Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Mario Miranda

Diseguaglianze di Sobolev sulle ipersuperfici minimali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 69-79

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__69_0>

DISEGUAGLIANZE DI SOBOLEV SULLE IPERSUPERFICI MINIMALI

MARIO MIRANDA *)

In questo lavoro si dimostra una diseguaglianza del tipo di Sobolev per funzioni definite su ipersuperfici minimali.

L'interesse del risultato sta nel fatto che la costante che compare nella maggiorazione dipende solo dalla dimensione della ipersuperficie considerata.

Per la dimostrazione si fa uso di un procedimento introdotto da De Giorgi in [1] e ci si avvale di una diseguaglianza isoperimetrica provata da Federer e Fleming per le correnti intere in [2].

1. Richiamiamo alcune definizioni e notazioni introdotte in [2] e [3].

Ad ogni funzione $f \in C^2(\Omega)$, con $\Omega \subset R^n$ aperto, associamo $n+1$ operatori differenziali $\delta_i (i = 1, \dots, n+1)$ su $\Omega \times R$ alla maniera seguente. Indicata con $\tilde{f}$ l'applicazione di $\Omega \times R$ in $R : \tilde{f}(x, y) = = y - f(x)$, e posto $\nu_i = D_i \tilde{f} \, | D\tilde{f} |^{-1}$ $(i = 1, \dots, n+1)$ $\left(D_i = \dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)$ gli operatori δ_i risultano definiti da

$$(1.1) \qquad \delta_i = D_i - \nu_i \sum_{h=1}^{n+1} \nu_h D_h .$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Com. Naz. per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'autore: Istituto Matematico dell'Università, Pisa.

Per corrente k-dimensionale definita su un aperto Ω di R^n $(0 \leq k \leq n)$ intendiamo un funzionale lineare continuo definito sulle forme differenziali di grado k a coefficienti in $C_0^\infty(\Omega)$ (1).

Le correnti qui considerate sono più generali di quelle di Federer e Fleming [2], le correnti di Federer e Fleming essendo definite sulle forme differenziali a coefficienti in $C^\infty(\Omega)$. Le definizioni di bordo, di massa, di supporto di una corrente si danno per le correnti qui considerate in maniera analoga a quella di Federer e Fleming. Per tali definizioni rinviamo quindi a [2]. Solo ricordiamo che se si indica con T una corrente allora con ∂T si indicherà il suo bordo, con $\operatorname{supp} T$ si indicherà il suo supporto e con $M(T)$ la sua massa. Se Ω è un aperto di R^n, se $F\colon \Omega \longrightarrow A$, con A aperto di R^m, è di classe C^∞ ed è tale che per ogni compatto K di A $F^{-1}(K)$ è compatto di Ω, se T è una corrente definita su Ω, con $F_\# T$ si indicherà la corrente definita su A da $F_\# T = T \circ F^\#$, dove $F^\#$ è la trasformazione indotta da F sulle forme differenziali. Se T è una corrente k-dimensionale e ω una forma differenziale di grado h $(0 \leq h \leq k)$ indicheremo con $T \wedge \omega$ la corrente $(k-h)$-dimensionale definita da: $\langle T \wedge \omega, \sigma \rangle = \langle T, \omega \wedge \sigma \rangle$ dove nel secondo membro $\wedge$ indica il prodotto esterno delle forme differenziali.

Ricordiamo che se T è una corrente di massa finita definita sull'aperto Ω allora essa può essere considerata come un funzionale definito su tutte le forme differenziali a coefficienti funzioni di Baire limitate, continuo rispetto alla convergenza puntuale per successioni di forme a coefficienti equilimitati. In tal caso ha senso considerare, per $E \subset \Omega$ insieme di Borel, la $T \wedge \varphi_E$ (dove φ_E è la funzione caratteristica di E). Nel seguito scriveremo $T \cap E$ per $T \wedge \varphi_E$. Ad E può essere associata la corrente n-dimensionale

---

(1) $C_0^\infty(\Omega)$ indica l'insieme delle funzioni C^∞ a supporto compatto contenuto in Ω. In $C_0^\infty(\Omega)$ si considera la seguente convergenza: $\varphi_i \to \varphi$ se esiste un compatto K di Ω tale che $\operatorname{supp} \varphi_i \subset K$, $\forall\, i$ e se per ogni $\alpha \in N^n$ ($N=$ interi non negativi) si ha che $D^\alpha \varphi_i \to D^\alpha \varphi$ uniformemente $\left(D^\alpha = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}} \right)$. Per convergenza delle forme differenziali si intende la convergenza dei loro coefficienti, e rispetto a tale convergenza le correnti devono essere continue.

$\widetilde{E}$ definita da

$$(1.2)\qquad \langle \widetilde{E}, \omega(x)\, dx_1 \wedge \ldots \wedge dx \rangle = \int_E \omega(x)\, dx.$$

Alla superficie $S = \{(x, f(x))\,;\, x \in \Omega\}$ con $\Omega \subset R^n$ e $f \in C^2(\Omega)$ associamo la corrente $\widetilde{S}$ su $\Omega \times R$ data da $F_{\#}\,\widetilde{\Omega}$, dove $F(x) = (x, f(x))$. Avremo allora per $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} \omega_i \widehat{dx_i}$ $(\widehat{dx_i} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1})$, $\omega_i \in C_0^\infty(\Omega \times R)$ $(i = 1, \ldots, n+1)$:

$$(1.3)\qquad \langle \widetilde{S}, \omega \rangle = \langle \widetilde{\Omega}, F^{\#} \omega \rangle = (-1)^n \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \omega_i(x, f(x))\, D_i f(x)\, dx +$$

$$+ \int_\Omega \omega_{n+1}(x, f(x))\, dx = (-1)^{n+1} \int_S \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^i \omega_i \nu_i\, dH_n \ (^2),$$

dove H_n è la misura di Hausdorff n-dimensionale in R^{n+1}.

2. In questo paragrafo proveremo alcuni risultati preliminari alla dimostrazione della diseguaglianza di Sobolev.

LEMMA 1. *Per* $S = \{(x, f(x))\,;\, x \in \Omega\}$, *con* $\Omega \subset R^n$ *aperto e* $f \in C^2(\Omega)$, *e per* $g \in C_0^1(\Omega \times R)$ *vale*

$$(2.1)\qquad M[\partial(\widetilde{S} \cap \{(x, y)\,;\, |g(x, y)| > t\})] \le \frac{d}{dt} \int_{S \cap \{(x,y)\,;\,|g(x,y)|<t\}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n\,,$$

per ogni $t > 0$ *per cui esiste il secondo membro.*

---

(2) dx è l'elemento di volume in Ω, non lo si confonda con $dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{n+1}$.

DIM. Fissato $t > 0$ per cui il secondo membro di (2.1) esista, per $\varepsilon > 0$ indichiamo con ψ_ε la funzione definita su Ω da

$$\text{(2.2)} \qquad \text{per } x \in \Omega : \psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } |g(x, f(x))| \leq t \\ 1, \text{ se } |g(x, f(x))| \geq t + \varepsilon \\ \varepsilon^{-1}(|g(x, f(x))| - t), \\ \text{se } t < |g(x, f(x))| < t + \varepsilon. \end{cases}$$

Indicata allora con $\widetilde{\psi}_\varepsilon$ la funzione definita su $\Omega \times R$ da

$$\text{(2.3)} \qquad \text{per } x \in \Omega,\ y \in R : \widetilde{\psi}_\varepsilon(x, y) = \psi_\varepsilon(x),$$

si ha

$$\text{(2.4)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon = \widetilde{S} \cap \{(x, y) ; |g(x, y)| > t\},$$

e quindi anche

$$\text{(2.5)} \qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \partial(\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon) = \partial[\widetilde{S} \cap \{(x, y) ; |g(x, y)| > t\}],$$

ovvero, per la semicontinuità della massa,

$$\text{(2.6)} \qquad M[\partial(\widetilde{S} \cap \{(x, y) ; |g(x, y)| > t\})] \leq \min_{\varepsilon \to 0+} \lim M[\partial(\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon)].$$

Per quanto riguarda $M[\partial(\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon)]$ osserviamo che, se ω è una $n - 1)$-forma differenziale su R^{n+1} a coefficienti in $C_0^\infty(\Omega \times R)$, si ha

$$\text{(2.7)} \qquad \langle \partial(\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon), \omega \rangle = \langle \widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon, d\omega \rangle = \langle \widetilde{S}, \widetilde{\psi}_\varepsilon\, d\omega \rangle.$$

Quindi, se indichiamo con $\{\sigma_h\}$ una successione di funzioni di $C_0^\infty(\Omega)$ tali che

$$\text{(2.8)} \qquad \text{uniformemente su } \Omega : \sigma_h \longrightarrow \psi_\varepsilon,$$

$$\text{(2.9)} \qquad \text{per } i = 1, \ldots, n : D_i \sigma_h \longrightarrow D_i \psi_\varepsilon \text{ in } L^1(\Omega),$$

e se poniamo

$$\text{(2.10)} \qquad \text{per } x \in \Omega,\ y \in R: \ \tilde{\sigma}_h(x, y) = \sigma_h(x),$$

si avrà

$$\text{(2.11)} \qquad \langle \tilde{S}, \tilde{\psi}_\varepsilon\, d\omega \rangle = \lim_{h \to \infty} \langle \tilde{S}, \tilde{\sigma}_h\, d\omega_\varepsilon \rangle.$$

Poichè d'altra parte vale

$$\text{(2.12)} \qquad \forall\, h: \ \langle \tilde{S}, d(\tilde{\sigma}_h\, \omega) \rangle = 0,$$

si avrà

$$\text{(2.13)} \qquad \forall\, h: \ \langle \tilde{S}, \tilde{\sigma}_h\, d\omega \rangle = - \langle \tilde{S}, d\tilde{\sigma}_h \wedge \omega \rangle.$$

Quindi se

$$\omega = \sum_{i<j=1}^{n+1} \omega_{ij}\, \widehat{dx_i}\, \widehat{dx_j}$$

$$(\widehat{dx_i}\, \widehat{dx_j} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_{i-1} \wedge dx_{i+1} \wedge \ldots\ dx_{j-1} \wedge dx_{j+1} \wedge \ldots \wedge dx_{n+1})$$

si ha

$$\text{(2.14)} \qquad \forall\, h: \langle \tilde{S}, d\tilde{\sigma}_h \wedge \omega \rangle =$$

$$= \langle \tilde{S}, \sum_{i<j=1}^{n+1} [(-1)^{i-1} D_i \tilde{\sigma}_h\, \omega_{ij}\, \widehat{dx_j} + (-1)^{j-2} D_j\, \tilde{\sigma}_h\, \omega_{ij}\, \widehat{dx_i}] \rangle,$$

ovvero, ricordando la (1.3),

$$\text{(2.15)} \qquad \forall\, h: \langle \tilde{S}, d\tilde{\sigma}_h \wedge \omega \rangle =$$

$$= (-1)^{n+1} \int_S \sum_{i<j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} (\nu_i\, D_j\, \tilde{\sigma}_h - \nu_j\, D_i\, \tilde{\sigma}_h)\, \omega_{ij}\, dH_n .$$

Dalle (2.15), (2.13), (2.11), (2.9), e (2.7) si ha allora

$$\text{(2.16)} \qquad \langle \partial(\tilde{S} \wedge \tilde{\psi}_\varepsilon), \omega \rangle =$$

$$= (-1)^n \int_S \sum_{i<j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} (\nu_i\, D_j\, \tilde{\psi}_\varepsilon - \nu_j\, D_i\, \tilde{\psi}_\varepsilon)\, \omega_{ij} dH_n ,$$

e quindi, per le (2.2) e (2.3),

$$(2.17) \qquad \langle \partial (\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon), \omega \rangle =$$

$$= (-1)^n \varepsilon^{-1} \int\limits_{S \cap \{(x,y)\,;\, t < |g(x,y)| < t+\varepsilon\}} \sum_{i<j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} (\nu_i D_j g - \nu_j D_i g)\, \omega_{ij}\, dH_n .$$

Ma valendo, per la definizione dei δ_i,

$$(2.18) \qquad \text{per } i, j = 1, \dots, n+1 : \ \nu_i D_j - \nu_j D_i = \nu_i \delta_j - \nu_j \delta_i ,$$

si ha

$$(2.19) \qquad \langle \partial (\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon), \omega \rangle =$$

$$= (-1)^n \varepsilon^{-1} \int\limits_{S \cap \{(x,y)\,;\, t < |g(x,y)| < t+\varepsilon\}} \sum_{i<j=1}^{n+1} (-1)^{i+j} (\nu_i \delta_j g - \nu_j \delta_i g)\, \omega_{ij}\, dH_n .$$

Dalla (2.19) si ha allora

$$(2.20) \qquad \text{per } M(\omega) \leq 1 : \ \langle \partial (\widetilde{S} \wedge \widetilde{\psi}_\varepsilon), \omega \rangle \leq \varepsilon^{-1} \int\limits_{S \cap \{(x,y)\,;\, t < |g(x,y)| < t+\varepsilon\}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n .$$

Dalle (2.20) e (2.6) si ha allora l'asserto.

c. v. d.

LEMMA 2. *Sia* $S = \{(x, f(x))\,;\, x \in \Omega\}$, *con* $\Omega \subset R^n$ $(n > 1)$ *aperto semplicemente connesso e* $f \in C^2(\Omega)$, *ipersuperficie minimale* (*ovvero* f *è soluzione dell'equazione delle ipersuperfici di area minima*) *di area finita. Allora per ogni corrente n-dimensionale* T *a supporto compatto contenuto in* $\Omega \times R$ *e di bordo nullo vale*

$$(2.21) \qquad \text{area } S = M(\widetilde{S}) \leq M(\widetilde{S} + T).$$

DIM. Questa dimostrazione è la trascrizione al caso generale della dimostrazione che Fleming dà di un risultato analogo per il caso $n = 2$, nel § 5 di [4].

---

(3) Ricordiamo che f risulta allora necessariamente analitica.

Consideriamo la forma differenziale $\omega = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1-i} \nu_i \, \widehat{dx_i}$.
Poichè la condizione di minimalità di S si può esprimere anche nella forma

$$\sum_{i=1}^{n+1} D_i \nu_i = 0 , \tag{2.22}$$

si ha

$$d\omega = \left(\sum_{i=1}^{n+1} (-1)^n D_i \nu_i \right) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{n+1} = 0 . \tag{2.23}$$

Essendo Ω semplicemente connesso tale sarà $\Omega \times R$ e quindi dalla (2.23) si ricava che esiste una $(n-1)$-forma differenziale σ a coefficienti in $C^\infty(\Omega \times R)$ e tale che $d\sigma = \omega$. Allora se T è una corrente n-dimensionale con supp $T \subset \Omega \times R$ e $\partial T = 0$ si ha

$$\langle T, \omega \rangle = \langle T, d\sigma \rangle = \langle \partial T, \sigma \rangle = 0 , \tag{2.24}$$

e quindi anche

$$\langle \tilde{S}, \omega \rangle = \langle \tilde{S} + T, \omega \rangle . \tag{2.25}$$

Ma, ricordando la (1.3), si ha

$$\langle \tilde{S}, \omega \rangle = \text{area } S , \tag{2.26}$$

mentre essendo $M(\omega) = 1$ vale

$$\langle \tilde{S} + T, \omega \rangle \leq M(\tilde{S} + T) . \tag{2.27}$$

Dalle (2.25), (2.26) e (2.27) segue allora l'asserto.

c. v. d.

Teorema 1. *Per ogni intero $n > 1$ esiste una costante $\beta(n)$ tale che: se $S = \{(x, f(x))\, ;\, x \in \Omega\}$, con $\Omega \subset R^n$ aperto convesso e $f \in C^2(\Omega)$, è ipersuperficie minimale e se $g \in C_0^1(\Omega \times R)$ allora vale*

$$[H_n(S \cap \{(x,y)\, ;\, |g(x,y)| > t\})]^{\frac{n-1}{n}} \leq \tag{2.28}$$
$$\leq \beta(n) \frac{d}{dt} \int_{S \cap \{(x,y)\,;\,|g(x,y)|<t\}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n ,$$

per ogni $t > 0$ per cui esiste il secondo membro.

DIM. Fissato $t > 0$ per cui esista il secondo membro di (2.28), per tale t, grazie al Lemma 1, si ha che $X = \widetilde{S} \cap \{(x, y) ; |g(x, y)| > t\}$ è corrente intera a supporto compatto contenuto in $\Omega \times R$.

Allora, per quanto è provato in [2] (cfr. Rem. 6.2), esiste una corrente intera Y n-dimensionale a supporto compatto contenuto in $\Omega \times R$ tale che

$$\partial Y = \partial X, \quad M(Y)^{\frac{n-1}{n}} \leq \beta(n) M(\partial X), \tag{2.29}$$

dove $\beta(n)$ dipende solo da n.

Applicando il Lemma 2 alla corrente $T = Y - X$ si ha

$$M(\widetilde{S}) \leq M(\widetilde{S} - X + Y), \tag{2.30}$$

e, poichè valgono ovviamente

$$M(\widetilde{S} - X + Y) \leq M(\widetilde{S} - X) + M(Y), \tag{2.31}$$

$$M(\widetilde{S} - X) = M(\widetilde{S}) - M(X), \tag{2.32}$$

si ricava

$$M(X)^{\frac{n-1}{n}} \leq \beta(n) M(\partial X). \tag{2.33}$$

Dalla (2.33) ricordando il Lemma 1 e osservando che $M(X) = H_n(S \cap \{(x, y) : |g(x, y)| > t\})$ si ha l'asserto.

c. v. d.

3. Proveremo ora, utilizzando i risultati del n. 2, la disuguaglianza di Sobolev.

TEOREMA 2. *Per ogni intero $n > 1$ e per ogni reale $\alpha : 1 \leq \alpha < \frac{n}{n-2}$ (per $n = 2$ deve intendersi ogni $\alpha \geq 1$) esiste una costante $\beta(n, \alpha)$ tale che: se $S = \{(x, f(x)) ; x \in \Omega\}$, con $\Omega \subset R^n$ aperto convesso* *e $f \in C^2(\Omega)$, è ipersuperficie minimale e se $g \in C_0^1(\Omega \times R)$ allora vale*

$$(3.1)\qquad \left(\int_S |g|^{2\alpha}\, dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq$$

$$\leq \beta(n, \alpha)\, [H_n(S \cap \{(x, y);\ g(x, y) \neq 0\})]^{\frac{2}{n} + \frac{1}{\alpha} - 1} \int_S \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2\, dH_n .$$

Dim. (Questa dimostrazione ricalca la dimostrazione del Lemma III di [1]). Poniamo

$$(3.2)\qquad E_\lambda = S \cap \{(x, y);\ |g(x, y)| > \lambda\}.$$

Indichiamo con $\{\lambda_h\}$ la successione di numeri reali definita da

$$(3.3)\qquad \lambda_h = \inf\{\lambda;\ H_n(E_\lambda) \leq 2^{-nh} H_n(E_0)\} .$$

Scrivendo X_h per E_{λ_h} si ha

$$(3.4)\qquad \left(\int_S |g|^{2\alpha}\, dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \sum_{h=0}^{\infty} \left(\int_{X_h - X_{h+1}} |g|^{2\alpha}\, dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Poichè valgono ovviamente

$$(3.5)\qquad \left(\int_{X_h - X_{h+1}} |g|^{2\alpha}\, dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \lambda_{h+1}^2\, [H_n(X_h)]^{\frac{1}{\alpha}} ,$$

$$(3.6)\qquad H_n(X_h) \leq 2^{-nh} H_n(E_0) ,$$

dalla (3.4) si ricava

$$(3.7)\qquad \left(\int_S |g|^{2\alpha}\, dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq [H_n(E_0)]^{\frac{1}{\alpha}} \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_{h+1}^2\, 2^{-\frac{nh}{\alpha}} .$$

D'altra parte è, per il Teorema 1,

$$(3.8)\qquad \int\limits_{X_h - X_{h+1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n =$$

$$= -\int\limits_{\lambda_h}^{\lambda_{h+1}} \left(\frac{d}{dt} \int\limits_{E_t} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n\right) dt \geq \beta(n)^{-1} \int\limits_{\lambda_h}^{\lambda_{h+1}} [H_n(E_t)]^{\frac{n-1}{n}}\, dt,$$

e poichè vale, per la (3.3),

$$(3.9)\qquad H_n(E_t) > 2^{-n(h+1)} H_n(E_0), \qquad \text{per} \qquad t < \lambda_{h+1},$$

si ha

$$(3.10)\qquad \int\limits_{X_h - X_{h+1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n \geq \beta(n)^{-1}\, 2^{-(n-1)(h+1)} (\lambda_{h+1} - \lambda_h) [H_n(E_0)]^{\frac{n-1}{n}}.$$

Per la diseguaglianza di Schwarz avendosi poi

$$(3.11)\qquad H_n(X_h - X_{h+1}) \int\limits_{X_h - X_{h+1}} \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2\, dH_n \geq \left(\int\limits_{X_h - X_{h+1}} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2}\, dH_n\right)^2,$$

dalle (3.10) e (3.6) si ricava

$$(3.12)\qquad \int\limits_{X_h - X_{h+1}} \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2\, dH_n \geq \beta(n)^{-2} [H_n(E_0)]^{1-\frac{2}{n}} (\lambda_{h+1} - \lambda_h)^2\, 2^{h(2-n)+2(1-n)}.$$

Poichè vale ovviamente

$$(3.13)\qquad \lambda_{k+1}^2 \leq (k+1)^2 \max_{0 \leq h \leq k} (\lambda_{h+1} - \lambda_h)^2,$$

dalla (3.12) si ha

$$(3.14)\qquad \lambda_{k+1}^2 \leq \beta(n)^2\, 2^{2(n-1)} [H_n(E_0)]^{\frac{2}{n}} \cdot 2^{k(n-2)} (k+1)^2 \cdot \int\limits_S \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2\, dH_n.$$

Dalle (3.14) e (3.7) segue allora

$$\left(\int_S |g|^{2\alpha} dH_n\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \tag{3.15}$$

$$\leq \beta(n)^2\, 2^{2(n-1)} [H_n(E_0)]^{\frac{2}{n}+\frac{1}{\alpha}-1} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2\, 2^{k\left(n-2-\frac{n}{\alpha}\right)} \cdot \int_S \sum_{i=1}^{n+1} (\delta_i g)^2\, dH_n,$$

ovvero vale l'asserto con

$$\beta(n, \alpha) = \beta(n)^2\, 2^{2(n-1)} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)^2\, 2^{k\left(n-2-\frac{n}{\alpha}\right)} \tag{3.16}$$

dove, si ricordi, $\beta(n)$ è la costante del Teorema 1 ovvero la costante isoperimetrica di Federer e Fleming (v. [2], Rem. 6.2).

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

1. DE GIORGI, E.: *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* Mem. Acc. Sc. Torino, 1957.
2. FEDERER, H.-FLEMING, W. H.: *Normal and integral currents.* Ann. of Math., vol. 72, 1960.
3. MIRANDA M.: *Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (questo numero).
4. FLEMING, W. H.: *On the oriented Plateau problem.* Rend. Circ. Mat. Palermo. vol. XI, 1962.
5. MIRANDA, M.: *Analiticità delle superfici di area minima in R^4.* Rend. Acc. Naz. Lincei, vol. 38, 1965.

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 luglio 1966.