

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANTONIO CHIFFI

Sulla rappresentazione delle correnti piane e chiuse

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 80-85

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__80_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SULLA RAPPRESENTAZIONE DELLE CORRENTI PIANE E CHIUSE

ANTONIO CHIFFI *)

È noto ¹⁾ che, se $T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$ è una corrente intera, detta $\|T\|$ la misura variazione totale di T e detto $\vec{T}(x)$ il vettore tangente a T nel punto x , esiste una famiglia numerabile \mathcal{F} di curve di \mathbb{R}^2 di classe C^1 tale che per ogni $x \in \mathbb{R}^2$, eccetto un insieme di punti x di misura $\|T\|$ nulla, $\vec{T}(x)$ è un vettore tangente in x ad una curva di \mathcal{F} e si ha per ogni forma differenziale $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2)$:

$$(1) \quad T(\omega) = \int \omega(x) [\vec{T}(x)] \theta^1(\|T\|, x) dH^1(x)$$

dove $\theta^1(\|T\|, x)$ è la uno-densità, rispetto alla misura $\|T\|$ di \mathbb{R}^n , nel punto x e H^1 è la misura uno-dimensionale di Hausdorff in \mathbb{R}^2 .

Dimostriamo (teorema 3) che, se $T \in \mathcal{E}_1(\mathbb{R}^2)$ è intera e chiusa, esiste una successione $\{C_i\}$, eventualmente finita, di curve continue, chiuse, semplici e rettificabili, tali che per ogni forma $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2)$ si abbia:

$$(2) \quad T(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{C_i} \omega$$

*) Indirizzo dell'Autore: Istituto di Matematica Applicata - Università di Padova.

¹⁾ Cfr. [F F] teor. 8.16 a pag. 500. Ci riferiamo a questo lavoro per la terminologia e i simboli che useremo nel seguito.

e tali che, detta L_i la lunghezza della curva \mathcal{C}_i , si abbia :

$$M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Si noti che la rappresentazione (2) è data mediante integrali curvilinei di forme differenziali, mentre la (1) è data mediante un integrale orientato su un insieme $(H^1, 1)$ -rettificabile.

Indichiamo con $Z_1(R^2)$ la famiglia delle correnti di $I_1(R^2)$ chiuse; rimandiamo a [DG 1] e [DG 2] per la definizione di perimetro di un insieme e a [C 3] per la definizione di corrente irriducibile.

TEOREMA 1. *Sia $T \in Z_1(R^2)$ una corrente irriducibile. Esiste una curva \mathcal{C} continua, chiusa, rettificabile e semplice, tale che per ogni forma differenziale $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia :*

$$(3) \quad T(\omega) = \int_{\mathcal{C}} \omega$$

e tale che, detta L la lunghezza di \mathcal{C} , si abbia :

$$(4) \quad M(T) = L.$$

Nelle ipotesi dette esiste ²⁾ un insieme E aperto, limitato, di perimetro finito, semplicemente connesso, con $R^2 - (E \cup \mathcal{F}E)$ connesso, tale che per ogni forma $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia :

$$(5) \quad T(\omega) = \int_{\bar{E}} d\omega, \quad \text{oppure :} \quad T(\omega) = - \int_{\bar{E}} d\omega$$

$$(6) \quad M(T) = H^1(\mathcal{F}E) = P(E).$$

Siano $N_x(t, \mathcal{F}E)$, $N_y(t, \mathcal{F}E)$ le funzioni definite nell'insieme R dei numeri reali associando ad ogni $t \in R$ il numero (finito, infinito o

²⁾ [C 4], teorema 4.4.

nullo) dei punti di intersezione di $\mathcal{F}E$ con le rette di equazione $x = t$ e $y = t$ rispettivamente. Le due funzioni di t : $N_x(t, \mathcal{F}E)$ e $N_y(t, \mathcal{F}E)$ sono misurabili; infatti se l'insieme $\mathcal{F}E$ si proietta ortogonalmente nell'intervallo $[a, b)$ dell'asse delle x , fissato l'intero $p > 0$ dividiamo $[a, b)$ in 2^p intervalli uguali semiaperti $\delta_{k,p}$, intersechiamo $\mathcal{F}E$ con la striscia dei punti di \mathbb{R}^2 che si proiettano in $\delta_{k,p}$ e poi proiettiamo tale intersezione sull'asse delle y : otterremo un insieme misurabile del quale indichiamo con $\varphi_{k,p}(y)$ la funzione caratteristica. Si vede facilmente che :

$$N_y(t, \mathcal{F}E) = \lim_{p \rightarrow \infty} \sum_k \varphi_{k,p}(t)$$

e la funzione $N_y(t, \mathcal{F}E)$ risulta misurabile. In modo analogo si vede che $N_x(t, \mathcal{F}E)$ è misurabile.

Dalla (6) e precisamente dall'essere $H^1(\mathcal{F}E) < \infty$ si deduce, per note relazioni riguardanti le misure delle sezioni di insiemi³⁾, che le funzioni $N_x(t, \mathcal{F}E)$ e $N_y(t, \mathcal{F}E)$ sono sommabili. Esiste allora⁴⁾ una curva \mathcal{C} continua, chiusa e rettificabile, tale che sia :

$$(7) \quad [\mathcal{C}] = \mathcal{F}E$$

$$(8) \quad \int_E d\omega = \int_{\mathcal{C}} \omega$$

per ogni forma differenziale $\omega \in E^1(\mathbb{R}^2)$.

Dalle proprietà di E e da risultati noti⁵⁾ si deduce facilmente che tra le curve \mathcal{C} verificanti le (7) e (8) ve ne è una semplice.

Se è: $T = \partial E$, dalla (8) e (5) segue la (3); se invece è: $-T = \partial E$, basta prendere in considerazione la curva $-\mathcal{C}$ e sostituirla alla \mathcal{C} nella (3). La (4) segue dalle uguaglianze :

$$L = H^1([\mathcal{C}]) = H^1(\mathcal{F}E) = P(E)$$

³⁾ [F 2], teor. 3.2 a pag. 243.

⁴⁾ [C 1], teor. 1.III a pag. 12 e 2.1 a pag. 14.

⁵⁾ [C 2], teorema 5.1 e definizioni 1.2, 1.3; infatti si verifica immediatamente che gli insiemi E_{i_h} di quel teorema sono, nel caso presente, tutti vuoti ad eccezione di E_{11} che è uguale all'insieme E .

per la prima delle quali si può vedere [F 1], teor. 5.9 a pag. 144 e le altre seguono dalle (7) e (6).

OSSERVAZIONE 2. Abbiamo anche dimostrato che se l'insieme E è aperto, di perimetro finito, semplicemente connesso, con $R^2 - (E \cup \mathcal{F}E)$ connesso, esiste una curva continua \mathcal{C} rettificabile, chiusa e semplice, tale che per le forme $\omega \in E^1(R^2)$ vale la formula di Green (8).

TEOREMA 3. Sia $T \in Z_1(R^2)$; esiste una successione $\{\mathcal{C}_i\}$, eventualmente finita, di curve continue, chiuse, semplici e rettificabili, tali che per ogni forma $\omega \in E^1(R^2)$ si abbia:

$$(9) \quad T(\omega) = \sum_i \int_{\mathcal{C}_i} \omega$$

e tale che, detta L_i la lunghezza della curva \mathcal{C}_i , si abbia:

$$(10) \quad M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} L_i.$$

Nelle ipotesi poste esiste ⁶⁾ una successione $\{T_i\}$, eventualmente finita, di correnti rettificabili, chiuse e irriducibili, tali che:

$$T = \sum_i T_i$$

$$M(T) = \sum_i M(T_i).$$

Da queste uguaglianze, per il teorema 1, seguono le (9) e (10).

TEOREMA 4. Sia E un insieme misurabile, limitato e di perimetro finito; esiste una successione $\{\mathcal{C}_i\}$, eventualmente finita, di curve continue, chiuse, semplici e rettificabili, tali che per ogni

⁶⁾ [C 3], teorema 7.

forma $\omega \in E^1(\mathbb{R}^2)$ si abbia :

$$\int_E d\omega = \sum_i \int_{C_i} \omega$$

e tali che, detta L_i la lunghezza della curva C_i , si abbia :

$$P(E) = \sum_i L_i.$$

Il teorema 4 segue subito dal teorema 3, quando si identifichi il bordo di E con una corrente chiusa $T \in E_1(\mathbb{R}^2)$, che risulta intera ⁷⁾.

⁷⁾ [F F], teorema 8.14 a pag. 499.

BIBLIOGRAFIA

- [C 1] A. CHIFFI: *Sulla formula di Green nel piano*. Ricerche di Matematica, vol. 9 (1960), pp. 3-17.
- [C 2] A. CHIFFI: *La formula di Green per curve rettificabili*. Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. 19 (1965) pp. 207-232.
- [C 3] A. CHIFFI: *Correnti irriducibili*. Annali Scuola Norm. Sup. di Pisa, vol. 21 (1967).
- [C 4] A. CHIFFI: *Correnti irriducibili e insiemi di perimetro finito*. Rendiconti Sem. Mat. Padova, vol. 37 (1966).
- [DG 1] E. DE GIORGI: *Su una teoria generale della misura $(r - 1)$ -dimensionale in uno spazio a r dimensioni*. Annali di Matematica, vol. 36 (1954), pp. 191-213.
- [DG 2] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$ -dimensionali in uno spazio a r dimensioni*. Ricerche di Matematica, vol. 4 (1955), pp. 95-113.
- [F 1] H. FEDERER: *The (Φ, k) rectifiable subsets of n space*. Trans. Am. Math. Soc., vol. 62 (1947), pp. 114-192.
- [F 2] H. FEDERER: *Some integralgeometric theorems*. Trans. Am. Math. Society, vol. 77 (1954), pp. 238-261.
- [F F] H. FEDERER and W. FLEMING: *Normal and integral currents*. Annals of Mathematics, vol. 72 (1960) pp. 458-520.

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 novembre 1966.