Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Miranda

Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 91-107

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__91_0>

UNA MAGGIORAZIONE INTEGRALE PER LE CURVATURE DELLE IPERSUPERFICI MINIMALI

MARIO MIRANDA *)

Per le superfici cartesiane 2-dimensionali minimali sono note valutazioni puntuali della curvatura di Gauss. In [1] Heinz ha provato l'esistenza di una costante γ tale che: se $S = \{(x, f(x))\,;\, x \in \mathrm{R}^2, |x| \leq d\}$ è una superficie minimale, detta K la curvatura di Gauss di S nel punto $(0, f(0))$ si ha

$$|K| \leq \gamma\, d^{-2}.$$

Hopf, Ossermann e Finn hanno migliorato tale risultato in [2], [3] e [4].

In questo lavoro proveremo che per ogni intero $m > 1$ esiste una costante $k(m)$ tale che: se $S = \{(x, f(x))\,;\, x \in R^m, |x| \leq d\}$ è una ipersuperficie minimale, indicata con c^2 la somma dei quadrati delle curvature principali di S, si ha, per ogni $\varrho < d$,

$$\int_{S_\varrho} c^2\, dH_m \leq k(m) \left(\frac{d}{d-\varrho}\right)^2 \varrho^{m-2},$$

dove $S_\varrho = \{(x, f(x))\,;\, x \in R^m, |x|^2 + |f(x) - f(0)|^2 \leq \varrho^2\}$, e H_m è la misura di Hausdorff m-dimensionale in R^{m+1}.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università di Pisa.

Ringrazio Ennio De Giorgi con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. Sia $\Omega \subset R^n$ $(n > 1)$ aperto e $g \in C^2(\Omega)$ con

$$|Dg(x)| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |D_i g(x)|^2} > 0, \quad \forall x \in \Omega, \tag{1.1}$$

Su Ω possiamo considerare gli operatori differenziali lineari δ_i $(i = 1, \dots, n)$ definiti da

$$\delta_i = D_i - \nu_i(x) \sum_{h=1}^{n} \nu_h(x) D_h, \quad \nu_h(x) = D_h g(x) \cdot |Dg(x)|^{-1}. \tag{1.2}$$

Vale allora la seguente

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $x_0 \in \Omega$ *e* $S = \{x\,;\, x \in \Omega,\ g(x) = g(x_0)\}$. *Siano* $u, v \in C^1(\Omega)$ *con*

$$u(x) = v(x), \quad per \quad x \in S. \tag{1.3}$$

Si ha allora

$$\delta_i u(x_0) = \delta_i v(x_0), \quad per \quad i = 1, \dots, n. \tag{1.4}$$

DIM. Posto $w = u - v$ dalla (1.3) si ricava

$$w(x) = 0, \quad \text{per} \quad x \in S. \tag{1.5}$$

Esisterà allora $\lambda \in R$ tale che

$$D_i w(x_0) = \lambda \nu_i(x_0), \quad \text{per} \quad i = 1, \dots, n, \tag{1.6}$$

e quindi

$$\delta_i w(x_0) = \lambda \nu_i(x_0) \left[1 - \sum_{h=1}^{n} |\nu_h(x_0)|^2\right] = 0. \tag{1.7}$$

c. v. d.

Dall'essere $\sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 = 1$ si ricavano le

$$\sum_{i=0}^{n} \nu_i \delta_i = 0, \tag{1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \delta_h \nu_i = 0, \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, n. \tag{1.9}$$

Altre due identità relative agli operatori δ_i sono contenute nella seguente

PROPOSIZIONE 2. *Per gli operatori* δ_i *definiti da* (1.2) *valgono le*

$$\delta_i \nu_j = \delta_j \nu_i, \qquad per \qquad i, j = 1, \dots, n, \tag{1.10}$$

$$\delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i = \sum_{h=1}^{n} (\nu_i \delta_j \nu_h - \nu_j \delta_i \nu_h) \delta_h, \quad \text{per} \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{1.11}$$

DIM. Per provare la (1.10) si osservi che dalla (1.2) si ricava

$$\delta_i \nu_j = |Dg|^{-1} \Big\{ D_i D_j g - \nu_j D_i |Dg| - \\ - \nu_i \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h D_j g + \nu_i \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h |Dg| \Big\}, \tag{1.12}$$

e poichè vale

$$D_i |Dg| = \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h D_i g, \tag{1.13}$$

dalle (1.12) e (1.13) si ricava

$$\delta_i \nu_j = |Dg|^{-1} \Big\{ D_i D_j g - \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h D_i g - \\ - \nu_i \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h D_j g + \nu_i \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h |Dg| \Big\}, \tag{1.14}$$

da cui risulta evidente la simmetria dei $\delta_i \nu_j$ rispetto ai due indici.

Per provare la (1.11) sostituiamo a δ_j la sua espressione mediante le D_h, abbiamo così

$$\delta_i \delta_j = \delta_i D_j - \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h \delta_i D_h - \sum_{h=1}^{n} (\nu_h \delta_i \nu_j + \nu_j \delta_i \nu_h) D_h. \tag{1.15}$$

Operando la stessa sostituzione su δ_i si ha

$$\delta_i D_j - \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h \delta_i D_h = D_i D_j - \nu_i \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h D_j - \\ - \nu_j \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h D_i + \nu_j \nu_i \sum_{h,k=1}^{n} \nu_h \nu_k D_h D_k. \tag{1.16}$$

Dalle (1.15) e (1.16), tenuto conto della (1.10), si ha

$$\delta_i \delta_j - \delta_j \delta_i = \sum_{h=1}^{n} (\nu_i \delta_j \nu_h - \nu_j \delta_i \nu_h) D_h . \tag{1.17}$$

Dalle (1.17), (1.2) e (1.9) si ha la (1.11).

c. v. d.

Una semplice relazione esiste poi fra le $\delta_i \nu_j$ e le curvature principali delle ipersuperfici di livello della funzione g. Alla dimostrazione di questa premettiamo il seguente

Lemma 1. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto e $g \in C^2(\Omega)$ verifichi la* (1.1). *Sia $\tau : R^n \longrightarrow R^n$ isometria e, posto $\widetilde{\Omega} = \tau(\Omega)$ e $\widetilde{g} = g \circ \tau^{-1}$, indichiamo con δ_i gli operatori su Ω associati a g mediante la* (1.2) *e con $\widetilde{\delta}_i$* gli *operatori su $\widetilde{\Omega}$ associati a $\widetilde{g}$ allo stesso modo. Si ha allora*

$$\sum_{i,j=1}^{n} | \delta_i \nu_j(x) |^2 = \sum_{i,j=1}^{n} | \widetilde{\delta}_i \widetilde{\nu}_j(y) |^2, \quad \textit{per} \quad x \in \Omega \quad \textit{e} \quad y = \tau(x). \tag{1.18}$$

Dim. Indicata con $A = (a_{ij})$ la matrice derivata di τ^{-1} e per $f \in C^1(\Omega)$ con $\widetilde{f}$ la funzione $f \circ \tau^{-1}$ si ha, per la regola di derivazione delle funzioni composte,

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y_i}(y) = \sum_{h=1}^{n} a_{hi} \frac{\partial f}{\partial x_h}(x), \quad \text{per} \quad x \in \Omega \quad \text{e} \quad y = \tau(x). \tag{1.19}$$

Dalla (1.19) essendo A ortogonale si ricava

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y_i}(y) \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \right|^2. \tag{1.20}$$

Dalle (1.19) e (1.20) segue allora

$$\widetilde{\nu}_i(y) = \sum_{h=1}^{n} a_{hi} \nu_h(x) . \tag{1.21}$$

Per l'ortogonalità di A dalle (1.19) e (1.21) segue

$$(1.22)\qquad \sum_{i=1}^{n} \tilde{\nu}_i(y) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_i}(y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{h=1}^{n} a_{hi} \nu_h(x) \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) =$$

$$= \sum_{h,k=1}^{n} \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \sum_{i=1}^{n} a_{hi} a_{ki} = \sum_{h=1}^{n} \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}(x).$$

Dalle (1.22), (1.21) e (1.19) si ha

$$(1.23)\qquad \tilde{\delta}_i \tilde{f}(y) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \nu_j(x) \sum_{h=1}^{n} \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}(x) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \nu_j(x) \sum_{h=1}^{n} \nu_h(x) \frac{\partial f}{\partial x_h}(x) \right\} = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \cdot \delta_j f(x).$$

Dalle (1.21) e (1.23) si ha allora

$$(1.24)\qquad \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y) = \sum_{h=1}^{n} a_{hi} \delta_h \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \nu_k(x) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hi} a_{kj} \delta_h \nu_k(x).$$

Essendo A ortogonale da (1.24) si ricava

$$(1.25)\qquad \sum_{i=1}^{n} | \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y) |^2 = \sum_{h=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_h \nu_k(x) \right|^2 ,$$

e per lo stesso motivo

$$(1.26)\qquad \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} | \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j(y) |^2 = \sum_{h=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \delta_h \nu_k(x) \right|^2 = \sum_{h=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \delta_h \nu_k(x) \right|^2 .$$

c. v. d.

Possiamo ora provare il

TEOREMA 1. *Sia $\Omega \subset R^n$ $(n > 1)$ aperto, $g \in C^2(\Omega)$ con $Dg(x) \neq 0$ $\forall\, x \in \Omega$. Posto $\nu_j = D_j g \cdot | Dg |^{-1}$ $(j = 1, \dots, n)$ e $\delta_i = D_i - \nu_i \sum_{h=1}^{n} \nu_h D_h$ $(i = 1, \dots, n)$ e, per $x_0 \in \Omega$, indicata con $c^2(x_0)$ la somma dei quadrati* *delle curvature principali, calcolate in* x_0, *dell'ipersuperficie* $\{x\,;\, x \in \Omega,\ g(x) = g(x_0)\}$ *vale l'identità*

$$c^2(x_0) = \sum_{i,j=1}^{n} |\,\delta_i \nu_j(x_0)\,|^2. \tag{1.27}$$

DIM. Grazie al Lemma 1 possiamo supporre che g verifichi le

$$D_i g(x_0) = 0, \qquad \text{per} \qquad i = 1, \dots, n-1\,, \tag{1.28}$$

$$D_n g(x_0) = |\,Dg(x_0)\,|, \tag{1.29}$$

$$D_i D_j g(x_0) = 0, \qquad \text{per} \qquad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, n-1\,. \tag{1.30}$$

Si ha allora facilmente

$$c^2(x_0) = \sum_{i=1}^{n-1} |\,D_i D_i g(x_0)\,|^2 \cdot |\,Dg(x_0)\,|^{-2}\,. \tag{1.31}$$

Per quanto riguarda i $\delta_i \nu_j(x_0)$ si ha, essendo $\nu_n(x_0) = 1$ e quindi x_0 punto di massimo per ν_n,

$$\delta_i \nu_n(x_0) = 0, \qquad \text{per} \qquad i = 1\,, \dots, n, \tag{1.32}$$

da cui si ha anche, per la Proposizione 2,

$$\delta_n \nu_i(x_0) = 0, \qquad \text{per} \qquad i = 1, \dots, n. \tag{1.33}$$

D'altra parte, per $i, j < n$, dalle (1.28) si ha

$$\delta_i \nu_j(x_0) = D_i \nu_j(x_0)\,, \tag{1.34}$$

$$D_i \nu_j(x_0) = \frac{D_i D_j g(x_0)}{|\,Dg(x_0)\,|} \tag{1.35}$$

e quindi

$$\delta_i \nu_j(x_0) = D_i D_j g(x_0) \cdot |\,Dg(x_0)\,|^{-1}\,, \qquad \text{per} \qquad i, j < n\,. \tag{1.36}$$

Dalle (1.30), (1.32), (1.33) e (1.36) si ha finalmente

$$(1.37) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} | \delta_i \nu_j (x_0) |^2 = \sum_{i=1}^{n-1} | D_i D_i g (x_0) |^2 \cdot | Dg (x_0) |^{-2} ,$$

da cui, tenuto conto della (1.31), si ha l'asserto.

c. v. d.

2. Supponiamo ora che g verifichi l'equazione

$$(2.1) \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{D_i g}{| Dg |} = 0.$$

ovvero l'equazione di Eulero del problema di minimo per l'integrale $\int_\Omega | Dg (x) | \, dx$.

Con le notazioni del n. 1 l'equazione (2.1) può scriversi nella forma equivalente

$$(2.2) \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i \nu_i = 0 .$$

L'equivalenza delle (2.1) e (2.2) insieme con la Proposizione 1 mostra come la stazionarietà dell'integrale del gradiente di una funzione si riduca ad una proprietà delle ipersuperfici di livello della funzione stessa. Vale precisamente il

Teorema 2. *Sia $\Omega \subset R^n$ $(n > 1)$ aperto e $g \in C^2(\Omega)$ con $Dg(x) \neq 0$ $\forall\, x \in \Omega$. Allora g verifica l'equazione* (2.1) *se e solo se per ogni $x_0 \in \Omega$ la ipersuperficie $\{x ;\ x \in \Omega,\ g(x) = g(x_0)\}$ è minimale* (1).

Dim. Fissato $x_0 \in \Omega$ esiste i $(1 \leq i \leq n)$, un aperto $I \subset R$, un aperto $A \subset R^{n-1}$, una funzione $f\colon A \to I$ di classe C^2 tali che

$$(2.3) \qquad \Omega_0 = \{x ;\ x_i \in I,\ (x_1 , \dots , \widehat{x_i} , \dots , x_n) \in A\} \subset \Omega ,$$

$$(2.4) \qquad \{x ;\ x \in \Omega_0 ,\ g(x) = g(x_0)\} =$$
$$= \{x ;\ x_i = f(x_1 , \dots , \widehat{x_i} , \dots , x_n),\ (x_1 , \dots , \widehat{x_i} , \dots , x_n) \in A\} .$$

(1) Per ipersuperficie minimale si intenda una ipersuperficie che localmente può essere rappresentata mediante una funzione soluzione dell'equazione delle ipersuperfici di area minima.

Indicata con $\tilde{g}: \Omega_0 \to R$ l'applicazione definita da

$$(2.5) \qquad \tilde{g}(x) = x_i - f(x_1, \dots, \widehat{x_i}, \dots, x_n),$$

si ha, grazie alla Proposizione 1 e con ovvio significato delle notazioni,

$$(2.6) \qquad \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_j (x_0) = \delta_i \nu_j (x_0), \qquad \text{per} \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Quindi, per la (2.2), si ha

$$(2.7) \qquad \sum_{i=0}^{n} \tilde{\delta}_i \tilde{\nu}_i (x_0) = 0.$$

ovvero

$$(2.8) \qquad \sum_{i=1}^{n} D_i \frac{D_i \tilde{g}}{|D\tilde{g}|}(x_0) = 0.$$

Basta infine osservare che la (2.8) con la sostituzione (2.5) si trasforma nella equazione delle ipersuperfici di area minima.

c. v. d.

Dal Teorema 2 e da un classico risultato di Hopf [5] si ha che le ipersuperfici di livello delle funzioni soluzioni di (2.1) sono analitiche. Ricordando la Proposizione 1 possiamo allora applicare a (2.2) l'operatore δ_h e tenendo conto della (1.11) si ha

$$(2.9) \qquad 0 = \sum_{i=1}^{n} \delta_h \delta_i \nu_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \delta_h \nu_i + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (\nu_h \delta_i \nu_j - \nu_i \delta_h \nu_j) \delta_j \nu_i,$$

ovvero anche, tenuto conto delle (1.9) e (1.10),

$$(2.10) \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i \delta_i \nu_h + \sum_{i,j=1}^{n} (\delta_i \nu_j)^2 \nu_h = 0, \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, n.$$

Dove ricordiamo che $\sum_{i,j=1}^{n} (\delta_i \nu_j)^2$ è la somma dei quadrati delle curvature principali delle ipersuperfici di livello, mentre, come si può verificare (v. formula (23) pag. 85 di [6]), l'operatore $\sum_{i=1}^{n} \delta_i \delta_i$, valendo la (2.2), coincide con l'operatore di Laplace-Beltrami della ipersuperficie.

3. Sia $A \subset R^m$ $(m > 1)$ aperto e $f \in C^2(A)$ verifichi l'equazione delle ipersuperfici di area minima, ovvero

$$\sum_{i=1}^{m} D_i \frac{D_i f}{\sqrt{1 + |Df|^2}} = 0. \tag{3.1}$$

Dai risultati stabiliti in [7], [8], [9] e [10] si ricava il seguente

TEOREMA 3. *Sia* $A \subset R^m$ $(m > 1)$ *aperto e* $f \in C^2(A)$ *verifichi l'equazione* (3.1). *Allora per ogni* $x_0 \in A$ *e per ogni* $\varrho < \operatorname{dist}(x, \partial A)$ *si ha*

$$\int_{\{x\,;\,|x-x_0|^2 + |f(x)-f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}} \sqrt{1 + |Df(x)|^2}\, dx \leq \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1}\, \varrho^m \,. \tag{3.2}$$ (2)

DIM. Il problema di minimo per l'integrale $\int_{\{x\,;\,|x-x_0| \leq \varrho\}} \sqrt{1 + |Dg(x)|^2}\, dx$ nella classe delle funzioni lipschitziane e verificanti

$$g(x) = f(x), \qquad \text{per} \qquad |x - x_0| = \varrho, \tag{3.3}$$

ha soluzione, come è stato provato in [7] (v. Teor. 1.2 e Prop. 6.2), e tale soluzione, grazie al teorema di regolarizzazione di De Giorgi [11] (cfr. anche Stampacchia [12]) e ad un risultato di Morrey (v. Teor. 9.2 di [13]), è di classe C^2 e quindi verifica l'equazione (3.1) in $\{x\,;\, |x - x_0| < \varrho\}$. Poichè per la (3.1) vale il teorema di unicità avremo allora che la f stessa è la soluzione del problema di minimo considerato. Grazie allora al Lemma 5.1 di [7] la ipersuperficie $\{(x, f(x))\,;\, |x - x_0| \leq \varrho\}$ avrà area minima fra tutte le ipersuperfici continue $\{(x, g(x)) :\, |x - x_0| \leq \varrho\}$ tali che $g(x) = f(x)$ per $|x - x_0| = \varrho$, e quindi per la Proposizione 2.3 di [8] l'insieme $E = \{(x, y)\,;\, |x - x_0| < \varrho,\ y < f(x)\}$ ha frontiera orientata localmente di misura minima. Vale allora, per la formula (3.11) di [9],

$$\int_{\{(x,y)\,;\,|x-x_0|^2 + |y-f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}} |D\varphi(x, y\,;\, E)| \leq \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1} \cdot \varrho^m \,, \tag{3.4}$$

---

(2) ω_{m+1} è la misura della sfera unitaria di R^{m+1}.

da cui, grazie alla Proposizione 1.9 e al Teorema 1.8 di [10] si ha l'asserto.

c. v. d.

Indichiamo con g la funzione definita in $A \times R$ da

$$g(x, y) = y - f(x), \quad \text{per} \quad x \in A \quad \text{e} \quad y \in R. \tag{3.5}$$

La g verifica l'equazione (2.1) (v. Teorema 2) e quindi, indicata con c^2 la somma dei quadrati delle curvature principali della ipersuperficie $\{(x, f(x))\,;\ x \in A\}$ si ha, dalla (2.10) e dal Teorema 1,

$$\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i \nu_h + c^2 \nu_h = 0, \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, m+1. \tag{3.6}$$

Essendo $\nu_{m+1} = (1 + |Df|^2)^{-\frac{1}{2}} > 0$ possiamo porre $w = -\log \nu_{m+1}$ e dalla (3.6) discende allora

$$\sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w - \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 - c^2 = 0. \tag{3.7}$$

4. Dalla (3.7) dedurremo ora la diseguaglianza annunciata per le curvature delle ipersuperfici di area minima. Per fare questo cominciamo col provare due lemmi.

LEMMA 2. *Sia* $A \subset R^m$ $(m > 1)$ *aperto e* $f \in C^2(A)$ *verifichi la* (3.1). *Allora per ogni* $\alpha \in C_0^1(A \times R)$ (3) *si ha*

$$\int_S \delta_i \alpha \, dH_m = 0, \quad \text{per } i = 1, \dots, m+1, \tag{4.1}$$

dove $S = \{(x, f(x))\,;\ x \in A\}$, H_m *è la misura di Hausdorff* m*-dimensionale in* R^{m+1} *e* δ_i *sono gli operatori associati alla funzione* $g(x, y) = y - f(x)$.

(3) $C_0^1(A \times R)$ è l'insieme delle funzioni reali di classe C^1 a supporto compatto contenuto in $A \times R$.

Dim. Sia $\tilde{\alpha}: A \times R \to R$ definita da

$$\tilde{\alpha}(x, y) = \alpha(x, f(x)). \tag{4.2}$$

Si ha ovviamente $\alpha \in C_0^1(A \times R)$ e, per la Proposizione 1,

$$\int_S \delta_i \tilde{\alpha}\, dH_m = \int_S \delta_i \tilde{\alpha}\, dH_m, \quad \text{per } i = 1, \ldots, m+1\,. \tag{4.3}$$

Essendo $D_{m+1}\tilde{\alpha} = 0$ si ha

$$\delta_i \tilde{\alpha} = D_i \tilde{\alpha} - \nu_i \sum_{h=1}^{m} \nu_h D_h \tilde{\alpha}, \quad \text{per } i \leq m, \tag{4.4}$$

$$\delta_{m+1} \tilde{\alpha} = -\nu_{m+1} \sum_{h=1}^{m} \nu_h D_h \tilde{\alpha}\,. \tag{4.5}$$

Dalla (4.4) si ricava

$$\int_S \delta_i \tilde{\alpha}\, dH_m = \int_A (D_i \tilde{\alpha} - \nu_i \sum_{h=1}^{m} \nu_h D_h \tilde{\alpha}) \sqrt{1 + |Df|^2} dx\,, \quad \text{per } i \leq m\,, \tag{4.6}$$

e quindi, dalla formula di Green,

$$\int_S \delta_i \tilde{\alpha}\, dH_m = -\int_S \tilde{\alpha} \left\{ D_i \sqrt{1 + |Df|^2} - \sum_{h=1}^{m} D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) \right\} dx\,. \tag{4.7}$$

Tenuto conto della (3.1) si ha

$$\sum_{h=1}^{m} D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) = \tag{4.8}$$

$$= \nu_i \sum_{h=1}^{m} \nu_h D_h \sqrt{1 + |Df|^2} + \sqrt{1 + |Df|^2} \sum_{h=1}^{m} \nu_h D_h \nu_i\,,$$

e quindi

$$D_i \sqrt{1 + |Df|^2} - \sum_{h=1}^{m} D_h (\nu_h \nu_i \sqrt{1 + |Df|^2}) = \tag{4.9}$$

$$= \delta_i \sqrt{1 + |Df|^2} + (1 + |Df|^2)\, \delta_{m+1} \nu_i\,.$$

Poichè è $\sqrt{1+|Df|^2} = \nu_{m+1}^{-1}$, si ha

$$(4.10) \qquad \delta_i \sqrt{1+|Df|^2} = -\nu_{m+1}^{-2}\,\delta_i \nu_{m+1} = -(1+|Df|^2)\,\delta_i \nu_{m+1}.$$

Dalle (4.9) e (4.10), ricordando la Proposizione 2, si ha

$$(4.11) \qquad D_i \sqrt{1+|Df|^2} - \sum_{h=1}^{m} D_h \left(\nu_h \nu_i \sqrt{1+|Df|^2}\right) = 0,$$

e quindi da (4.11), (4.7) e (4.3) si ha l'asserto per $i \leq m$.

Analogamente partendo da (4.5) si ha l'asserto per $i = m+1$.

c. v. d.

LEMMA 3. *Per ogni intero $m > 1$ esiste una rostante $\gamma(m)$ tale che: se $A \subset R^m$ è aperto e $f \in C^2(A)$ verifica la* (3.1), *se $w \in C^2(A \times R)$ verifica*

$$(4.12) \qquad \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w \geq \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2, \quad su \ S = \{(x, f(x))\,;\, x \in A\},$$

allora per ogni $x_0 \in A$ e $\varrho < d = \operatorname{dist}(x_0, \partial A)$ si ha

$$(4.13) \qquad \int_{S_\varrho(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 \, dH_m \leq \gamma(m) \left(\frac{d}{d-\varrho}\right)^2 \varrho^{m-2},$$

dove $S_\varrho(x_0) = \{(x, f(x))\,;\, |x - x_0|^2 + |f(x) - f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}$.

DIM. Supponiamo $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$ e scriviamo S_ϱ per $S_\varrho(0)$.

Fissati $t\,(0 < t < d)$ e una successione infinitesima di numeri positivi $\{\varepsilon_h\}$, indichiamo con $\{\psi_h\}$ una successione di funzioni di $C^1(A \times R)$ tali che

$$(4.14) \qquad 0 \leq \psi_h \leq 1, \text{ in } A \times R,$$

$$(4.15) \qquad \psi_h(x, y) = \begin{cases} 1, \text{ per } x \in A,\ y \in R,\ |x|^2 + y^2 < t^2 \\ 0, \text{ per } x \in A,\ y \in R,\ |x|^2 + y^2 > (t + \varepsilon_h)^2, \end{cases}$$

$$(4.16) \qquad |D\psi_h| \leq (1 + \varepsilon_h)\,\varepsilon_h^{-1}, \text{ in } A \times R.$$

Avremo allora

$$(4.17) \qquad \int_{S_t} \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w \, dH_m \leq \min_{h \to \infty} \lim \int_S \sum_{i=1}^{m+1} \psi_h \, \delta_i \delta_i w \, dH_m \, ,$$

D'altra parte per il Lemma 2 si ha

$$(4.18) \qquad \int_S \psi_h \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w \, dH_m = - \int_S \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \psi_h \, \delta_i w \, dH_m \, ,$$

ovvero anche, per la (4.15),

$$(4.19) \qquad \int_S \psi_h \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w \, dH_m = - \int_{S_{t+\varepsilon_h} - S_t} \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \psi_h \, \delta_i w \, dH_h \, .$$

Per la diseguaglianza di Schwarz e per la (4.16) si ha allora

$$(4.20) \qquad \int_S \psi_h \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i \delta_i w \, dH_m \leq$$

$$\leq (1 + \varepsilon_h) \sqrt{\varepsilon_h^{-1} \int_{S_{t+\varepsilon_h} - S_t} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 \, dH_m} \; \sqrt{\varepsilon_h^{-1} H_m (S_{t+\varepsilon_h} - S_t)} .$$

Posto allora $M(t) = H_m(S_t)$ e $N(t) = \int_{S_t} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2 \, dH_m$, dalle (4.20), (4.17) e (4.12) si ricava, per quasi tntti i $t \, (0 < t < d)$

$$(4.21) \qquad N(t) \leq \sqrt{M'(t) \, N'(t)} \, ,$$

ovvero, supponendo $N(\varrho) > 0$,

$$(4.22) \qquad \frac{1}{M'(t)} \leq \left(\frac{-1}{N(t)} \right) , \text{ per quasi tutti i } t \, (\varrho < t < d) \, .$$

Integrando la (4.22) fra ϱ e σ ($\varrho < \sigma < d$) e applicando al primo nembro la diseguaglianza di Schwarz si ha

$$\frac{(\sigma - \varrho)^2}{M(\sigma) - M(\varrho)} \leq \frac{1}{N(\varrho)} - \frac{1}{N(\sigma)}, \tag{4.23}$$

e quindi anche

$$N(\varrho) \leq \frac{M(\sigma)}{(\sigma - \varrho)^2}, \quad \text{per } \forall\, \sigma\, (\varrho < \sigma < d). \tag{4.24}$$

Dalla (4.24) e dal Teorema 3 si ricava

$$N(\varrho) \leq \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1} \frac{\sigma^m}{(\sigma - \varrho)^2}, \quad \text{per } \forall\, \sigma\, (\varrho < \sigma < d). \tag{4.25}$$

Nel caso $m = 2$ la (4.25) è proprio quanto cercavamo con $\gamma(2) = \frac{3}{2}\omega_3$. Per $m > 2$ si osservi che la funzione $\sigma^m (\sigma - \varrho)^{-2}$ nell'intervallo $(\varrho, +\infty)$ ha minimo nel punto $\frac{m}{m-2}\varrho$. Quindi dalla (4.25) si ricava

$$N(\varrho) \leq \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1} \frac{m^m}{(m-2)^{m-2}} \frac{\varrho^{m-2}}{2^2}, \quad \text{se } d \geq \frac{m}{m-2}\varrho, \tag{4.26}$$

$$N(\varrho) \leq \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1} \frac{m^m}{(m-2)^{m-2}} \left(\frac{d}{d-\varrho}\right)^2 \frac{\varrho^{m-2}}{m^2}, \quad \text{se } d < \frac{m}{m-2}\varrho. \tag{4.27}$$

Dalle (4.26) e (4.27) segue che vale l'asserto con

$$\gamma(m) = \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1} \frac{m^m}{(m-2)^{m-2}} \cdot \frac{1}{2^2}, \quad \text{per } m > 2.$$

c. v. d.

Possiamo finalmente provare il

TEOREMA 4. *Per ogni intero $m > 1$ esiste una costante $k(m)$ tale che: se $A \subset R^m$ è aperto e $f \in C^2(A)$ è soluzione della equazione delle ipersuperfici di area minima, allora per ogni $x_0 \in A$ e $\varrho < d =$*

$= \operatorname{dist}(x_0, \partial A)$ *vale la diseguaglianza*

$$\int_{S_\varrho(x_0)} c^2\, dH_m \leq k(m)\left(\frac{d}{d-\varrho}\right)^2 \varrho^{m-2}, \tag{4.28}$$

dove c^2 *è la somma dei quadrati delle curvature principali della ipersuperficie* $S = \{(x, f(x))\,;\, x \in A\}$ *e*

$$S_\varrho(x_0) = \{(x, f(x))\,;\; |x - x_0|^2 + |f(x) - f(x_0)|^2 \leq \varrho^2\}\,.$$

DIM. Poniamo

$$w(x, y) = \log \sqrt{1 + |Df(x)|^2}, \quad \text{per } x \in A \text{ e } y \in R. \tag{4.29}$$

Per quanto già osservato nel n. 2 w risulta analitica in $A \times R$ e grazie alla (3.7) vale

$$c^2 \leq \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i\, \delta_i\, w, \quad \text{su } S. \tag{4.30}$$

Fissati ϱ, σ $(\varrho < \sigma < d)$ indichiamo con $\{\psi_h\}$ una successione di funzioni di $C^1(A \times R)$ tali che

$$0 \leq \psi_h \leq 1, \quad \text{in } A \times R, \tag{4.31}$$

$$\psi_h(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{per } x \in A,\ y \in R,\ |x - x_0|^2 + |y - f(x_0)|^2 < \varrho^2 \\ 0, & \text{per } x \in A,\ y \in R,\ |x - x_0|^2 + |y - f(x_0)|^2 > \sigma^2 \end{cases}, \tag{4.32}$$

$$\lim_{h \to \infty} \max_{A \times R} |D\psi_h| = (\sigma - \varrho)^{-1}. \tag{4.33}$$

Dalla (4.30) e dal Lemma 2 si ha

$$\int_S \psi_h\, c^2\, dH_m \leq -\int_S \sum_{i=1}^{m+1} \delta_i\, w\, \delta_i\, \psi_h\, dH_m\,, \tag{4.34}$$

e quindi anche, per la diseguaglianza di Schwarz e la (4.32) ,

$$\int_{S_\varrho(x_0)} c^2\, dH_m \leq \max_{A\times R} |D\psi_h| \sqrt{\int_{S_\sigma(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2\, dH_m} \cdot \sqrt{H_m(S_\sigma(x_0))}\,. \tag{4.35}$$

Facendo tendere $h \to \infty$ e tenendo presente la (4.33) si ha

$$\int_{S_\varrho(x_0)} c^2\, dH_m \leq (\sigma - \varrho)^{-1} \sqrt{\int_{S_\sigma(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2\, dH_m}\, \sqrt{H_m(S_\sigma(x_0))}. \tag{4.36}$$

Dal Lemma 3 si ha, per ogni $\tau\,(\sigma < \tau < d)$,

$$\int_{S_\sigma(x_0)} \sum_{i=1}^{m+1} (\delta_i w)^2\, dH_m \leq \gamma(m) \left(\frac{\tau}{\tau - \sigma}\right)^2 \sigma^{m-2}, \tag{4.37}$$

e quindi, ricordando il Teorema 3, dalla (4.36) si ricava

$$\int_{S_\varrho(x_0)} c^2\, dH_m \leq \sqrt{\gamma(m)\, \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1}} \cdot \frac{\tau \cdot \sigma^{m-1}}{(\tau - \sigma)(\sigma - \varrho)}\,, \tag{4.38}$$

$$\forall\, \sigma, \tau\, (\varrho < \sigma < \tau < d).$$

Se si scelgono σ, τ in modo che $\sigma - \varrho = \tau - \sigma$, da (4.38) si ha

$$\int_{S_\varrho(x_0)} c^2\, dH_m \leq 4 \sqrt{\gamma(m)\, \frac{m+1}{2}\, \omega_{m+1}} \cdot \frac{\tau^m}{(\tau - \varrho)^2},\ \forall\, \tau\, (\varrho < \tau < d). \tag{4.39}$$

Dalla (4.39) segue l'asserto ripetendo il ragionamento della dimostrazione del Lemma 3 a partire dalla formula (4.25).

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] HEINZ, E.: « *Über die Lösungen der Minimalflächengleichung* ». Nachr. Ak. Wiss., Göttingen, Math. Phys. Kl., 1952.

[2] HOPF, E.: « *On an inequality for minimal surfaces $z = z(x, y)$* ». J. Rat. Mech. Anal., 1953.

[3] OSSERMANN, R.: « *On the Gauss curvatnre of minimal surfaces* ». Trans. A.M.S., 1960.

[4] FINN, R. OSSERMANN R.: « *On the Gauss curvature of the non-parametric minimal surfaces* ». J. Anal. Math., 1964.

[5] HOPF, E.: « *Über den Funktionalen, insbesondere den analytischen Charakter der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen* ». Math. Zeit., 1932.

[6] BIANCHI, L.: « *Lezioni di geometria differenziale* », vol. I. III ediz., Pisa 1922.

[7] MIRANDA, M.: « *Un teorema di esistenza e unicità per il problema dell'area minima in n variabili* ». Ann. Sc. Norm. Sup., 1965.

[8] MIRANDA, M.: « *Analiticità delle superfici di area minima in R^4* ». Rend. Acc. Naz. Lincei, 1965.

[9] MIRANDA, M.: « *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione* ». Ann. Sc. Norm. Sup., 1965.

[10] MIRANDA, M.: « *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani* ». Ann. Sc. Norm. Sup., 1964.

[11] DE GIORGI, E.: « *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari* ». Mem. Acc. Sc., 1957.

[12] STAMPACCHIA, G.: « *On some regular multiple integral problems in the calculus of variations* ». Comm. P.A.M., 1963.

[13] MORREY, C. B.: « *Second order elliptic systems of differential equations* ». Ann. Math. Stud., Princeton, 1954.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1966.