} - y_k Z_{j_1 \dots j_s}$ con $i_h + 1 = j_h$, $i_k = j_k + 1$; $G(\mathfrak{m}^n) = A[\dots Z_{i_1 \dots i_s} \dots] / \mathfrak{q}'$, dove \mathfrak{q}' è generato dagli elementi $y_1^{i_1} y_2^{i_2} \dots y_s^{i_s}$, ($i_1 + i_2 + \dots + i_s = n$) e dai binomi $Z_{i_1 \dots i_s} Z_{j_1 \dots j_s} - Z_{i'_1 \dots i'_s} Z_{j'_1 \dots j'_s}$ dove $i_h + j_h = i'_h + j'_h$ per ogni h .

BIBLIOGRAFIA

- [1] C. CHEVALLEY, *Fundamental concepts of algebra*. Academic Press Inc. New York 1956.
- [2] A. MICALI, *Sur les algèbres universelles* (tesi) Ann. Inst. Fourier, Grenoble 14, 2 (1964).
- [3] D. REES, *The grade of an ideal or module*. Proc. Camb. Phil Soc. 53 (1957) pag. 28-42.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1^o gennaio 1967.