Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Poletti

Strutture gruppali associate ad una involuzione

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 89-90
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__89_0>

STRUTTURE GRUPPALI ASSOCIATE AD UNA INVOLUZIONE

MARIO POLETTI *)

Il seguente teorema caratterizza le applicazioni di un insieme in sè, che coincidono con l'inversione di un opportuno gruppo abeliano avente per sostegno l'insieme.

TEOREMA. Sia Ω un insieme di cardinalità ω, f una applicazione di Ω in sè, X l'insieme dei punti uniti di f di cardinalità σ, Y l'insieme dei punti non uniti di f di cardinalità λ. Allora condizione necessaria e sufficiente affinchè f coincida con l'inversione di un opportuno gruppo abeliano che ha per sostegno Ω, è che f sia involutoria, che $\omega = \sigma\mu$, che $\sigma = 2^n$ se σ è un cardinale finito, e che $\lambda = 0$ o $\lambda = \omega$ se σ è un cardinale transfinito.

DIM. Se f coincide con l'inversione di un certo gruppo abeliano che ha per sostegno Ω, f è certamente involutoria, ed inoltre X risulta sottogruppo di tale gruppo. Esiste quindi μ tale che $\omega = \sigma\mu$, e se σ è transfinito allora o $\lambda = 0$ o $\lambda = \omega$; inoltre, siccome ogni elemento del gruppo X coincide con il proprio inverso, se σ è finito, esiste n tale che $\sigma = 2^n$.

Se f, ω, σ, λ verificano le dette condizioni, esistono gruppi abeliani G di cardinalità ω, tali che siano σ, λ le cardinalità dei loro sottinsiemi $\{g / g \in G, g = -g\}$, $\{g / g \in G, g \neq -g\}$. Infatti, detto Z il gruppo additivo degli interi, tali gruppi possono essere costruiti

---

*) Indirizzo dell'A: Istituto Matematico, Università, Pisa.

come segue: 1) se ω è finito e $\sigma = 1$, dall'essere $\{\{a, fa\} / a \in \Omega\}$ una partizione di Ω in insiemi di cardinalità ≤ 2, di cui uno soltanto di cardinalità 1, segue che ω è dispari, e quindi che $Z/\omega Z$ è un tale gruppo; 2) se ω è finito, posto $\mu = 2^h \cdot k$, con k dispari, allora $(Z / 2^{h+1} Z) \times (Z / kZ)$, $(Z / 2Z)^{n-1} \times (Z / 2^{h+1} Z) \times (Z/kZ)$ sono tali gruppi rispettivamente nel caso che $\sigma = 2$ e che $\sigma = 2^n$ con $2 \leq n$; 3) se ω è transfinito e $\sigma = 1$, allora il prodotto debole di una famiglia di cardinalità ω di gruppi isomorfi a Z è un tale gruppo; 4) se ω è transfinito, σ è finito e $\sigma = 2^n$ con $1 \leq n$, allora detto F il prodotto debole di una famiglia di cardinalità ω di gruppi isomorfi a Z, si ha che $(Z/2Z)^n \times F$ è un tale gruppo; 5) se ω è transfinito, σ è transfinito, e $\lambda = 0$, allora il prodotto debole di una famiglia di cardinalità ω di gruppi isomorfi a $Z/2Z$ è un tale gruppo; 6) se ω è transfinito, σ è transfinito, e $\lambda = \omega$, allora detto H il prodotto debole di una famiglia di cardinalità σ di gruppi isomorfi a $Z/2Z$, e detto F il prodotto debole di una famiglia di cardinalità ω di gruppi isomorfi a Z, si ha che $H \times F$ è un tale gruppo. Sia quindi G un gruppo abeliano verificante le proprietà descritte; siccome card $\{g / g \in G, g = -g\} =$ card X, card $\{g / g \in G, g \neq -g\} =$ $=$ card Y, esiste una applicazione biiettiva π di Ω su G, tale che $\pi f = j\pi$, ove j è l'inversione del gruppo G. Ciò posto, f coincide con l'inversione del gruppo $(\Omega, +)$, definito dall'essere $a + b = \pi^{-1}(\pi a + \pi b)$ per ogni $a, b \in \Omega$.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 luglio 1966.