RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

REINHOLD BAER

Normalisatorreiche Gruppen

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 358-450

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__358_0>

NORMALISATORREICHE GRUPPEN [1]

Von REINHOLD BAER [*]

Es ist wohlbekannt, dass Gruppen mit Maximal- oder Minimalbedingung dann und nur dann nilpotent sind, wenn ihre echten Untergruppen von ihrem Normalisator verschieden sind. Darüber hinaus haben alle die Gruppen die eben angegebene Normalisatoreigenschaft, deren von 1 verschiedene epimorphe Bilder von 1 verschiedene Zentren haben. Es legt dies den Versuch nahe, Auflösbarkeitseigenschaften durch die Forderung zu erhalten, dass Untergruppen in irgendeinem Sinne «häufig» von ihrem Normalisator verschieden sind. Diese Überlegung führt zum Begriff der normalisatorreichen Gruppe. Dies sind Gruppen G mit folgender Eigenschaft:

$\mathfrak{nr}$: *Ist U eine Untergruppe von G mit $U = \mathfrak{n}_G U \neq G$, so gibt es eine Untergruppe V von G mit $V = V^U$ und $V \not\subseteq U \not\subseteq V$.*

Es ist dies eine äusserst umfassende Klasse: sie enthält etwa alle direkten Produkte zweier von 1 verschiedener Gruppen; andererseits sind nicht alle Untergruppen und epimorphen Bilder normalisatorreicher Gruppen wieder normalisatorreich. Wir werden deshalb allerlei Unterklassen der Klasse der normalisatorreichen Gruppen untersuchen, von denen die folgenden drei besonders erwähnenswert erscheinen:

$\mathfrak{unr}$-GRUPPEN sind Gruppen, deren sämtliche Untergruppen normalisatorreich sind. Es ist dies immer noch eine recht umfassende Gruppenklasse: sie ist untergruppen- und erweiterungsvererblich; sie

---

[*] Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, Frankfurt a. M.

[1] Über Teile dieser Untersuchung haben wir im Frühjahr 1965 an den Universitäten Firenze, Napoli, Padova vorgetragen.

ist residuell. Insbesondere ist eine Gruppe sicher dann eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe, wenn von 1 verschiedene Untergruppen auch von ihrer Kommutatorgruppe verschieden sind. Hieraus folgt etwa, dass alle freien Gruppen $\mathfrak{unr}$-Gruppen sind, so dass diese Gruppenklasse gewiss nicht epimorphismenvererblich ist. Andererseits ist eine artinsche Gruppe [= Gruppe mit Minimalbedingung] dann und nur dann eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe, wenn sie auflösbar ist.

$\mathfrak{fnr}$-GRUPPEN sind Gruppen, deren sämtliche Faktoren [= epimorphe Bilder von Untergruppen] normalisatorreich sind. Auch diese Gruppenklasse ist sehr gross; sie ist faktorenvererblich und die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:

(a) G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.

(b) Jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G besitzt einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{unr}$-Normalteiler.

(c) Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{fnr}$-Subnormalteiler.

(d) Ist H_0 ein minimaler Normalteiler eines Faktors von G und H_{i+1} für $0 \leq i$ ein minimaler Normalteiler eines Faktors von H_i, so ist wenigstens eines der H_i eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.

Dieses Kriterium gestattet es, recht umfangreiche Gruppenklassen aufzuweisen, die nur aus $\mathfrak{fnr}$-Gruppen bestehen. So ist z.B. jede Hypernilgruppe [= Gruppe, deren nicht-triviale epimorphe Bilder nicht triviale zyklische Subnormalteiler besitzen] eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.

Artinsche wie auch abelsche [wie auch viele andere] Gruppen genügen der

HAUPTMINIMALBEDINGUNG: Ist H_0 ein minimaler Normalteiler eines Faktors von G, ist H_{i+1} für $0 \leq i$ ein minimaler Normalteiler eines Faktors von H_i, so bricht die Kette der H_i nach endlich vielen Schritten [mit einer notwendig einfachen Gruppe] ab.

Dann gilt, dass eine Gruppe mit Hauptminimalbedingung dann und nur dann eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist, wenn jeder einfache Faktor mit maximaler Untergruppe zyklisch von Primzahlordnung ist.

BEZEICHNUNGEN

$\{...\}$ = von den eingeschlossenen Elementemengen erzeugte Untergruppe

$x \circ y = x^{-1} y^{-1} xy, \;\; x^y = y^{-1} xy$

X^Y = Menge der x^y mit x aus X und y aus Y

G' = Kommutatorgruppe von G = Ableitung von $G = \{G \circ G\}$

$G^{(0)} = G$, $G^{(i+1)} = [G^{(i)}]' = (i+1)$-te Ableitung von G

$\mathfrak{z}G$ = Zentrum von G

X_Y = Produkt aller in X enthaltenen Normalteiler der Obergruppe Y von $X := \bigcap_{y \in Y} X^y$

$\mathfrak{n}_V U$ = Normalisator von U in V

$X \subset Y :=: X$ ist echte Untergruppe von Y

Faktor = epimorphes Bild einer Untergruppe

artinsche Gruppe = Gruppe, von deren Untergruppen die Minimalbedingung erfüllt wird

noethersche Gruppe = Gruppe, deren sämtliche Untergruppen endlich erzeugbar sind

$\mathfrak{le}$ = lokal-$\mathfrak{e}$ = endlich erzeugbare Untergruppen sind $\mathfrak{e}$-Gruppen

hyperabelsch = epimorphe Bilder $\neq 1$ besitzen abelsche Normalteiler $\neq 1$

auflösbar [von endlicher Stufe] = fast alle Abteilungen sind trivial

polyzyklisch = noethersch und auflösbar = noethersch und hyperabelsch

hyper-$\mathfrak{e}$ = epimorphe Bilder $\neq 1$ besitzen $\mathfrak{e}$-Normalteiler $\neq 1$.

§ 1. Die $\mathfrak{nr}$-Gruppen.

Der Begriff des Normalisatorreichtums kann verschieden scharf gefasst werden. Im vorliegenden Abschnitt soll der umfassendste

Begriff diskutiert werden. Die dabei abgeleiteten Kriterien werden später von Nutzen sein.

Die Gruppe G heisse $\mathfrak{nr}$-*Gruppe*, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

$\mathfrak{nr}$: *Ist die echte Untergruppe U von G normalisatorgleich, so gibt es eine Untergruppe V von G mit $V = V^U$ und $V \not\subseteq U \not\subseteq V$.*

Sind A, B Untergruppen von G mit $A = \mathfrak{n}_G A \subset G, B^A = B$ und $B \not\subseteq A \not\subseteq B$, so folgt aus der wohlbekannten Formel

$$b \circ xy = (b \circ y)(b \circ x)^y,$$

dass $(B \circ A)^A = B \circ A$ ist. Natürlich ist $B \circ A \subseteq B$, so dass $A \not\subseteq B \circ A$ ist. Wäre $B \circ A \subseteq A$, so wäre $B \subseteq \mathfrak{n}_G A = A$, was ausgeschlossen ist. Also hat $B \circ A$ bezgl. A im wesentlichen dieselben Eigenschaften wie B.

Wir werden später zeigen, dass die Bedingung $\mathfrak{nr}$ sich weder auf Untergruppen noch auf epimorphe Bilder vererbt. Zunächst wollen wir eine Unterklasse der Klasse der $\mathfrak{nr}$-Gruppen charakterisieren.

LEMMA 1.1: *Sind Durchschnitte und Erzeugnisse beliebiger Mengen von Subnormalteilern der Gruppe G wieder Subnormalteiler von G, so sind die folgenden Eigenschaften von G äquivalent*:

(A) *Ist die Untergruppe U von G kein Subnormalteiler von G, so gibt es einen Subnormalteiler V von G mit $V = V^U$ und $V \not\subseteq U \not\subseteq V$.*

(B) *Ist S^* das Produkt aller echten Normalteiler des Subnormalteilers S von G, ist S/S^* nicht abelsch, so gibt es einen Subnormalteiler T von G mit $T = T^S$ und $T \not\subseteq S \not\subseteq T$.*

BEMERKUNGEN: **A.** Unter einem Subnormalteiler verstehen wir mit H. Wielandt eine Untergruppe U von G folgender Art:

Es gibt eine endliche Kette von Untergruppen U_i derart, dass

$$U = U_0,\ U_i \text{ ein Normalteiler von } U_{i+1},\ U_n = G$$

ist.

B. Da von G verschiedene, normalisatorgleiche Untergruppen von G sicher keine Subnormalteiler von G sind, sind alle Gruppen mit der Eigenschaft (A) insbesondere auch $\mathfrak{nr}$-Gruppen.

C. Ist die Gruppe $G = A \otimes B$ direktes Produkt zweier von 1 verschiedener Gruppen A und B, ist U eine Untergruppe von G mit $1 \subset U \subset G$, so unterscheiden wir zwei Fälle:

I. Ist U in A enthalten, so wird B von U normalisiert und U ist weder Unter- noch Obergruppe von B. Entsprechendes gilt, wenn U in B enthalten ist.

II. Ist U weder in A noch in B enthalten, so können wir wegen $U \neq G$ annehmen, dass A nicht in U enthalten ist. Dann wird A von U normalisiert und ist weder Ober- noch Untergruppe von U.

Die Gruppe G genügt also einer besonders scharfen Form der Bedingungen (A) und nr.

D. Bekanntlich sind Durchschnitte zweier Subnormalteiler stets wieder Subnormalteiler, während das Erzeugnis zweier Subnormalteiler nicht immer ein Subnormalteiler ist. Für unendliche Mengen von Subnormalteilern kann man erst recht nicht erwarten, dass ihre Durchschnitte und Erzeugnisse wieder Subnormalteiler sind. Gilt aber der Doppelkettensatz für Subnormalteiler, so sind die Erzeugnisse zweier Subnormalteiler nach einem Satz von Wielandt stets wieder Subnormalteiler. Hieraus folgert man mühelos (unter Benutzung des Doppelkettensatzes für Subnormalteiler), dass Durchschnitte und Erzeugnisse beliebiger Mengen von Subnormalteilern stets wieder Subnormalteiler sind.

E. Ist G eine zyklische Gruppe von Primzahlpotenzordnung p^n mit $1 < n$, so ist jede Untergruppe von G Normalteiler, so dass Bedingung (A) unseres Satzes trivial erfüllt ist. Aber von zwei Untergruppen von G ist stets eine in der andern enthalten, so dass (B) nicht in der schärferen Form gilt:

(B′) Ist S ein Subnormalteiler von G, ist das Produkt aller echten Normalteiler von S ein echter Normalteiler von S, so gibt es einen von S normalisierten Subnormalteiler von G, der weder Untergruppe noch Obergruppe von S ist.

F. Ist G die alternierende Gruppe des Grades 4, so sind die zyklischen Untergruppen der Ordnung 3 die sämtlichen Nichtsubnormalteiler von G. Sie normalisieren den Normalteiler S der Ordnung 4, der weder Ober- noch Untergruppe von ihnen ist. Es gilt also wieder (A). Weiter ist S das Produkt seiner echten Normalteiler (als elementar abelsche Gruppe der Ordnung 4). Doch sind alle von G verschiedenen Subnormalteiler von G in S enthalten, so dass (B) nicht in der folgenden schärferen Form gilt:

(B″) Ist S ein Subnormalteiler von G und S^* das Produkt aller echten Normalteiler von S, ist S/S^* nicht zyklisch von Primzahlordnung, so gibt es einen von S normalisierten Subnormalteiler von G, der weder Ober- noch Untergruppe von S ist.

G. Aus (B) folgt sofort, dass G/G^* abelsch ist, wenn G^* das Produkt aller echten Normalteiler von G ist; und diese Aussage lässt sich noch ein wenig verallgemeinern.

Beweis von Lemma 1.1: Wir nehmen zunächst die Gültigkeit von (A) an und betrachten einen Subnormalteiler S von G mit nicht-abelschem S/S^*, wobei S^* das Produkt aller echten Normalteiler von S ist. Dann ist S/S^* eine nicht-abelsche, einfache Gruppe. Hieraus folgt die Existenz einer Untergruppe U mit

$$S^* \subset U \subset S;$$

und es folgt aus der Einfachheit von S/S^*, dass U kein Subnormalteiler von G ist. Wegen (A) ist die Menge $\mathfrak{X}$ aller von U normalisierten Subnormalteiler von G, die weder Ober- noch Untergruppen von U sind, nicht leer.

Gehört X zu $\mathfrak{X}$, so ist X auch ein Subnormalteiler von $\{S, X\}$; und $\{S, X\}$ ist nach Voraussetzung ein Subnormalteiler von G. Unter allen X mit $\{S, X\}$ verbindenden Normalketten gibt es eine kürzester Länge $s(X)$; und unter allen X in $\mathfrak{X}$ gibt es eines K mit minimalem $s(K)$. Dann gibt es Untergruppen K_i mit

$$K = K_0, \; K_i \text{ ist ein Normalteiler von } K_{i+1}, K_{s(K)} = \{S, K\}.$$

Im Normalisator von K liegen dann U und K_1, so dass K auch von allen Untergruppen aus der Menge der U-Transformierten von K_1 normalisiert wird. Insbesondere ist $H = \{K_1^U\}$ als Erzeugnis von Subnormalteilern selbst ein Subnormalteiler von G. Weiter wird H von U normalisiert und es gilt

$$K \subseteq K_1 \subseteq H \subseteq \{K_1, U\} \subseteq \{S, K\},$$

so dass $\{S, K\} = \{S, H\}$ wird. Es gibt dann eine H und $\{S, H\}$ verbindende Normalkette, deren Länge kürzer als $s(K)$ ist. Aus der Minimalität von $s(K)$ folgt dann, dass H nicht zu $\mathfrak{L}$ gehören kann. Da aber H von U normalisiert wird und (mit K) auch keine Untergruppe von U ist, da H auch ein Subnormalteiler von G ist, so folgt, dass $U \subseteq H$ ist. Der Subnormalteiler K von G enthält U und also auch S nicht. Wäre K in S enthalten, so wäre K ein von S verschiedener Subnormalteiler von S, also auch in einem echten Normalteiler von S enthalten. Folglich wäre K eine Untergruppe der Untergruppe S^* von U, was unserer Wahl von K (in $\mathfrak{L}$) widerspräche. Der Subnormalteiler K von G ist also weder Ober- noch Untergruppe von S. Weiter wird K von H normalisiert. Schliesslich haben wir $U \subseteq H$ gezeigt, so dass $U \subseteq S \cap H$ ist. Es ist also $S \cap H$ ein Subnormalteiler von G mit

$$S^* \subset U \subset S \cap H \subseteq S.$$

Aus der Einfachheit von S/S^* folgt nun $S = S \cap H \subseteq H$, so dass K auch von der Untergruppe S von H normalisiert wird. Damit haben wir (B) aus (A) abgeleitet.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (B) an und betrachten eine Untergruppe U, die kein Subnormalteiler von G ist. Der Durchschnitt S aller U enthaltenden Subnormalteiler von G ist nach Voraussetzung wieder ein Subnormalteiler von G, so dass insbesondere $U \subset S$ ist. Ist E ein echter Normalteiler von S, so ist E ein Subnormalteiler von G mit $E \subset S$, der also gewiss U nicht enthält. Ist erstens unter den echten Normalteilern E von S einer, der nicht in U enthalten ist, so haben wir einen von U normalisierten Subnormalteiler gefunden, der weder Ober- noch Untergruppe von U ist. Sind zweitens alle echten Normalteiler von S in U enthalten, so ist auch das Produkt S^* aller echten Normalteiler von S in U enthalten. Wäre S/S^* abelsch, so wäre die Untergruppe U/S^* dieser abelschen Untergruppe ein Normalteiler von S/S^*, so dass U ein Subnormalteiler von G wäre. Also ist S/S^* nicht abelsch. Aus (B) folgt die Existenz eines Subnormalteilers T von G mit $T = T^S$ und $T \not\subseteq S \not\subseteq T$. Dann wird T auch von der Untergruppe U von S normalisiert. Wäre T in U enthalten, so auch in S. Wäre U in T enthalten, so wäre U in dem Subnormalteiler $S \cap T$ von G enthalten, woraus nach Definition von S sogar $S \subseteq S \cap T \subseteq T$ folgen würde. Also ist T weder Ober- noch Untergruppe von U; und wir haben (A) aus (B) hergeleitet.

Wir sagen, dass die Untergruppe U von G *eine von oben erreichbare Untergruppe von* G ist, wenn es eine wohlgeordnet absteigende Kette von Untergruppen U_ν von G mit folgenden Eigenschaften gibt:

(a) $U_0 = G$, $U_\beta = U$;

(b) $U_{\nu+1}$ ist ein Normalteiler von U_ν für $0 \leq \nu < \beta$;

(c) $U_\lambda = \bigcap_{\nu<\lambda} U_\nu$ für Limeszahlen $\lambda \leq \beta$.

Ist die Ordinalzahl β insbesondere endlich, so haben wir es natürlich mit Subnormalteilern zu tun. Man sieht weiter leicht ein, dass die von oben erreichbaren Untergruppen mit den von Heineken eingeführten « Subnormalteilern im weiteren Sinne » identisch sind.

Ist T irgendeine Teilmenge der Gruppe G, so definieren wir *die kanonische, zu T gehörige, absteigende Kette $K_\sigma T$ von G* durch vollständige [transfinite] Induktion folgendermassen:

$K_0 T = G$;

$K_{\sigma+1} T =$ Durchschnitt aller T enthaltenden Normalteiler von $K_\sigma G$;

$K_\lambda T = \bigcap_{\sigma<\lambda} K_\sigma T$ für Limeszahlen λ.

Man überzeugt sich [wiederum durch vollständige (transfinite) Induktion] davon, dass die $K_\sigma T$ stets eine wohldefinierte, wohlgeordnet absteigende Kette von oben erreichbarer Untergruppen von G bilden, die sämtlich die Menge T enthalten. Das selbstverständlich existierende Schlussglied dieser Kette ist dann die kleinste T enthaltende, von oben erreichbare Untergruppe von G.

HILFSSATZ 1.2: (a) *Durchschnitte beliebiger Mengen von oben erreichbarer Untergruppen von G sind von oben erreichbare Untergruppen von G.*

(b) *Ist $U_0 = G$, ist $U_{\sigma+1}$ für $0 \leq \sigma < \beta$ eine von oben erreichbare Untergruppe von U_σ und $U_\lambda = \bigcap_{\sigma<\lambda} U_\sigma$ für Limeszahlen $\lambda \leq \beta$, so ist U_β eine von oben erreichbare Untergruppe von G.*

(c) *Dann und nur dann ist U eine von oben erreichbare Untergruppe von G, wenn $U = K_\sigma U$ für hinreichend grosses σ gilt.*

Die einfachen Beweise seien dem Leser überlassen.

LEMMA 1.3: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(a) *Jede von oben erreichbare Untergruppe von G ist ein Subnormalteiler von G.*

(b) *Durchschnitte beliebiger Mengen von Subnormalteilern von G sind Subnormalteiler von G.*

(c) *Ist $\mathfrak{M}$ eine durch Inklusion geordnete Menge von Subnormalteilern von G, so ist auch der Durchschnitt der Untergruppen aus $\mathfrak{M}$ ein Subnormalteiler von G.*

BEMERKUNGEN: **A.** Es sei daran erinnert, dass die Subnormalteiler einer jeden Gruppe G die folgende Eigenschaft haben:

Durchschnitte endlicher Mengen von Subnormalteilern von G sind Subnormalteiler von G.

Man vergleiche diese Eigenschaft mit der obigen Eigenschaft (b) und Hilfssatz 1.2, (a).

B. Bricht jede absteigende Kette von Subnormalteilern der Gruppe G nach endlich vielen Schritten ab [Minimalbedingung für Subnormalteiler], so gilt offenbar Lemma 1.3, (c), also auch die äquivalenten Bedingungen (a) und (b).

C. Sei $G = \{a, b\}$ mit $b^2 = 1$, $bab = a^{-1}$. Dann ist $\{a\}$ ein unendlicher zyklischer Normalteiler von G und $G / \{a\}$ ist zyklisch der Ordnung 2, so dass insbesondere $G'' = 1$ und G noethersch ist. Weiter ist $\{a^{2^{i+1}}, b\}$ ein Normalteiler von $\{a^{2^i}, b\}$ und $\{b\} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \{a^{2^i}, b\}$, so dass $\{b\}$ eine von oben erreichbare Untergruppe von G ist. Es ist sogar $\{b\}$ der Durchschnitt der Subnormalteiler $\{a^{2^i}, b\}$ von G. Andererseits sieht man leicht ein, dass $\{b\}$ kein Subnormalteiler von G ist. Damit haben wir die Existenz noetherscher, metabelscher Gruppen gezeigt, in denen die Bedingungen (a)-(c) des Lemma 1.3 nicht gelten.

BEWEIS: Da jeder Subormalteiler von G auch eine von oben erreichbare Untergruppe von G ist, so ist wegen Hilfssatz 1.2, (a) jeder Durchschnitt einer beliebigen Menge von Subnormalteilern von G eine von oben erreichbare Untergruppe von G. Dies zeigt, dass (b) aus (a) folgt; und es ist klar, dass (c) aus (b) folgt.

Gilt schliesslich (c), ist U eine von oben erreichbare Untergruppe von G, so gibt es Untergruppen U_σ von G mit

$$G = U_0,$$
$$U_{\sigma+1} \text{ ist ein Normalteiler von } U_\sigma,$$
$$U_\lambda = \bigcap_{\sigma<\lambda} U_\sigma \text{ für Limeszahlen } \lambda,$$
$$U = U_\beta.$$

Durch eine naheliegende vollständige [transfinite] Induktion zeigt man, dass jedes U_σ ein Subnormalteiler von G ist — die Bedingung (c) wird beim Limesschritt angewandt. Insbesondere ist also $U_\beta = U$ ein Subnormalteiler von G, so dass (a) aus (c) folgt.

Die Untergruppen A und B der Gruppe G mögen *vergleichbar* heissen, wenn $A \subseteq B$ oder $B \subseteq A$ ist, sonst *unvergleichbar*. Ist etwa die von oben erreichbare Untergruppe U von G mit allen Normalteilern von G vergleichbar, so ist auch der von U aufgespannte Normalteiler $\{U^G\}$ von G mit allen Normalteilern von G vergleichbar.

LEMMA 1.4: *Ist die Untergruppe U von G nicht mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar, so gibt es eine von U normalisierte, nicht mit U vergleichbare, von oben erreichbare Untergruppe von G.*

BEWEIS: Nach Voraussetzung gibt es eine Kette von Untergruppen V_ν von G für $0 \leq \nu \leq \beta$ mit folgenden Eigenschaften:

$$G = V_0, \quad V_{\nu+1} \text{ ist ein Normalteiter von } V_\nu,$$
$$V = \bigcap_{\nu<\lambda} V_\nu \text{ für Limeszahlen } \lambda,$$
$$U \text{ und } V_\beta \text{ sind nicht vergleichbar.}$$

Da insbesondere U nicht in V_β enthalten ist, so gibt es ein minimales μ derart, dass U nicht in V_μ enthalten ist. Da Durchschnitte von U enthaltenden Untergruppen ebenfalls U enthalten, ist $\mu = \tau + 1$

keine Limeszahl. Dann ist $U \subseteq V_\tau$ und der Normalteiler V_μ von V_τ wird von U normalisiert. Natürlich ist U nicht in V_μ enthalten. Wäre $V_\mu \subseteq U$, so wäre auch $V_\beta \subseteq U$ im Widerspruch zu unserer Unvergleichbarkeitsvoraussetzung. Also ist V_μ eine von U normalisierte, nicht mit U vergleichbare, von oben erreichbare Untergruppe von G.

SATZ 1.5: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

(2) *Ist die von oben erreichbare Untergruppe E von G mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar, ist E^* das Produkt aller echten Normalteiler von E, ist schliesslich U eine Untergruppe von G mit*

$$U = \mathfrak{n}_G U \subset G, \text{ und } E^* \subseteq U \subseteq E,$$

so gibt es eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Untergruppe von G.

(3) *Ist die normalisatorgleiche Untergruppe $U \neq G$ von G mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar, so gibt es eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Untergruppe von G.*

(4) *Ist $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$, so gibt es eine Untergruppe V von G mit $U \subset V$ derart, dass U nicht mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von V vergleichbar ist.*

(5) *Ist die von oben erreichbare Untergruppe E von G mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar, gibt es keine $\mathfrak{nr}$-Untergruppe X von G mit $E \subset X$, so gibt es einen Normalteiler Y von G mit $Y \subset E$ und $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe G/Y.*

(6) *G ist das Erzeugnis seiner von oben erreichbaren $\mathfrak{nr}$-Untergruppen.*

(7) *1 ist der Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe G/X.*

BEWEIS: Es ist klar, dass (2) aus (1) folgt (durch Abschwächung). Gilt (2), ist $\mathfrak{n}_G U = U \subset G$ und U mit allen von oben erreichbaren

Untergruppen von G vergleichbar, so sei E der Durchschnitt aller U enthaltenden, von oben erreichbaren Untergruppen von G. Dann ist $U \subseteq E$ und E ist wegen Hilfssatz 1.2, (a) eine von oben erreichbare Untergruppe von G. Ist X ein echter Normalteiler von E, so ist X eine von oben erreichbare Untergruppe von G mit $X \subset E$, so dass $X \subseteq U$ aus der Definition von E folgt. Das Produkt E^* aller echten Normalteiler von E ist also in U enthalten : $E^* \subseteq U \subseteq E$. Ist Y irgendeine von oben erreichbare Untergruppe von G mit $E \not\subseteq Y$, so ist $U \not\subseteq Y$ (nach Definition von E) und also $Y \subseteq U \subseteq E$: alle von oben erreichbaren Untergruppen von G sind mit E vergleichbar. Wir können also (2) anwenden, um die Existenz einer von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren Untergruppe von G zu erweisen. Damit haben wir (3) aus (2) hergeleitet. — Dass (1) aus (3) folgt, ergibt sich unmittelbar aus Lemma 1.4. Damit ist die Äquivalenz von (1)-(3) erwiesen.

Wir nehmen wieder an, dass G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist und betrachten eine Untergruppe U mit $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$. Dann gibt es eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Untergruppe V von G. Es ist $U \subset UV = W$ und V ist ein Normalteiler von W. Damit haben wir (4) aus (1) hergeleitet. Dass umgekehrt (1) aus (4) folgt, ergibt sich mühelos aus Lemma 1.4. Also sind die Bedingungen (1)-(4) äquivalent.

Ist G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so gilt (5); man kann ja $Y = 1$ wählen. Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (5) an und betrachten eine von oben erreichbare Untergruppe E von G, die mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar ist. Sei weiter E^* das Produkt aller echten Normalteiler von E und U eine Untergruppe mit

$$U = \mathfrak{n}_G U \subset G \quad \text{und} \quad E^* \subseteq U \subseteq E.$$

Gibt es erstens eine $\mathfrak{nr}$-Untergruppe X von G mit $E \subset X$, so ist auch $U \subset X$ und es gibt eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Untergruppe von X. Gibt es aber keine derartige Untergruppe X, so folgt aus (5) die Existenz eines Normalteilers Y von G mit $Y \subset E$ und $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe G/Y. Aus der Definition von E^* folgt dann $Y \subseteq E^*$. Es ist U/Y eine echte normalisatorgleiche

Untergruppe der $\mathfrak{nr}$-Gruppe G/Y. Folglich gibt es eine von U/Y normalisierte, mit U/Y nicht vergleichbare Untergruppe V/Y von G/Y. Dann ist aber V eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Untergruppe von G. Damit haben wir (2) aus (5) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(5) dargetan.

Es ist klar, dass (6) aus (1) folgt. Gilt umgekehrt (6), so betrachten wir eine mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbare Untergruppe U mit $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$. Gäbe es keine von oben erreichbare $\mathfrak{nr}$-Untergruppe X von G mit $U \subset X$, so würde $X \subseteq U$ für alle von oben erreichbaren $\mathfrak{nr}$-Untergruppen X von G gelten. Dann wäre aber $U = G$ wegen (6): ein Widerspruch. Also gibt es eine von oben erreichbare $\mathfrak{nr}$-Untergruppe X mit $U \subset X$. Hieraus folgt die Existenz einer von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren Untergruppe von X. Wir haben (3) aus (6) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(6) bewiesen.

Es ist klar, dass (7) aus (1) folgt. Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (7) an und betrachten eine Untergruppe U von G mit $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$, die mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar ist. Natürlich ist dann auch $U \neq 1$, so dass U wegen (7) nicht in allen Normalteilern mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe enthalten ist. Folglich existiert ein Normalteiler X mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe G/X und $U \not\subseteq X$. Aus der Vergleichbarkeit von U und X folgt $X \subset U$. Also ist U/X eine normalisatorgleiche echte Untergruppe der $\mathfrak{nr}$-Gruppe G/X, so dass eine von U/X normalisierte, mit U/X nicht vergleichbare Untergruppe V/X von G/X existiert. Dann wird V von U normalisiert und U und V sind nicht vergleichbar. Wir haben (3) aus (7) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(7) bewiesen.

Um Satz 1.5 auf eine besonders prägnante Form zu bringen, führen wir zwei charakteristische Untergruppen ein:

$\mathfrak{nr}^* G$ = Erzeugnis aller von oben erreichbaren $\mathfrak{nr}$-Untergruppen von G.

$\mathfrak{nr}_* G$ = Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe G/X.

Dann gilt der

ZUSATZ 1.6: (a) *$\mathfrak{nr}^* G$ ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

(b) *$G/\mathfrak{nr}_* G$ ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

(c) *Erweiterungen von* $\mathfrak{nr}$*-Gruppen durch* $\mathfrak{nr}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{nr}$*-Gruppen.*

(d) 1 *ist die einzige von oben erreichbare* $\mathfrak{nr}$*-Untergruppe von* $G/\mathfrak{nr}^* G$ *und* $\mathfrak{nr}^*[G/\mathfrak{nr}^* G] = 1$.

(e) 1 *ist das einzige epimorphe Bild von* $\mathfrak{nr}_* G$*, das eine* $\mathfrak{nr}$*-Gruppe ist; und* $\mathfrak{nr}_*[\mathfrak{nr}_* G] = \mathfrak{nr}_* G$.

(f) G *ist dann und nur dann eine* $\mathfrak{nr}$*-Gruppe, wenn* $\mathfrak{nr}_* G \subseteq \mathfrak{nr}^* G$ *ist.*

Beweis : (a) ergibt sich aus Satz 1.5, (6) und (b) aus Satz 1.5, (7). Die Eigenschaft (c) ergibt sich mühelos direkt oder aus Satz 1.5, (5).

Ist $S/\mathfrak{nr}^* G$ eine von oben erreichbare $\mathfrak{nr}$-Untergruppe von $G/\mathfrak{nr}^* G$, so folgt aus (a), (c), dass S eine von oben erreichbare $\mathfrak{nr}$-Gruppe und also $S/\mathfrak{nr}^* G = 1$ ist. Hieraus folgt (d).

Natürlich ist $\mathfrak{nr}_*[\mathfrak{nr}_* G]$ eine charakteristische Untergruppe von G. Wegen (b) ist $G/\mathfrak{nr}_*[\mathfrak{nr}_* G]$ eine Erweiterung der $\mathfrak{nr}$-Gruppe $\mathfrak{nr}_* G/\mathfrak{nr}_*[\mathfrak{nr}_* G]$ durch die $\mathfrak{nr}$-Gruppe $G/\mathfrak{nr}_* G$. Wegen (c) ist also $G/\mathfrak{nr}_*[\mathfrak{nr}_* G]$ eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Es ergibt sich $\mathfrak{nr}_* G = \mathfrak{nr}_*[\mathfrak{nr}_* G]$ und hieraus folgt (e).

Ist G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so ist $\mathfrak{nr}_* G = 1 \subseteq G = \mathfrak{nr}^* G$.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von

$$\mathfrak{nr}_* G \subseteq \mathfrak{nr}^* G$$

an. Sei $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$ und U mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar. Ist erstens $U \subset \mathfrak{nr}^* G$, so folgt aus (a) die Existenz einer von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren Untergruppe von $\mathfrak{nr}^* G$. Ist zweitens $U \not\subseteq \mathfrak{nr}^* G$, so folgt $\mathfrak{nr}_* G \subseteq \mathfrak{nr}^* G \subseteq U$ aus der Vergleichbarkeit von U. Es ist dann $U/\mathfrak{nr}_* G$ eine normalisatorgleiche echte Untergruppe der $\mathfrak{nr}$-Gruppe $G/\mathfrak{nr}_* G$ (wegen (b)). Es folgt die Existenz einer von $U/\mathfrak{nr}_* G$ normalisierten, mit $U/\mathfrak{nr}_* G$ nicht vergleichbaren Untergruppe $V/\mathfrak{nr}_* G$. Dann wird V von U normalisiert und U, V sind nicht vergleichbar. Damit haben wir Bedingung (3) des Satzes 1.5 verifiziert: G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe und (f) ist bewiesen.

Diskussion *von Satz* 1.5 *und Zusatz* 1.6 : In diesen Resultaten ist die schon erwähnte, auch direkt leicht einzusehende Aussage enthalten :

Jede direkt zerlegbare Gruppe ist eine $\mathfrak{nr}$*-Gruppe.*

Hieraus folgt insbesondere, dass die Eigenschaft $\mathfrak{nr}$ weder untergruppen- noch epimorphismenvererblich ist. Sie ist dagegen, wie aus Satz 1.5, (6), (7) und Zusatz 1.6, (c) hervorgeht, erweiterungsvererblich, residuell und « produktvererblich » : Produkte von $\mathfrak{nr}$-Normalteilern sind $\mathfrak{nr}$-Gruppen; vergleiche auch Lemma 5.10 unten.

LEMMA 1.7 : *Ist U eine normalisatorgleiche Untergruppe von G, ist die Untergruppe V von G minimal bezgl. der Eigenschaften, von U normalisiert zu werden und mit U unvergleichbar zu sein, so ist*

(a) *U eine maximale Untergruppe von UV,*

(b) $UV = \{U^V\}$,

(c) *UV in jeder U enthaltenden, von oben erreichbaren Untergruppe von G enthalten,*

(d) *U nicht von oben erreichbar.*

BEWEIS : Ist X eine Untergruppe mit $U \subset X \subseteq UV$, so folgt $X = U(X \cap V)$ aus dem Dedekindschen Modulsatz. Da V von U normalisiert wird und U in X enthalten ist, wird auch $X \cap V$ von U normalisiert. Da U nicht in V enthalten ist, ist U erst recht nicht in $X \cap V$ enthalten. Wäre $X \cap V$ in U enthalten, so wäre $X = U$ im Widerspruch zu unserer Wahl von X. Also sind U und $X \cap V$ unvergleichbar, so dass $X \cap V = V$ aus der Minimalität von V folgt. Hieraus ergibt sich $X = UV$, so dass U eine maximale Untergruppe von UV ist. (Man bemerke, dass wir von der Normalisatorgleichheit von U bisher keinen Gebrauch gemacht haben.)

Da U normalisatorgleich und V nicht in U enthalten ist, ist $U \subset \{U^V\} \subseteq UV$; und (b) folgt aus (a).

Ist K_ν eine Kette von Untergruppen von G mit $G = K_0$, $K_{\nu+1}$ ist ein Normalteiler von K_ν und $K_\lambda = \bigcap_{\nu<\lambda} K_\nu$ für Limeszahlen λ, ist weiter U in jedem K_ν enthalten, so ist sicher $UV \subseteq G = K_0$. Haben wir schon gezeigt, dass UV in allen K_ν mit $\nu < \sigma$ liegt, so liegt UV auch in K_σ, falls σ eine Limeszahl ist. Ist aber $\sigma = \tau + 1$ keine Limeszahl, so liegt UV in K_τ und U in dem Normalteiler K_σ von K_τ, der dann auch $\{U^V\} = UV$ enthält. Damit haben wir durch transfinite Induktion gezeigt, dass UV in allen K_ν liegt; und hieraus folgt (c). Schliesslich ist (d) eine triviale Folgerung aus (c) und (a).

LEMMA 1.8: *Die Untergruppe U von G ist dann und nur dann eine charakteristische Untergruppe von G, wenn*

(a) *U mit allen zu U automorphen Untergruppen von G vergleichbar ist und*

(b) *die Menge der zu U automorphen Untergruppen von G keine Teilmenge enthält, die bezgl. der Ordnung durch Inklusion den Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ hat.*

TERMINOLOGISCHE ERINNERUNG: Untergruppen von G heissen *automorph*, wenn sie durch Automorphismen von G ineinander übergeführt werden können.

BEMERKUNGEN: **A.** Bedenken wir, dass von oben erreichbare Untergruppen von G durch Automorphismen von G auf von oben erreichbare Untergruppen von G abgebildet werden, so folgt aus dem Lemma, dass die Untergruppe U von G sicher dann eine charakteristische Untergruppe von G ist, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

U ist von oben erreichbar.

U ist mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von G vergleichbar.

Die Menge der von oben erreichbaren Untergruppen von G enthält keine Teilmenge, die bezgl. der Ordnung durch Inklusion den Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ hat.

B. Einfachste Beispiele zeigen die Unentbehrlichkeit einer jeden der beiden Bedingungen (a) und (b).

BEWEIS: Ist U eine charakteristische Untergruppe von G, so besteht die Menge der zu U automorphen Untergruppen von G aus U allein, woraus die Notwendigkeit von (a) und (b) folgt. Gelten umgekehrt die Bedingungen (a) und (b), ohne dass U eine charakteristische Untergruppe von G ist, so gibt es einen $U \neq U^\sigma$ erfüllenden Automorphismus σ von G. Wegen (a) ist dann $U \subset U^\sigma$ oder $U^\sigma \subset U$; und hieraus folgt sofort, dass die Menge der Untergruppen U^{σ^i} bezgl. der Inklusion den Ordnungstypus $\omega^* + \omega$ hat. Dies widerspricht aber (b).

Lemma 1.9: *Ist G^* das Produkt aller echten Normalteiler der* $\mathfrak{nr}$-*Gruppe G, so ist G/G^* dann und nur dann zyklisch von Primzahlordnung, wenn es eine G^* enthaltende maximale Untergruppe von G gibt.*

Beweis: Ist G/G^* zyklisch von Primzahlordnung, so ist G^* eine maximale Untergruppe von G. Gibt es umgekehrt eine maximale Untergruppe M von G, die G^* enthält, so ist sicherlich $G \neq G^*$. Wäre $M \neq G^*$, so wäre M kein Normalteiler von G, als maximale Untergruppe also normalisatorgleich. Es folgt die Existenz einer von M normalisierten, mit M nicht vergleichbaren Untergruppe W von G. Aus der Maximalität von M und $W \not\subseteq M$ folgt $G = \{M, W\}$. Da W von M normalisiert wird, ist W ein natürlich von G verschiedener Normalteiler von G. Folglich ist $W \subseteq G^* \subseteq M$, ein Widerspruch. Also ist $G^* = M$ eine maximale Untergruppe von G, so dass G/G^* zyklisch von Primzahlordnung ist.

Lemma 1.10: *Ist $S \neq G$ eine von oben erreichbare Untergruppe von G, ist M eine maximale Untergruppe von S, die erstens das Produkt S^* aller echten Normalteiler von S enthält und zweitens gleich ihrem Normalisator in G ist, so gibt es keine bezgl. der Eigenschaften, von M normalisiert zu werden und mit M nicht vergleichbar zu sein, minimale Untergruppe von G.*

Beweis: Wäre nämlich die Untergruppe W von G minimal bezgl. der Eigenschaften, von M normalisiert zu werden und mit M nicht vergleichbar zu sein, so folgte $MW \subseteq S$ aus Lemma 1.7, (c). Wegen $M \subset MW$ und der Maximalität von M wird $MW = S$, so dass W sogar ein natürlich echter Normalteiler von S ist. Es folgt $W \subseteq M$, ein Widerspruch.

Lemma 1.11: *Die Untergruppe U der* $\mathfrak{nr}$-*Gruppe G habe die folgenden Eigenschaften:*

(a) *U ist maximal unter den von G verschiedenen, normalisatorgleichen Untergruppen von G.*

(b) *Die Maximalbedingung wird von den Obergruppen von U erfüllt.*

Dann gilt:

(1) *Jede echte Obergruppe von U ist ein Subnormalteiler von G.*

(2) *Es gibt von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Subnormalteiler von G.*

(3) *Der Durchschnitt der U enthaltenden Subnormalteiler von G ist dann und nur dann kein Subnormalteiler von G, wenn U eine von oben erreichbare Untergruppe von G ist.*

Beweis: Ist V eine echte Obergruppe von U, so bilden wir die Reihe der iterierten Normalisatoren von V, definiert durch

$$V(0) = V, \quad V(i+1) = \text{Normalisator von } V(i) \text{ in } G.$$

Diese aufsteigende Kette von Untergruppen bricht nach endlich vielen Schritten ab, da wegen (b) der Obergruppensatz von den Obergruppen von U erfüllt wird. Also ist $V(n)$ für geeignetes n normalisatorgleich. Aus der Maximalität von U und $U \subset V \subseteq V(n)$ ergibt sich $V(n) = G$, so dass V ein Subnormalteiler von G ist. Damit ist (1) bewiesen.

Sei D der Durchschnitt aller U enthaltenden Subnormalteiler von G. Aus (1) folgt:

(3*) Dann und nur dann ist $U \subset D$, wenn D ein Subnormalteiler von G ist.

Ist D kein Subnormalteiler von G, so ist $U = D$ Durchschnitt von Subnormalteilern, also Durchschnitt von oben erreichbarer Untergruppen, also von oben erreichbar. Ist D ein Subnormalteiler von G, so ist U wegen (1) eine maximale Untergruppe von D. Wäre U eine von oben erreichbare Untergruppe von G, so auch von D. Wegen der Maximalität wäre dann U ein Normalteiler von D, woraus $U = D$ wegen der Normalisatorgleichheit von U folgen würde. Dieser Widerspruch zeigt, dass U keine von oben erreichbare Untergruppe von G ist. Damit ist (3) bewiesen.

Da $U \neq G$ und normalisatorgleich und G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist, gibt es von U normalisierte, mit U unvergleichbare Untergruppen von G. Ist V eine derartige Untergruppe von G, so ist UV eine echte Obergruppe von U und wegen (1) ein Subnormalteiler von G. Weiter ist V ein Normalteiler von UV und also ein Subnormalteiler von G. Damit ist (2) [und mehr] bewiesen.

Bemerkung: Die Voraussetzung, dass G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist, wird nur beim Beweis von (2) benutzt.

§ 2. Die $\mathfrak{onr}$-Gruppen.

Diese Gruppenklasse wird durch folgende Eigenschaft definiert:

$\mathfrak{onr}$: *Jede von oben erreichbare Untergruppe ist eine* $\mathfrak{nr}$-*Gruppe.*

Dies ist selbstverständlich eine Unterklasse der Klasse der $\mathfrak{nr}$-Gruppen; und es ist sogar eine echte Unterklasse. Ist nämlich weder A noch B eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so ist ihr direktes Produkt $G = A \otimes B$ zwar eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, aber gewiss keine $\mathfrak{onr}$-Gruppe.

Die Eigenschaft $\mathfrak{onr}$ vererbt sich natürlich auf von oben erreichbare Untergruppen. Ob noch weitere Vererbungseigenschaften und Kriterien der in Satz. 1.5 und Zusatz 1.6 behandelten Art gelten, haben wir nicht entscheiden können.

Satz 2.1: *Die noethersche Gruppe G ist dann und nur dann eine* $\mathfrak{onr}$-*Gruppe, wenn gilt:*

(+) *Ist E eine von oben erreichbare Untergruppe von G und E^* das Produkt aller echten Normalteiler von E, so ist E/E^* abelsch.*

Bemerkungen: **A.** Eine Gruppe heisst bekanntlich *noethersch*, wenn ihre Untergruppen sämtlich endlich erzeugbar sind.

B. Die im Satz 2.1 gemachte Voraussetzung, dass G eine noethersche Gruppe sei, ist stärker als benötigt. Wir werden nur die folgenden beiden Eigenschaften benötigen, die sich aus der Maximalbedingung herleiten lassen.

B.1. Ist E eine von oben erreichbare Untergruppe von G, ist das Produkt E^* aller echten Normalteiler von E von verschieden, so gibt es eine E^* enthaltende, maximale Untergruppe von E — oder gleichwertig: so gibt es eine maximale Untergruppe von E/E^*.

B.2. Ist H eine von oben erreichbare Untergruppe von G, ist die von oben erreichbare Untergruppe A von H mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von H vergleichbar, so ist A eine charakteristische Untergruppe von H — oder schwächer, aber ausreichend: so ist A entweder gleich H oder $\mathfrak{n}_H A \neq A$.

Es ist klar, dass Bedingung **B**.1 eine schwache Folge aus der Maximalbedingung ist. Bedingung **B**.1 wird beim Nachweis der Notwendigkeit von (+) benutzt werden.

Es ergibt sich aus Lemma 1.8, Bemerkung **A**, dass Bedingung **B**.2 aus der Maximalbedingung folgt. Bedingung **B**.2 wird beim Nachweis des Hinreichens von (+) benutzt werden.

C. Ist U^* das Produkt aller echten Normalteiler der Gruppe U, so ist entweder $U/U^* = 1$ oder es ist U/U^* eine einfache Gruppe. Einfache abelsche Gruppen sind aber zyklisch von Primzahlordnung.

Beweis: Ist E eine von oben erreichbare Untergruppe der $\mathfrak{onr}$-Gruppe G, so ist E eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Ist das Produkt E^* aller echten Normalteiler von E von E verschieden, so gibt es eine E^* enthaltende maximale Untergruppe von E. Anwendung von Lemma 1.9. zeigt, dass E/E^* zyklisch von Primzahlordnung ist. Hieraus ergibt sich die Notwendigkeit unserer Bedingung.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (+) an und betrachten eine von oben erreichbare Untergruppe H von G. Ist die von oben erreichbare Untergruppe V von H mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von H vergleichbar, so ergibt sich aus der Gültigkeit des Obergruppensatzes in der noetherschen Gruppe G die Anwendbarkeit von Lemma 1.8, so dass V eine charakteristische Untergruppe von H ist. Das Produkt V^* aller echten Normalteiler von V ist dann als charakteristische Untergruppe von V auch eine charakteristische Untergruppe von H. Anwendung der Bedingung (+) zeigt die Kommutativität von V/V^*. Ist dann U eine Untergruppe mit $U = \mathfrak{n}_H U \subset H$, so kann nicht $V^* \subseteq U \subseteq V$ gelten, da V und V^* charakteristische Untergruppen von H sind. Damit haben wir dargetan, dass Bedingung (2) des Satzes 1.5 von H erfüllt wird: H ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so dass G eine $\mathfrak{onr}$-Gruppe ist.

Satz 2.2: *Die Gruppe G genüge der Bedingung:*

(0) *Ist U eine von oben erreichbare Untergruppe der von oben erreichbaren Untergruppe V von G, so ist $U = V$ oder $U \subset \mathfrak{n}_V U$.*

Dann sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G äquivalent:

(I) *Ist U^* das Produkt aller echten Normalteiler der von oben erreichbaren Untergruppe U von G, so ist U/U^* abelsch.*

(II) *Ist U^* das Produkt aller echten Normalteiler der von oben erreichbaren Untergruppe U von G, so genügt U/U^* der Normalisatorbedingung.*

(III) *Ist V eine von oben erreichbare Untergruppe von G und $U = \mathfrak{n}_V U \subset V$, so gibt es eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare, von oben erreichbare Untergruppe von V.*

(IV) (a) *G ist eine $\mathfrak{onr}$-Gruppe.*
(b) *Ist das Produkt U^* aller echten Normalteiler der von oben erreichbaren Untergruppe U von G von U verschieden, so existiert eine maximale Untergruppe von U/U^*.*

Terminologische Erinnerung: Die Gruppe X genügt der *Normalisatorbedingung*, wenn jede echte Untergruppe von X von ihrem Normalisator verschieden ist.

Bemerkungen: **A.** Aus einem Satz von Plotkin folgt, dass Gruppen mit Normalisatorbedingung stets lokal nilpotent sind; vergl. Kurosh [II; p. 224, Theorem]. Lokal nilpotente Gruppen sind aber nur dann einfach, wenn sie zyklisch von Primzahlordnung sind; vergl. Kurosh [II; p. 222 unten]. Hieraus folgt sofort die Äquivalenz der Bedingungen (I) und (II).

B. Die Bedingung (0) ist sicher dann erfüllt, wenn jede von oben erreichbare Untergruppe von G ein Subnormalteiler von G ist. Diese Bedingung haben wir in Lemma 1.3 diskutiert.

Insbesondere haben wir in Bemerkung **C** zu Lemma 1.3 ein Beispiel einer metabelschen, noetherschen Gruppe angegeben, das nicht der Bedingung (0) genügt. Aus Satz 2.1 folgt aber sofort, dass noethersche, metabelsche Gruppen den Bedingungen (I) - (IV) des Satzes 2.2 genügen.

C. Bedingung (IV.b) ist sicherlich dann erfüllt, wenn die Gruppe G noethersch ist.

D. Bedingung (0) wird nur bei der Herleitung von (III) aus (II) benutzt.

E. Bedingung (III) ist prima facie schärfer als die Bedingung $\mathfrak{onr}$. Für welche Gruppenklassen die Bedingungen (III) und $\mathfrak{onr}$ zusammenfallen bezw. auseinanderklaffen, haben wir nicht entscheiden können. Sie fallen jedenfalls in der Klasse all der Gruppen zusammen, die den Bedingungen (0) und (IV.b) genügen; und diese Klasse umfasst die noetherschen Gruppen mit Minimalbedingung für Subnormalteiler.

BEWEIS: Es ist klar, dass (II) aus (I) folgt. Wir nehmen die Gültigkeit von (II) an und betrachten eine von oben erreichbare Untergruppe V von G und eine Untergruppe U mit $U = \mathfrak{n}_V U \subset V$. Angenommen, U ist mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von V vergleichbar. Ist dann D der Durchschnitt aller U enthaltenden, von oben erreichbaren Untergruppen von V, so ist D wegen Hilfssatz 1.2, (a) eine von oben erreichbare Untergruppe von V; und es folgt $U \subset D$ aus (0) und der Normalisatorgleichheit von U. Wir bilden das Produkt D^* aller echten Normalteiler von D. Da jeder echte Normalteiler von D eine von oben erreichbare Untergruppe von V ist, die U nicht enthalten kann, und da U mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von V vergleichbar ist, so sind die echten Normalteiler von D in U enthalten; und es folgt

$$D^* \subseteq U = \mathfrak{n}_V U \subset D.$$

Wegen (II) genügt aber D/D^* der Normalisatorbedingung, ein Widerspruch. Also ist U nicht mit allen von oben erreichbaren Untergruppen von V vergleichbar. Anwendung von Lemma 1.4 zeigt die Existenz einer von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren, von oben erreichbaren Untergruppe von V; und damit haben wir (III) aus (II) abgeleitet.

Wir nehmen die Gültigkeit von (III) an. Dann ist G selbstverständlich eine $\mathfrak{onr}$-Gruppe. Sei weiter U eine von oben erreichbare Untergruppe von G und U^* das Produkt aller echten Normalteiler von U. Ist $U^* \subset U$, so ist U/U^* einfach. Genügte U/U^* nicht der Normalisatorbedingung, so gäbe es eine Untergruppe W mit $U^* \subset W = \mathfrak{n}_U W \subset U$; und es folgte aus (III) die Existenz einer von oben erreichbaren Untergruppe V von U, die von W normalisiert wird, mit W aber nicht vergleichbar ist. Insbesondere ist $V \subset U$; und daraus folgt $V \subseteq U^* \subset W$ im Widerspruch zur Unvergleichbarkeit mit W. Also wird die Normalisatorbedingung von der einfachen Gruppe U/U^* erfüllt; und hieraus ergibt sich, wie in Bemerkung

A ausgeführt, dass U/U^* zyklisch von Primzahlordnung und also 1 eine maximale Untergruppe von U/U^* ist. Damit haben wir auch (IV.b) aus (III) abgeleitet.

Gilt (IV), ist U eine von oben erreichbare Untergruppe von G und U^* das Produkt aller echten Normalteiler von U, so ist entweder $U = U^*$ oder es folgt aus (IV.b) die Existenz einer maximalen Untergruppe von U/U^*, die wiederum die Existenz einer maximalen Untergruppe V von U mit $U^* \subseteq V \subset U$ nach sich zieht. Da G wegen (IV.a) eine $\mathfrak{onr}$ Gruppe ist, ist die von oben erreichbare Untergruppe U von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Anwendung von Lemma 1.9 zeigt, dass U/U^* zyklisch von Primzahlordnung ist. Damit haben wir (I) aus (IV) hergeleitet, die Äquivalenz von (I)-(IV) bewiesen.

Hauptsatz 2.3: *Die Gruppe G ist dann und nur dann artinsch und auflösbar, wenn sie den folgenden drei Bedingungen genügt:*

(a) *Jeder Subnormalteiler von G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

(b) *Die Minimalbedingung wird von den Subnormalteilern von G erfüllt.*

(c) *Ist jeder echte Normalteiler des Subnormalteilers S von G im Zentrum $\mathfrak{z}S$ von S enthalten, ist $\mathfrak{z}S$ artinsch und $S/\mathfrak{z}S$ unendlich [und einfach], so besitzt S eine maximale Untergruppe.*

Terminologische Erinnerung: Eine Gruppe ist *artinsch*, wenn die Minimalbedingung von ihren Untergruppen erfüllt wird [Untergruppensatz]; und G ist *auflösbar*, wenn fast alle Ableitungen $G^{(i)} = 1$ sind.

Bemerkung: Aus Lemma 1.3 und der zugehörigen Bemerkung **B** ergibt sich, dass unsere Bedingung (b) die Identität der Begriffe « Subnormalteiler » und « von oben erreichbare Untergruppe » nach sich zieht. Aus (a) und (b) folgt also, dass G eine $\mathfrak{onr}$-Gruppe ist. Ebenso erweisen sich die Minimalbedingung für Subnormalteiler und die Minimalbedingung für von oben erreichbare Untergruppen als äquivalente Eigenschaften.

Beweis: Ist zunächst G eine artinsche auflösbare Gruppe, so wird die Minimalbedingung von jeder Menge von Untergruppen von

G erfüllt, woraus die Gültigkeit von (b) folgt. Weiter ist jeder Faktor von G artinsch und auflösbar. Insbesondere sind also alle einfachen Faktoren von G auflösbar, folglich abelsch, folglich zyklisch von Primzahlordnung. Hieraus folgt insbesondere (c) und aus der Zyklizität der einfachen Faktoren von G ergibt sich, dass Bedingung (2) des Satzes 1.5 von allen Faktoren von G erfüllt wird, dass also jeder Faktor von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist, woraus die Gültigkeit von (a) folgt.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) an. Ist S ein auflösbarer Subnormalteiler von G, so ist jede zwischen $S^{(i+1)}$ und $S^{(i)}$ gelegene Untergruppe von S ein Subnormalteiler von S und also von G. Aus (b) folgt die Minimalbedingung für die zwischen $S^{(i+1)}$ und $S^{(i)}$ gelegenen Untergruppen, so dass $S^{(i)}/S^{(i+1)}$ eine artinsche abelsche Gruppe ist. Da Erweiterungen artinscher Gruppen durch artinsche Gruppen stets artinsch sind, und da $S^{(k)}=1$ für wenigstens ein k gilt, ist S artinsch. Also gilt:

(1) Auflösbare Subnormalteiler von G sind artinsch.

Angenommen, G wäre nicht artinsch und auflösbar. Es folgt aus (1), dass G nicht auflösbar ist. Also gibt es Subnormalteiler von G, die nicht auflösbar sind; und wegen (b) gibt es unter diesen einen minimalen H. Wir notieren:

(2) H ist nicht auflösbar.

(3) Jeder von H verschiedene Subnormalteiler von H ist auflösbar.

Wir bilden das Produkt H^* aller echten Normalteiler von H. Natürlich ist H^* eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe von H. Aus (3) folgt, dass H^* ein Produkt auflösbarer Normalteiler von H und H^* ist. Insbesondere ist H^* also hyperabelsch [= von 1 verschiedene epimorphe Bilder von H^* besitzen von 1 verschiedene abelsche Normalteiler]. Abelsche Subnormalteiler von H^* sind wegen (b) artinsch, da alle Untergruppen abelscher Subnormalteiler von H^* abelsche Subnormalteiler von G sind. Aus (1) folgt, dass H^* als Produkt auflösbarer Normalteiler ein Produkt artinscher Normalteiler und also eine Torsionsgruppe ist. Eine hyperabelsche Torsionsgruppe, deren abelsche Subnormalteiler artinsch sind, ist artinsch und auflösbar; vergl. Baer [3; p. 345, Satz 6.1]. Also ist H^* artinsch und auflösbar. Wegen (2) ist $H \neq H^*$; und damit haben wir folgendes gezeigt:

(4) Das Produkt H^* aller echten Normalteiler von H ist artinsch und auflösbar und H/H^* ist einfach [und $\neq 1$].

Angenommen, es gäbe eine maximale Untergruppe von H/H^*. Dies ist äquivalent mit der Existenz einer maximalen Untergruppe U von H, die H^* enthält. Wäre U keine normalisatorgleiche Untergruppe von H, so wäre U wegen der Maximalität ein Normalteiler von H. Es folgte $U \subseteq H^*$, so dass $H^* = U$ eine maximale Untergruppe von H und also H/H^* zyklisch von Primzahlordnung wäre. Mit H^* — siehe (4) — wäre dann H im Widerspruch zu (2) auflösbar. Also ist U eine normalisatorgleiche Untergruppe von H. Wegen (a) ist der Subnormalteiler H von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Es folgt die Existenz einer von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren Untergruppe V von H. Aus der Maximalität von U ergibt sich $H = UV$, so dass V ein echter Normalteiler von H ist. Es folgt $V \subseteq H^*$ und hieraus ergibt sich $H = UV = UH^* = U \neq H$, ein Widerspruch. Damit haben wir gezeigt:

(5) H/H^* ist frei von maximalen Untergruppen.

Da von 1 verschiedene endliche Gruppen stets maximale Untergruppen besitzen, so folgt aus [(4) und] (5) insbesondere:

(5*) H/H^* ist unendlich.

Da H^* wegen (4) artinsch und auflösbar ist, so besitzt H^* eine abelsche charakteristische Untergruppe A mit endlichem H^*/A; vergl. etwa Baer [2; p. 7/8, Satz 2.1 oder p. 18, Lemma 3.3]. Ist n eine positive ganze Zahl, so ist die Menge $A(n)$ aller Elemente a aus A mit $a^n = 1$ eine charakteristische Untergruppe von A. Da A mit H^* artinsch ist, ist A das Produkt der $A(n)$ und jedes $A(n)$ ist endlich; vergl. Fuchs [p. 68, 19]. Als charakteristische Untergruppe der charakteristischen Untergruppe A der charakteristischen Untergruppe H^* von H ist jedes $A(n)$ eine charakteristische Untergruppe von H. Die von H in $A(n)$ induzierte Automorphismengruppe ist mit $A(n)$ endlich. Sie ist im wesentlichen mit $H/\mathfrak{c}_H A(n)$ identisch. Also folgt aus (5*), dass die charakteristische Untergruppe $\mathfrak{c}_H A(n)$ von H nicht in H^* enthalten sein kann, so dass $H = \mathfrak{c}_H A(n)$ aus der Definition von H^* folgt. Mit anderen Worten: jedes $A(n)$ wird von H zentralisiert und also auch das Produkt A aller $A(n)$. Folglich gilt:

(6) $A \subseteq \mathfrak{z}H$.

Die von H/A in der endlichen Gruppe H^*/A induzierte Automorphismengruppe ist endlich. Der Zentralisator von H^*/A in H/A kann also wegen (5*) nicht in H^*/A enthalten sein. Es folgt, dass H^*/A von H/A zentralisiert wird. Also gilt:

(7) $H^*/A \subseteq \mathfrak{Z}(H/A)$.

Die Elemente aus H induzieren wegen (6) und (7) Automorphismen in H^*, die in A und H^*/A den 1-Automorphismus induzieren, also zur Stabilitätsgruppe des Normalteilers A von H^* gehören. Diese ist aber abelsch; vergl. Specht [p. 88, Satz 19]. Also induziert H in H^* eine abelsche Automorphismengruppe. Dies ist gleichwertig damit, dass H^* von H' zentralisiert wird. Wäre $H' \neq H$, so wäre $H' \subseteq H^*$ und H wäre mit H^* im Widerspruch zu (2) auflösbar. Also ist $H = H'$ und wir haben gezeigt:

(8) $H^* = \mathfrak{Z}H$.

Ist J eine maximale Untergruppe von H, so folgt $H^* \not\subseteq J$ aus (5). Also ist

$$H = JH^* = J\,\mathfrak{Z}H$$

wegen (8), so dass J sogar ein Normalteiler von H ist. Wegen $J \neq H$ wird $J \subseteq H^* \subset H$ und aus der Maximalität von J folgt der Widerspruch $J = H^* = JH^* = H \neq J$. Also gilt:

(9) H besitzt keine maximalen Untergruppen.

Nun steht Bedingung (c) offenbar in einem Widerspruch zu (4), (8) und (9). Aus diesem Widerspruch folgt, dass G artinsch und auflösbar ist.

Bemerkung 2.4: Es ist eine offene Frage, ob Bedingung (c) entbehrlich ist. Sie wäre sicherlich unentbehrlich, wenn es einfache Gruppen ohne maximale Untergruppen gäbe, deren echte Untergruppen sämtlich auflösbar sind; und es dürfte schwer zu entscheiden sein, ob es derartige Gruppen gibt.

Bemerkung 2.5: **A.** Aus dem Beweis der Notwendigkeit unserer Bedingungen (a), (b), (c) kann man entnehmen, dass G dann und nur dann artinsch und auflösbar ist, wenn die Minimalbedingung von den Subnormalteilern von G erfüllt wird und

einfache epimorphe Bilder von Subnormalteilern von G zyklisch von Primzahlordnung sind.

Hieraus folgt insbesondere, dass der in (c) auftretende Subnormalteiler S notwendig abelsch ist, also nicht existieren kann.

B. Man kann zeigen, dass jede endliche einfache Gruppe den Bedingungen (b) und (c) des Hauptsatzes 2.3 genügt, und dass freie Gruppen den Bedingungen (a) und (c) genügen. Also sind die Bedingungen (a) und (b) unentbehrlich. Schwieriger dürfte es zu entscheiden sein, ob (c) entbehrlich ist oder nicht; vergl. Bemerkung 2.4.

SATZ 2.6: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(I) *G ist endlich und auflösbar.*

(II)
- (A) *Jeder Subnormalteiler von G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*
- (B) *Die Minimalbedingung wird von den Subnormalteilern von G erfüllt.*
- (C) *G ist noethersch.*

(III)
- (A) *Jedes einfache epimorphe Bild eines Normalteilers von G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*
- (B) *Unter den Normalteilern von G mit endlicher Faktorgruppe gibt es einen minimalen.*
- (C) *G ist endlich erzeugbar.*

(IV)
- (A) *Ist E eine endliche Untergruppe von G mit $E = \mathfrak{n}_G E \subset G$, so gibt es eine minimale von E normalisierte, mit E nicht vergleichbare Untergruppe von G.*
- (B) *Einfache Faktoren von G sind $\mathfrak{nr}$-Gruppen.*
- (C) *Abelsche Untergruppen von G sind endlich.*

BEWEIS: Ist zunächst G endlich und auflösbar, so gilt dasselbe von jedem Faktor von G; und es folgt etwa aus Hauptsatz 2.3, dass alle Faktoren von G die Eigenschaft $\mathfrak{nr}$ haben. Damit haben wir (II.A), (III.A) und (IV.A, B) aus (I) hergeleitet; und die restlichen Bedingungen folgen trivial aus der Endlichkeit von G, so dass (II)-(IV) aus (I) folgen.

Genügt G der Bedingung (II), so genügt G auch den Bedingungen (a)-(c) des Hauptsatzes 2.3, so dass G artinsch und auflösbar ist. Nun ist eine abelsche Gruppe dann und nur dann endlich, wenn sie artinsch und noethersch ist; vergl. Fuchs [p. 65, Theorem 19.2]. Also sind alle abelschen Faktoren von G endlich und hieraus folgt die Endlichkeit der auflösbaren Gruppe G.

Genügt G der Bedingung (III), so gibt es unter den Normalteilern von G mit endlicher Faktorgruppe einen minimalen M. Ist X ein Normalteiler von G mit endlichem G/X, so ist auch $G/(M \cap X)$ endlich; und aus der Minimalität von M folgt $M \subseteq X$. Damit haben wir gezeigt:

(1) Ist D der Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit endlichem G/X, so ist G/D endlich.

Aus der Endlichkeit von G/D und der endlichen Erzeugbarkeit von G folgt die endliche Erzeugbarkeit von D; vergl. Specht [p. 153, Satz 4]. Wäre $D \neq 1$, so gäbe es insbesondere einen maximalen Normalteiler K von D, also auch ein einfaches epimorphes Bild $E = D/K$ von D. Mit D ist auch E endlich erzeugbar, so dass E maximale Untergruppen besitzt. Wegen (III.A) ist E eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Einfache $\mathfrak{nr}$-Gruppen mit maximalen Untergruppen sind wegen Lemma 1.9 zyklisch von Primzahlordnung. Insbesondere ist also D/K endlich und aus der Endlichkeit von G/D folgt die von $[G:K]$. Aus dem Satz von Poincaré ergibt sich nun die Existenz eines Normalteilers W von G mit $W \subseteq K$ und endlichem G/W. Aus (1) folgt nun der Widerspruch:

$$W \subseteq K \subset D \subseteq W.$$

Also ist $D = 1$ und aus (1) folgt:

(2) G ist endlich.

Natürlich gibt es unter den Normalteilern von G mit auflösbarer Faktorgruppe einen minimalen A. Wäre $A \neq 1$, so gäbe es einen maximalen Normalteiler B von A. Wegen (III.A) ist das einfache epimorphe Bild A/B des Normalteilers A von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, die als endliche Gruppe maximale Untergruppen besitzt, wegen

Lemma 1.9 also zyklisch von Primzahlordnung ist. Es folgt $A' \subseteq B \subset A$. Dann ist aber A' mit A ein Normalteiler von G und G/A' mit G/A auflösbar. Dies widerspricht der Minimalität von A. Es folgt $A = 1$ und die Auflösbarkeit von G.

Genügt G der Bedingung (IV), so betrachten wir zunächst eine endliche Untergruppe U von G. Diese genügt wegen (IV.B) gewiss der Bedingung (III) und ist also — wegen der bereits bewiesenen Äquivalenz von (I) und (III) — auflösbar. Damit haben wir gezeigt:

(3) Endliche Untergruppen von G sind auflösbar.

Sei weiter U eine lokal endliche Untergruppe von G. Wegen (3) ist dann jede endlich erzeugbare Untergruppe von G endlich und auflösbar; und wegen (IV.C) ist jede abelsche Untergruppe von G endlich. Wir können also einen schönen Satz von Tschernikow [p. 128, Theorema 3] anwenden, aus dem die Endlichkeit und dann auch die Auflösbarkeit von U folgt. Damit haben wir gezeigt:

(4) Lokal endliche Untergruppen von G sind endlich und auflösbar.

Sei schliesslich A eine auflösbare Untergruppe von G. Wegen (IV.C) ist jede abelsche Untergruppe von A endlich. Also ist Bedingung (4) von Baer [3; p. 359/360, Hauptsatz 8.15, **A**] erfüllt: A ist artinsch. Anwendung von Baer [2; p. 18, Lemma 3.3] zeigt die Endlichkeit der artinschen, auflösbaren Gruppe A. Damit haben wir gezeigt:

(5) Auflösbare Untergruppen von G sind endlich.

Aus dem Maximumprinzip der Mengenlehre folgt die Existenz einer maximalen, lokal endlichen Untergruppe M. Diese ist wegen (4) endlich und auflösbar. Ist A eine auflösbare Untergruppe von G mit $M \subseteq A$, so ist A wegen (5) endlich und $M = A$ folgt aus der Maximalität von M. Also ist M auch eine maximale auflösbare Untergruppe von G. Wird M von dem Element g aus G normalisiert, so ist $\{M, g\}$ mit M auflösbar, so dass aus der Maximalität von M die Zugehörigkeit von g zu M folgt:

$$M = \mathfrak{n}_G M.$$

Wäre nun $M \subset G$, so könnten wir Bedingung (IV.A) auf M anwenden. Unter den von M normalisierten, mit M nicht vergleichbaren Untergruppen von G gibt es also eine minimale W. Da W nicht in M enthalten ist, gibt es in M nicht enthaltene Elemente in W. Ist w irgendein in M nicht enthaltenes Element aus W, so ist w^M wegen der Endlichkeit von M endlich. Weiter ist $\{w^M\}$ eine mit M nicht vergleichbare, von M normalisierte Untergruppe von $W = W^M$. Aus der Minimalität von W folgt: $W = \{w^M\}$ ist endlich erzeugbar. Endlich erzeugbare Gruppen besitzen maximale Normalteiler. Also gibt es ein einfaches epimorphes Bild E von W, das mit W endlich erzeugbar ist und also eine maximale Untergruppe besitzt. Als einfacher Faktor von G ist E wegen (IV.B) eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Einfache $\mathfrak{nr}$-Gruppen mit maximalen Untergruppen sind wegen Hilfssatz 1.9 zyklisch von Primzahlordnung. Also besitzt W ein epimorphes Bild, das zyklisch von Primzahlordnung ist; und hieraus folgt $W' \subset W$. Da W' eine charakteristische Untergruppe von W ist, wird W' ebenso wie W von M normalisiert. Aus der Minimalität von W folgt $W' \subseteq M$. Mit M ist W' und also auch W auflösbar; und mit M und W ist dann auch MW auflösbar. Da M und W unvergleichbar sind, ist $M \subset MW$; und dies widerspricht der Maximalität der auflösbaren Gruppe M. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass $G = M$ endlich und auflösbar ist.

Bemerkung 2.7: **A.** (III.B) folgt etwa aus der Minimalbedingung für Normalteiler. Also folgt (III.B) aus (II.B) und natürlich folgt (III.C) aus (II.C). Das Verhältnis der Bedingungen (II.A) und (III.A) zueinander ist nicht so klar.

B. Bedingung (IV.A) ist eine Kombination von Minimalbedingung mit einer abgeschwächten Form der Bedingung $\mathfrak{nr}$. Bedingung (III.A) ist eine Folge von (IV.B).

Lemma 2.8: *Jeder Subnormalteiler von G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, wenn*

(+) *die Minimalbedingung von den Subnormalteilern von G erfüllt wird und*

(++) *jedes einfache epimorphe Bild eines Subnormalteilers von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist.*

Beweis: Wäre dies falsch, so gäbe es wegen (+) unter den Subnormalteilern von G, die keine $\mathfrak{nr}$-Gruppen sind, einen minimalen

M. Das Produkt M^* aller echten Normalteiler von M ist ein Produkt von $\mathfrak{nr}$-Normalteilern von M^*, genügt der Bedingung (6) des Satzes 1.5 und ist also eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Es folgt $M^* \subset M$, so dass M/M^* als einfaches epimorphes Bild des Subnormalteilers M von G wegen (++) eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Aus Zusatz 1.6, (c) ergibt sich dann, dass M selbst eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist; und dies widerspricht unserer Wahl von M, woraus unsere Behauptung folgt.

Bemerkung 2.9: Die Behauptung dieses Lemma ist identisch mit der Bedingung (II.A) des Satzes 2.6; und unsere Bedingung (+) ist mit Satz 2.6, (II.B) identisch. Schliesslich folgt (++) aus Satz 2.6, (IV.B) und Satz 2.6, (III.A) folgt aus (++).

Zusatz 2.10: *Die Gruppe G ist dann und nur dann artinsch und auflösbar, wenn*

(A) *die Minimalbedingung von den Subnormalteilern von G erfüllt wird und*

(B) *jedes einfache epimorphe Bild eines Subnormalteilers von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe mit maximaler Untergruppe ist.*

Beweis: Es ist klar, dass artinsche Gruppen der Bedingung (A) genügen. Weiter sind einfache epimorphe Bilder auflösbarer Gruppen als einfache auflösbare Gruppen zyklisch von Primzahlordnung, woraus auch die Notwendigkeit von (B) folgt.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (A) und (B) an. Dann folgt die Bedingung (a) des Hauptsatzes 2.3 aus Lemma 2.8; weiter folgt (b) aus (A) und (c) aus (B), so dass unsere Bedingungen auch hinreichend sind.

§ 3. Die $\mathfrak{unr}$-Gruppen.

Diese Gruppenklasse wird durch die folgende Eigenschaft definiert:

$\mathfrak{unr}$: *Jede Untergruppe von G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

Wir haben diese Eigenschaft so definiert, dass sie per definitionem untergruppenvererblich ist, dies sehr im Gegensatz zur Grundeigenschaft $\mathfrak{nr}$: direkte Produkte von 1 verschiedener Gruppen sind ja stets $\mathfrak{nr}$-Gruppen, auch wenn die beiden direkten Faktoren es nicht sind.

Lemma 3.1: *Ist jede von* 1 *verschiedene charakteristische Untergruppe von G auch von ihrer Ableitung verschieden, so gilt:*

(a) $U' \neq U$ *für jede Untergruppe* $U \neq 1$ *von* G.

(b) *Ist V eine normalisatorgleiche echte Untergruppe der Untergruppe U von G, so sind V und der Normalteiler $\{V^U\}'$ von U nicht vergleichbar.*

(c) *G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*

Beweis: Ist $U \neq 1$ eine Untergruppe von G, so sei D der Durchschnitt aller U enthaltenden charakteristischen Untergruppen von G. Dann ist D eine U enthaltende charakteristische Untergruppe von G. Mit U ist auch $D \neq 1$, so dass nach Voraussetzung $D' \neq D$. Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist D' eine charakteristische Untergruppe von G. Es ist $U \not\subseteq D'$, da sonst $D = D'$ wäre. Aus $U \subseteq D$ ergibt sich also

$$U' \subseteq U \cap D' \subset U,$$

woraus (a) folgt.

Ist U irgendeine Untergruppe von G und $V = \mathfrak{n}_U V \subset U$, so ist $V \subset \{V^U\} = W$ und also $W \neq 1$. Aus (a) folgt $W' \neq W$. Da W' als charakteristische Untergruppe des Normalteilers W von U selbst ein Normalteiler von U ist, wird W' von V normalisiert und V ist nicht in W' enthalten. Wäre $W' \subseteq V$, so wäre $V \subset W$ ein Normalteiler von W im Widerspruch dazu, dass V gleich seinem Normalisator in U ist. Also sind W' und V nicht vergleichbar. Damit haben wir (b) bewiesen. Aus (b) folgt sofort, dass jede Untergruppe von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe und G selbst also eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe ist.

Bemerkung 3.2: Aus (a) folgt sofort, dass die in Lemma 3.1 behandelte Gruppenklasse untergruppenvererblich ist. Sie umfasst die Klasse aller freien Gruppen, so dass insbesondere alle freien Gruppen $\mathfrak{unr}$-Gruppen sind. Da aber, wie schon früher bemerkt, nicht alle Gruppen $\mathfrak{unr}$-Gruppen sind, so folgt:

Die Eigenschaft $\mathfrak{unr}$ *ist nicht epimorphismenvererblich.*

Dass $\mathfrak{unr}$ untergruppenvererblich ist, haben wir schon erwähnt. Wir wollen als nächstes Erweiterungsvererblichkeit und Residualität von $\mathfrak{unr}$ beweisen.

Lemma 3.3 : (A) *Erweiterungen von* $\mathfrak{unr}$*-Gruppen durch* $\mathfrak{unr}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{unr}$*-Gruppen.*

(B) *Ist* 1 *der Durchschnitt aller Normalteiler* X *von* G *mit* $\mathfrak{unr}$*-Faktorgruppe* G/X, *so ist* G *eine* $\mathfrak{unr}$*-Gruppe.*

Beweis : Ist N ein $\mathfrak{unr}$-Normalteiler von G mit $\mathfrak{unr}$-Faktorgruppe G/N, ist U eine Untergruppe von G, so ist die Untergruppe $U \cap N$ von N eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe; und die Untergruppe

$$U/(U \cap N) \simeq NU/N \subseteq G/N$$

ist ebenfalls eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Als Erweiterung der $\mathfrak{nr}$-Gruppe $U \cap N$ durch die $\mathfrak{nr}$-Gruppe $U/(U \cap N)$ ist U wegen Zusatz 1.6, (c) eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Folglich ist G eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe : wir haben (A) bewiesen.

Sei $\mathfrak{K}$ die Menge aller Normalteiler X von G mit $\mathfrak{unr}$-Faktorgruppe G/X und sei

$$1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{K}} X.$$

Ist U eine Untergruppe von G, so ist auch

$$1 = \bigcap_{X \in \mathfrak{K}} (U \cap X).$$

Für X aus $\mathfrak{K}$ ist $U \cap X$ ein Normalteiler von U; und

$$U/(U \cap X) \simeq XU/X \subseteq G/X$$

ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe als Untergruppe der $\mathfrak{unr}$-Gruppe G/X. Also ist 1 der Durchschnitt der Normalteiler Y von U mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe U/Y; und es folgt aus Satz 1.5, (7), dass U eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Folglich ist G eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe : wir haben (B) bewiesen.

Wir definieren :

$\mathfrak{unr}G =$ Durchschnitt aller Normalteiler X von G mit $\mathfrak{unr}$-Faktorgruppe G/X.

Dies ist eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe von G.

Zusatz 3.4: (a) *$G/\mathfrak{unr}\,G$ ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*

(b) $\mathfrak{unr}\,[\mathfrak{unr}\,G] = \mathfrak{unr}\,G$.

(c) 1 *ist das einzige epimorphe Bild von $\mathfrak{unr}\,G$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{unr}$.*

(d) $\mathfrak{unr}\,U \subseteq \mathfrak{unr}\,G$ *für jede Untergruppe U von G.*

Beweis: (a) folgt sofort aus Lemma 3.3, (B). Als charakteristische Untergruppe einer charakteristischen Untergruppe ist $\mathfrak{unr}\,[\mathfrak{unr}\,G]$ eine charakteristische Untergruppe von G. Wegen (a) ist $G/\mathfrak{unr}\,[\mathfrak{unr}\,G]$ eine Erweiterung der $\mathfrak{unr}$-Gruppe $\mathfrak{unr}\,G/\mathfrak{unr}\,[\mathfrak{unr}\,G]$ durch die $\mathfrak{unr}$-Gruppe $G/\mathfrak{unr}\,G$, wegen Lemma 3.3, (A) also selbst eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe. Es folgt (b). (c) ist eine triviale Folgerung aus (b). Schliesslich ist

$$U/[U \cap \mathfrak{unr}\,G] \simeq U\,\mathfrak{unr}\,G/\mathfrak{unr}\,G \subseteq G/\mathfrak{unr}\,G,$$

so dass $U/[U \cap \mathfrak{unr}\,G]$ als Untergruppe einer $\mathfrak{unr}$-Gruppe selbst eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe ist. Es folgt (d).

Satz 3.5: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent.*

(1) *G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*

(2) *Jede von 1 verschiedene Untergruppe von G besitzt ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild mit der Eigenschaft $\mathfrak{unr}$.*

(3) *Jede von 1 verschiedene charakteristische Untergruppe von G besitzt ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild mit der Eigenschaft $\mathfrak{unr}$.*

Bemerkung: Die Äquivalenz von (1) und (2) kann man durch die Eigenschaftengleichung

$$\mathfrak{unr} = \text{hypo} \cdot \mathfrak{unr}$$

ausdrücken.

Beweis folgt unmittelbar aus Zusatz 3.4, (a), (c).

Hilfssatz 3.6: *Die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G sind äquivalent:*

(I) *G ist auflösbar.*

(II) *G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*

(III) *Ist die maximale Untergruppe M der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U, so gibt es einen mit M nicht vergleichbaren Normalteiler von U.*

Beweis: Ist G artinsch und auflösbar, so gilt dasselbe von allen Untergruppen von G. Aus Hauptsatz 2.3 folgt, dass jede Untergruppe von G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe und G selbst also eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe ist.

Ist G eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe, ist die maximale Untergruppe M der Untergruppe U von G kein Normalteiler von U, so ist $M = \mathfrak{n}_U M \subset U$. Da U eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist, gibt es eine mit M nicht vergleichbare, von M normalisierte Untergruppe V von U. Aus der Maximalität von M folgt dann $U = MV$, so dass V ein Normalteiler von U ist.

Wir nehmen schliesslich an, dass G der Bedingung (III) genügt, ohne auflösbar zu sein. Da G artinsch ist, gibt es dann unter den nicht-auflösbaren Untergruppen von G eine minimale W. Diese Untergruppe W von G ist [mit G] artinsch und genügt [mit G] der Bedingung (III). Nach seiner Wahl ist W nicht auflösbar, während jede echte Untergruppe von W auflösbar ist.

Wäre W nicht endlich erzeugbar, so wäre jede endlich erzeugbare Untergruppe von W eine echte Untergruppe von W und also auflösbar. Auflösbare, endlich erzeugbare, artinsche Gruppen sind endlich; siehe etwa Baer [2; p. 18, Lemma 3.3]. Also ist jede endlich erzeugbare Untergruppe der artinschen Gruppe W endlich und auflösbar. Anwendung von Baer [2; p. 18, Lemma 3.3] zeigt, dass W selbst auflösbar ist. Dies widerspricht unserer Wahl von W. Also ist W endlich erzeugbar.

Von 1 verschiedene, endlich erzeugbare Gruppen besitzen stets maximale Untergruppen [Maximumprinzip der Mengenlehre]. Also existiert eine maximale Untergruppe M von W. Diese ist als echte Untergruppe von W auflösbar. Wäre M ein Normalteiler von W, so wäre W/M frei von echten Untergruppen und also zyklisch von Primzahlordnung, so dass W als Erweiterung seines auflösbaren Normalteilers M durch die zyklische Gruppe W/M selbst auflösbar wäre. Dies widerspricht unserer Wahl von W. Also ist M kein Normalteiler von W. Wir können folglich Bedingung (III) anwenden: es gibt einen mit M nicht vergleichbaren Normalteiler V von W. Da insbesondere $V \subset W$ ist, ist V auflösbar; und aus der Maximalität von M folgt $W = MV$. Also ist W eine Erweiterung seines auflösbaren Normalteilers V durch das epimorphe Bild

$$W/V = VM/V \cong M/(M \cap V)$$

der auflösbaren Gruppe M; und als solche ist W im Widerspruch zu seiner Wahl auflösbar. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass artinsche Gruppen mit der Eigenschaft (III) auflösbar sind: die Bedingungen (I)-(III) sind äquivalent.

HILFSSATZ 3.7: *Die Gruppe G ist dann und nur dann artinsch und auflösbar, wenn*

(A) *G eine* $\mathfrak{unr}$*-Gruppe ist,*

(B) *die Minimalbedingung von den Subnormalteilern von G erfüllt wird und*

(C) *der Subnormalteiler S von G eine maximale Untergruppe besitzt, wenn sein Zentrum $\mathfrak{z}S$ das Produkt aller echten Normalteiler von S ist und zwar $\mathfrak{z}S$, aber nicht $S/\mathfrak{z}S$ artinsch ist.*

BEWEIS: Ist G artinsch und auflösbar, so ist Bedingung (C) leer erfüllt [es gibt kein solches S]; Bedingung (B) ist eine Abschwächung der in G gültigen Minimalbedingung und die Gültigkeit von (A) kann etwa aus Hilfssatz 3.6 gefolgert werden.

Gelten umgekehrt die Bedingungen (A), (B), (C), so wollen wir die Gültigkeit der Bedingungen (a), (b), (c) des Hauptsatzes 2.3 verifizieren. Natürlich ist (a) nur eine schwache Form von (A) und (b) = (B). Sei schliesslich das Zentrum $\mathfrak{z}S$ des Subnormalteilers S das Produkt aller echten Normalteiler von S und $\mathfrak{z}S$ artinsch, $S/\mathfrak{z}S$ unendlich. Wäre $S/\mathfrak{z}S$ artinsch, so wäre S als Erweiterung seines artinschen Zentrums durch die artinsche Zentrumsfaktorgruppe selbst artinsch. Da S mit G wegen (A) eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe ist, folgt aus Hilfssatz 3.6 die Auflösbarkeit von S. Dann ist $S/\mathfrak{z}S$ eine auflösbare einfache Gruppe und eine solche ist zyklisch von Primzahlordnung, also endlich. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Wahl von S, so dass $S/\mathfrak{z}S$ nicht artinsch ist. Anwendung von (C) zeigt die Existenz einer maximalen Untergruppe von S, womit auch die Gültigkeit von (c) dargetan ist. Anwendung des Hauptsatzes 2.3 zeigt, dass G artinsch und auflösbar ist.

HILFSSATZ 3.8 : *Jeder Torsionssubnormalteiler ist in einem Torsionsnormalteiler enthalten.*

BEWEIS : Ist T ein Torsionssubnormalteiler, so gibt es eine endliche Kette von Untergruppen $T(i)$ von G mit folgenden Eigenschaften :

$$T = T(0),\ T(i) \text{ ist ein Normalteiler von } T(i+1),\ T(n) = G.$$

Wir setzen

$$T(i)^* = \text{Produkt aller Torsionsnormalteiler von } T(i).$$

Es ist klar, dass $T(i)^*$ eine charakteristische Torsionsuntergruppe von $T(i)$ ist. Da T eine Torsionsgruppe ist, ist $T = T(0)^*$. Da charakteristische Untergruppen von Normalteilern wieder Normalteiler sind, ist $T(i)^*$ ein Torsionsnormalteiler von $T(i+1)$, woraus $T(i)^* \subseteq T(i+1)^*$ folgt. Damit haben wir aber

$$T = T(0)^* \subseteq \ldots \subseteq T(i)^* \subseteq T(i+1)^* \subseteq \ldots \subseteq T(n)^* = G^*$$

gezeigt : T ist in der charakteristischen Torsionsuntergruppe G^* von G enthalten.

Zwecks bequemer Formulierung unseres nächsten Resultats definieren wir :

$\mathfrak{C}G$ = *Kompositum aller hyperabelschen Torsionssubnormalteiler von* G.

Es ist klar, dass $\mathfrak{C}G$ eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe von G ist. Ist S ein hyperabelscher Torsionssubnormalteiler von G, so ist S wegen Hilfssatz 3.8 in einem Torsionsnormalteiler von G enthalten. Insbesondere ist also auch der von S aufgespannte Normalteiler $\{S^G\}$ ein selbstverständlich in $\mathfrak{C}G$ enthaltener Torsionsnormalteiler von G. Also ist $\mathfrak{C}G$ das Produkt von Torsionsnormalteilern von G und es folgt :

$\mathfrak{C}G$ ist eine charakteristische Torsionsuntergruppe von G.

LEMMA 3.9 : (1) *Die folgenden Eigenschaften von G sind äquivalent* :

(a) $\mathfrak{C}G$ *ist artinsch und auflösbar.*

(b) $\mathfrak{C}G$ *ist artinsch.*

(c) *Jeder abelsche Torsionssubnormalteiler von* G *ist artinsch.*

(2) *Ist jeder abelsche Torsionssubnormalteiler von* G *artinsch, so ist*

(a) $\mathfrak{C}[G/\mathfrak{C}G] = 1$,

(b) 1 *der einzige artinsche* $\mathfrak{unr}$*-Subnormalteiler von* $G/\mathfrak{C}G$,

(c) 1 *der einzige der Minimalbedingung für Subnormalteiler genügende* $\mathfrak{unr}$*-Subnormalteiler von* $G/\mathfrak{C}G$, *wenn wenigstens eine der beiden folgenden Bedingungen gilt:*

(c′) *Der der Minimalbedingung für Subnormalteiler genügende* $\mathfrak{unr}$*-Subnormalteiler* S *von* G *besitzt eine maximale Untergruppe, wenn* $\mathfrak{Z}S$ *das Produkt aller echten Normalteiler von* S *ist und* S *nicht artinsch ist.*

(c″) *Jeder einfache, nicht artinsche* $\mathfrak{unr}$*-Subnormalteiler von* $G/\mathfrak{C}G$ *besitzt eine maximale Untergruppe.*

Beweis: Es ist klar, dass (1.b) aus (1.a) folgt; und (1.c) folgt aus (1.b), da $\mathfrak{C}G$ alle abelschen Torsionssubnormalteiler von G enthält. Gilt schliesslich (1.c), so ist $\mathfrak{C}G$ eine Torsionsgruppe, deren abelsche Subnormalteiler als Torsionssubnormalteiler artinsch sind. Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von $\mathfrak{C}G$, so ist H ebenso wie $\mathfrak{C}G$ das Kompositum seiner hyperabelschen Subnormalteiler. Also gibt es einen hyperabelschen Subnormalteiler $S \neq 1$ von H; und dieser besitzt einen abelschen Normalteiler $A \neq 1$, der natürlich auch ein abelscher Subnormalteiler von H ist. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathfrak{C}G$ der Bedingung (3) von Baer [3; p. 359/360, Hauptsatz 8.15, **A**] genügt und also artinsch und auflösbar ist: (1) ist bewiesen.

Wir nehmen im folgenden stets an, dass jeder abelsche Torsionssubnormalteiler von G artinsch ist. Jeder hyperabelsche Torsionssubnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$ hat die Form $S/\mathfrak{C}G$. Dabei ist S ein Subnormalteiler von G, der mit $\mathfrak{C}G$ und $S/\mathfrak{C}G$ eine Torsionsgruppe ist. Da $\mathfrak{C}G$ wegen (1) auflösbar und $S/\mathfrak{C}G$ hyperabelsch ist, ist S hyperabelsch. Es folgt $S \subseteq \mathfrak{C}G$ aus der Definition von $\mathfrak{C}$, so dass $S/\mathfrak{C}G = 1$ ist. Da folglich alle hyperabelschen Torsionssubnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$ trivial sind, ist $1 = \mathfrak{C}[G/\mathfrak{C}G]$.

Ist $A/\mathfrak{C}G$ ein artinscher $\mathfrak{unr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$, so ist A als Erweiterung der wegen (1) artinschen Gruppe $\mathfrak{C}G$ durch die artinsche Gruppe $A/\mathfrak{C}G$ selbst artinsch. Wegen (1) und Hilfssatz 3.6 ist $\mathfrak{C}G$ eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe; und wegen Lemma 3.3, (A) ist die Erweiterung der $\mathfrak{unr}$-Gruppe $\mathfrak{C}G$ durch die $\mathfrak{unr}$-Gruppe $A/\mathfrak{C}G$ selbst eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe. Anwendung von Hilfssatz 3.6 zeigt die Auflösbarkeit von A, so dass der artinsche auflösbare Torsionssubnormalteiler A in $\mathfrak{C}G$ enthalten und $A/\mathfrak{C}G = 1$ ist: es gilt (2.b).

Gilt (c′), ist $T/\mathfrak{C}G$ ein einfacher, nicht artinscher $\mathfrak{unr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$, so ist T Subnormalteiler von G. Da $\mathfrak{C}G$ wegen (1) auflösbar ist, ist $\mathfrak{C}G$ wegen Hilfssatz 3.6 eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe; und die Erweiterung T der $\mathfrak{unr}$-Gruppe $\mathfrak{C}G$ durch die $\mathfrak{unr}$-Gruppe $T/\mathfrak{C}G$ ist wegen Lemma 3.3, (A) eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe. Da $\mathfrak{C}G$ wegen (1) artinsch und $T/\mathfrak{C}G$ einfach ist, wird die Minimalbedingung von den Subnormalteilern von T erfüllt. Also genügt T den Bedingungen (A), (B) des Hilfssatzes 3.7; und die Gültigkeit von (C) ergibt sich aus (c′) zusammen mit der Tatsache, dass jeder Subnormalteiler des Subnormalteilers T ein Subnormalteiler von G ist. Anwendung von Hilfssatz 3.7 ergibt, dass T artinsch und auflösbar ist: ein Widerspruch. Also folgt aus (c′) die folgende Eigenschaft:

(c*) Es gibt keine einfachen, nicht artinschen $\mathfrak{unr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$.

Natürlich ist (c″) eine Folge von (c*), so dass (c″) gilt, wenn (c′) oder (c″) gilt.

Sei nun $S/\mathfrak{C}G$ ein von 1 verschiedener, der Minimalbedingung für Subnormalteiler genügender $\mathfrak{unr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$. Aus der Minimalbedingung folgt die Existenz eines minimalen Subnormalteilers $T/\mathfrak{C}G$ von $S/\mathfrak{C}G$. Es ist klar, dass $T/\mathfrak{C}G$ ein $\mathfrak{unr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$ ist. Da jeder Normalteiler von $T/\mathfrak{C}G$ ein Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$ ist, folgt aus der Minimalität von $T/\mathfrak{C}G$ die Einfachheit von $T/\mathfrak{C}G$. Anwendung der Bedingung (c″) zeigt die Existenz einer maximalen Untergruppe der einfachen $\mathfrak{unr}$-Gruppe $T/\mathfrak{C}G$. Anwendung von Lemma 1.9 zeigt, dass $T/\mathfrak{C}G$ zyklisch von Primzahlordnung ist. Dies widerspricht (2.a) und (2.b); und aus diesem Widerspruch folgt die Gültigkeit von (c).

Bemerkung 3.10: Während des Beweises haben wir gezeigt, dass es Subnormalteiler der ad (c′) und ad (c″) betrachteten Art gar nicht geben kann. Eine entsprechende Bemerkung gilt für die in Bedingung (C) des Hilfssatzes 3.7 betrachteten Subnormalteiler.

HAUPTSATZ 3.11 : *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent :*

(I) *G ist artinsch und auflösbar.*

(II)
- (A) *G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*
- (B) *Abelsche Torsionssubnormalteiler von G sind artinsch.*
- (C) *Ein nicht-artinscher Subnormalteiler von G besitzt eine maximale Untergruppe, wenn sein Zentrum das Produkt aller seiner echten Normalteiler ist.*
- (D) *Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G und 1 der einzige artinsche Subnormalteiler von H, so gibt es einen Subnormalteiler $S \neq 1$ von H, von dessen Subnormalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird.*

(III)
- (A) *G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*
- (B) *Abelsche Torsionssubnormalteiler von G sind artinsch.*
- (C) *Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G und 1 der einzige artinsche Subnormalteiler von H, so besitzt H einen einfachen Subnormalteiler mit maximaler Untergruppe.*

(IV)
- (A) *G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.*
- (B) *Abelsche Untergruppen von G sind artinsch.*
- (C) *Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G und 1 der einzige artinsche Subnormalteiler von H, so gibt es einen Subnormalteiler $S \neq 1$ von H mit folgender Eigenschaft:*
- (+) *Ist die endlich erzeugbare Untergruppe E von S nicht artinsch, so ist E eine radikale Gruppe.*

TERMINOLOGISCHE ERINNERUNG : Die Gruppe G ist eine *radikale* Gruppe [im Sinne von Plotkin], wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen, lokal nilpotenten Normalteiler besitzt. Dabei heisst eine Gruppe *lokal nilpotent,* wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe E nilpotent von endlicher Klasse ist, d.h. eine 1 mit E verbindende, endliche Zentralreihe besitzt.

Beweis: Ist zunächst G artinsch und auflösbar, so ist G wegen Hilfssatz 3.6 eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe; und nun folgt mühelos, dass G jeder der Bedingungen (II)-(IV) genügt.

Wir nehmen umgekehrt an, dass G wenigstens einer der drei Bedingungen (II)-(IV) genügt. Dann gilt bestimmt:

(1) G ist eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe.

(2) Abelsche Torsionssubnormalteiler von G sind artinsch.

Durch Anwendung von Lemma 3.9, (1) folgt hieraus:

(3) $\mathfrak{C}G$ ist artinsch und auflösbar.

Durch Anwendung von Lemma 3.9, (2.a) + (2.b) ergibt sich aus (1), (2):

(4) $\mathfrak{C}[G/\mathfrak{C}G] = 1$.

Jeder artinsche Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$ hat die Form $S/\mathfrak{C}G$, wobei S ein Subnormalteiler von G ist. Da S die Erweiterung der wegen (3) artinschen Gruppe $\mathfrak{C}G$ durch die nach Voraussetzung artinsche Gruppe $S/\mathfrak{C}G$ ist, ist S artinsch und wegen (1) eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe. Anwendung von Hilfssatz 3.6 ergibt die Auflösbarkeit von S, so dass $S \subseteq \mathfrak{C}G$ aus der Definition von $\mathfrak{C}$ folgt. Also gilt:

(5) 1 ist der einzige artinsche Subnormalteiler von $G/\mathfrak{C}G$.

Wir machen nun die Annahme, dass G nicht artinsch und auflösbar ist. Dann ergibt sich $G \neq \mathfrak{C}G$ aus (3), so dass

(6) $H = G/\mathfrak{C}G \neq 1$

ist.

Würde nun (II) gelten, so folgte aus (II.D) und (5) die Existenz eines Subnormalteilers $S \neq 1$ von H, von dessen Subnormalteilern die Minimalbedingung erfüllt wird. Es gibt dann einen Subnormalteiler T von G mit $\mathfrak{C}G \subset T$ und $T/\mathfrak{C}G = S$. Jeder abelsche Torsionssubnormalteiler von T ist ein Subnormalteiler von G und also wegen (2) artinsch. Da T als Erweiterung der wegen (3) artinschen Gruppe $\mathfrak{C}G$ durch die Gruppe S selbst der Minimalbedingung für Subnormalteiler genügt, genügt T den Bedingungen (A), (B) des Hilfssatzes 3.7, dessen Bedingung (C) aus (II.C) folgt. Also ist T artinsch, so dass auch $S = T/\mathfrak{C}G$ artinsch ist. Dies widerspricht $S \neq 1$ und (5). Aus diesem Widerspruch folgt:

(7) G genügt nicht der Bedingung (II).

Wir nehmen als nächstes die Gültigkeit von (III) an. Wegen (5) und (III.C) existiert dann ein einfacher Subnormalteiler S von H

mit maximaler Untergruppe. Es gibt dann einen Subnormalteiler T von G mit $\mathfrak{C}G \subset T$ und $S = T/\mathfrak{C}G$. Sei nun X ein nicht-artinscher Subnormalteiler von T. Aus (3) folgt $X \not\subseteq \mathfrak{C}G$. Dann ist $\mathfrak{C}G \subset X\mathfrak{C}G$ und $X\mathfrak{C}G/\mathfrak{C}G$ ist ein von 1 verschiedener Subnormalteiler der einfachen Gruppe S. Es folgt $S = X\mathfrak{C}G/\mathfrak{C}G$, so dass $T = X\mathfrak{C}G$ und

$$S = X\mathfrak{C}G/\mathfrak{C}G \cong X/(X \cap \mathfrak{C}G)$$

ist. Mit S besitzt folglich auch X eine maximale Untergruppe. Wegen (1), (2) genügt also T den Bedingungen des Hilfssatzes 3.7, so dass T artinsch ist. Dann ist aber auch S artinsch, so dass S im Widerspruch zu (5) ein von 1 verschiedener, artinscher Subnormalteiler von H ist. Aus diesem Widerspruch folgt:

(8) G genügt nicht der Bedingung (III).

Aus (7) und (8) und den von uns gemachten Annahmen ergibt sich nun die Gültigkeit der Bedingung (IV). Wegen (IV.C) gilt dann sogar:

(2*) Alle abelschen Untergruppen von G sind artinsch.

Sei nun A eine abelsche Untergruppe von $H = G/\mathfrak{C}G$. Dann gibt es eine Untergruppe B von G mit $\mathfrak{C}G \subseteq B$ und $A = B/\mathfrak{C}G$. Aus (3) folgt, dass $\mathfrak{C}G$ auflösbar ist; und aus der Kommutativität von A folgt die Auflösbarkeit von B. Wegen (2*) sind alle abelschen Untergruppen von B artinsch. Also genügt B der Bedingung (5) von Baer [3; p. 359/360, Hauptsatz 8.15, **A**], so dass B artinsch ist. Also ist auch das epimorphe Bild A von B artinsch; und wir haben gezeigt:

(9) Abelsche Untergruppen von H sind artinsch.

Ist A eine artinsche Untergruppe von H, so gibt es eine Untergruppe B von G mit $\mathfrak{C}G \subseteq B$ und $A = B/\mathfrak{C}G$. Wegen (3) ist $\mathfrak{C}G$ artinsch, so dass auch B artinsch ist. Wegen (IV.A) ist B eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe, so dass aus Hilfssatz 3.6 die Auflösbarkeit von B und also auch die von A folgt:

(10) Jede artinsche Untergruppe von H ist auflösbar.

Aus Baer [2; p. 18, Lemma 3.3] folgt weiter:

(11) Endlich erzeugbare, artinsche, auflösbare Gruppen sind endlich.

Ist R eine radikale Untergruppe von H, so folgt aus (9), dass jede abelsche Untergruppe von R artinsch ist. Also genügt R der

Bedingung (5) von Baer [3; p. 359/360, Hauptsatz 8.15, **A**], so dass R artinsch und auflösbar ist. Also gilt:

(12) Radikale Untergruppen von H sind artinsch und auflösbar.

Aus (5) und (IV.C) folgern wir die Existenz eines Subnormalteilers $S \neq 1$ von H mit folgender Eigenschaft:

(+) Ist die endlich erzeugbare Untergruppe E von S nicht artinsch, so ist E eine radikale Gruppe.

Sei nun X irgendeine endlich erzeugbare Untergruppe von S. Wäre X nicht artinsch, so wäre X radikal und also wegen (12) artinsch. Also sind alle endlich erzeugbaren Untergruppen von S artinsch. Sie sind wegen (10) auflösbar und wegen (11) sogar endlich. Wir haben gezeigt:

(++) Jede endlich erzeugbare Untergruppe von S ist endlich und auflösbar.

Wegen (9) ist jede abelsche Untergruppe von S artinsch. Anwendung eines schönen Satzes von Tschernikow [p. 128, Theorema 3] zeigt, dass der Subnormalteiler $S \neq 1$ im Widerspruch zu (5) artinsch ist. Aus diesem Widerspruch ergibt sich die Äquivalenz der Bedingungen (I)-(IV).

DISKUSSION 3.12: **A.** Die Äquivalenz der Bedingungen (I), (II) des Hilfssatzes 3.6 ist als trivialer Spezialfall in der Äquivalenz der Bedingungen (I), (II) des Hauptsatzes 3.11 enthalten.

B. Hilfssatz 3.7 ist als trivialer Spezialfall in der Äquivalenz der Bedingungen (I), (II) des Hauptsatzes 3.11 enthalten.

C. Beim Nachweis, dass den Bedingungen (II), (III) des Hauptsatzes 3.11 genügende Gruppen artinsch und auflösbar sind, kann man Lemma 3.9, (2.c), so naheliegend dies scheint, nicht ohne weiteres anwenden, da ja die Eigenschaft $\mathfrak{unr}$ nicht epimorphismenvererblich ist.

D. Torsionsfreie abelsche Gruppen $[\neq 1]$ genügen den Bedingungen (A), (B) der Bedingungen (I), (II) des Hauptsatzes 3.11, sind aber nicht artinsch. Dies zeigt die — wenigstens formale — Unentbehrlichkeit der Reste dieser Bedingungen.

E. Ist A eine abelsche Gruppe vom Prüferschen Typ p^∞, entsteht die Gruppe G aus A durch Adjunktion eines der Bedingung

$$b^{-1}ab = a^{1+p} \text{ für } a \text{ aus } A$$

genügenden Elements b, so ist A ein Normalteiler von G und G/A ist eine unendliche zyklische Gruppe. Jeder abelsche Subnormalteiler von G ist in dem abelschen Normalteiler A enthalten. Es folgt, dass G eine $\mathfrak{unr}$-Gruppe ist, deren sämtliche abelsche Subnormalteiler artinsch sind; und man sieht leicht ein, dass alle nicht artinschen Subnormalteiler von G maximale Untergruppen besitzen. Diese Gruppe genügt also den Bedingungen (II.A-C) des Hauptsatzes 3.11, ist aber nicht artinsch: (II.D) ist unentbehrlich. Eine ähnliche Bemerkung kann man bezgl. (III) und bezgl. Hilfssatz 3.7 machen.

F. Man vergleiche die Bedingungen (a)-(c) des Hauptsatzes 2.3 mit den Bedingungen (A)-(C) des Hilfssatzes 3.7. Bedingung (A) ist schärfer als (a), die Bedingungen (B) und (b) sind identisch, während (C) schwächer als (c) ist.

G. Freie Gruppen sind $\mathfrak{unr}$-Gruppen, wie sich etwa aus Lemma 3.1 ergibt. Abelsche Untergruppen nicht-abelscher, freier Gruppen sind keine Subnormalteiler, wenn von 1 verschieden. Nicht-abelsche, freie Gruppen genügen also den Bedingungen (II.A) und (II.B), was die Unentbehrlichkeit der Restbedingungen von (II) und (III) evident macht, selbst wenn wir bereit wären, (II.B) in der schärferen Form zu postulieren: Abelsche Subnormalteiler sind artinsch.

H. Eine einfache, auflösbare Gruppe ist stets zyklisch von Primzahlordnung; insbesondere besitzt sie eine maximale Untergruppe. Infolgedessen folgt aus (I) die Bedingung:

(II.C*) Jedes einfache epimorphe Bild eines Subnormalteilers von G besitzt eine maximale Untergruppe.

Es ist klar, dass (II.C) aus dieser Bedingung folgt. Mann kann also (II.C) durch die kürzere, aber schärfere Bedingung (II.C*) ersetzen.

Aus (II.C*) folgt auch der nicht-existenzielle Teil von (III.C), während der existenzielle Teil etwa aus (II.D) folgt.

§ 4. Die $\mathfrak{enr}$-Gruppen.

Diese Gruppenklasse wird durch folgende Eigenschaft charakterisiert.

$\mathfrak{enr}$: *Jedes epimorphe Bild der Gruppe G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

Man sieht sofort, dass die Klasse der $\mathfrak{enr}$-Gruppen eine echte Unterklasse der Klasse der $\mathfrak{nr}$-Gruppen ist.

SATZ 4.1: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe.*

(2) *G ist das Erzeugnis seiner $\mathfrak{enr}$-Subnormalteiler.*

(3) *Jedes von* 1 *verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von* 1 *verschiedenen $\mathfrak{nr}$-Subnormalteiler.*

BEWEIS: Es ist klar, dass (2) aus (1) folgt. Gilt (2), ist σ ein Epimorphismus von G auf $H \neq 1$, so gibt es einen $\mathfrak{enr}$-Subnormalteiler S von G mit $S^\sigma \neq 1$. Man sieht sofort, dass S^σ ein $\mathfrak{nr}$-Subnormalteiler von H ist; und damit haben wir (3) aus (2) hergeleitet. Gilt (3), so betrachten wir ein epimorphes Bild $H \neq 1$ von G. Wir bilden das Erzeugnis $\mathfrak{nr}^*H$ aller von oben erreichbaren $\mathfrak{nr}$-Untergruppen von H. Dies ist eine charakteristische $\mathfrak{nr}$-Untergruppe von H [Zusatz 1.6, (a)]; und 1 ist die einzige von oben erreichbare $\mathfrak{nr}$-Untergruppe von $H/\mathfrak{nr}^*H$ [Zusatz 1.6, (d)]. Also ist 1 auch der einzige $\mathfrak{nr}$-Subnormalteiler des epimorphen Bildes $H/\mathfrak{nr}^*H$ von G. Anwendung von (3) zeigt $H/\mathfrak{nr}^*H = 1$, so dass $H = \mathfrak{nr}^*H$ eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Damit haben wir (1) aus (3) hergeleitet und die Äquivalenz von (1) (3) bewiesen.

BEMERKUNG 4.2: **A.** Die Äquivalenz der Bedingungen (1) und (3) des Satzes 4.1 hat insbesondere die gruppentheoretischen Eigenschaftengleichungen

$$\mathfrak{enr} = \text{hyper} \cdot \mathfrak{nr} = \text{hyper} \cdot \mathfrak{enr}$$

zur Folge.

B. Aus der Äquivalenz von (1) und (3) folgt z.B., dass die Gruppe G sicher dann eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe ist, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen Subnormalteiler besitzt, der zyklisch oder direkt zerlegbar ist.

C. Ob es genügt, (2) durch die Forderung zu ersetzen, dass G das Erzeugnis seiner von oben erreichbaren $\mathfrak{enr}$-Untergruppen ist, haben wir nicht entscheiden können. Dies liegt in erster Linie daran, dass wir nicht haben entscheiden können, ob Epimorphismen von oben erreichbare Untergruppen auf von oben erreichbare Untergruppen abbilden.

D. Die wichtigste Folge aus der Äquivalenz von (1) und (2) ist die « Ko-Residualität » von $\mathfrak{enr}$: Produkte von $\mathfrak{enr}$-Normalteilern sind $\mathfrak{enr}$-Gruppen.

ZUSATZ 4.3: *Erweiterungen von* $\mathfrak{enr}$*-Gruppen durch* $\mathfrak{enr}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{enr}$*-Gruppen.*

BEWEIS: Ist G eine Erweiterung einer $\mathfrak{enr}$-Gruppe durch eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe, ist H ein epimorphes Bild von G, so ist H eine Erweiterung einer $\mathfrak{nr}$-Gruppe durch eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so dass H wegen Zusatz 1.6, (c) eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Also ist G eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe.

BEMERKUNG 4.4: Das folgende einfache Beispiel zeigt, dass $\mathfrak{enr}$ nicht untergruppenvererblich ist.

Es sei $N = A \otimes B$ das direkte Produkt zweier isomorpher [endlicher] einfacher Gruppen $A \simeq B$, die keine $\mathfrak{nr}$-Gruppen sind. G entstehe aus N durch Adjunktion eines Elements g mit

$$g^2 = 1, \quad Ag = gB.$$

Dann ist N der einzige echte Normalteiler von G. Natürlich sind N, die zyklische Gruppe G/N und also auch G selbst $\mathfrak{nr}$-Gruppen. Da 1, G/N und G die einzigen epimorphen Bilder von G sind, ist G sogar eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe. Aber der Normalteiler N von G ist keine $\mathfrak{enr}$-Gruppe, da sein epimorphes Bild A keine $\mathfrak{nr}$ Gruppe ist. $\mathfrak{enr}$ ist also nicht einmal auf Normalteiler vererblich.

Wir definieren eine charakteristische Untergruppe:

$\mathfrak{enr}\,G =$ *Erzeugnis aller* $\mathfrak{enr}$*-Subnormalteiler der Gruppe* G.

Es gilt der

ZUSATZ 4.5: (a) $\mathfrak{enr}\,G$ *ist eine* $\mathfrak{enr}$*-Gruppe.*

(b) 1 *ist der einzige* $\mathfrak{enr}$*-Subnormalteiler von* $G/\mathfrak{enr}\,G$.

(c) $\mathfrak{enr}\,[G/\mathfrak{enr}\,G] = 1$.

(d) $\mathfrak{enr}\,S \subseteq \mathfrak{enr}\,G$ *für jeden Subnormalteiler S von G.*

Beweis: $\mathfrak{enr}\,G$ ist sicherlich das Erzeugnis seiner $\mathfrak{enr}$-Subnormalteiler, wegen Satz 4.1, (2) also eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe. Es gilt (a).

Ist $S/\mathfrak{enr}\,G$ ein $\mathfrak{enr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{enr}\,G$, so ist S ein Subnormalteiler von G und eine Erweiterung der $\mathfrak{enr}$-Gruppe $\mathfrak{enr}\,G$ durch die $\mathfrak{enr}$-Gruppe $S/\mathfrak{enr}\,G$. Wegen Zusatz 4.3 ist S ein $\mathfrak{enr}$-Subnormalteiler von G, so dass $S \subseteq \mathfrak{enr}\,G$ und $S/\mathfrak{enr}\,G = 1$ ist. Es gilt (b) und (c) folgt unmittelbar aus (b).

Ist S ein Subnormalteiler von G, so ist $\mathfrak{enr}\,S$ wegen (a) ein $\mathfrak{enr}$-Subnormalteiler von G, so dass $\mathfrak{enr}\,S \subseteq \mathfrak{enr}\,G$ aus unserer Definition folgt.

Bemerkung 4.6: Aus dem in Bemerkung 4.4 angegebenen Beispiel folgt, dass $S \cap \mathfrak{enr}\,G \subseteq \mathfrak{enr}\,S$ nicht für alle Normalteiler S von G zu gelten braucht.

Bemerkung 4.7: Ist F eine nicht abelsche, freie Gruppe, so ist nach einem Satz von F. Levi $1 = \bigcap_{i=1}^{\infty} F^{(i)}$; vergl. etwa Specht [p. 211, Beispiel 1]. Nun sind alle $F/F^{(i)}$ auflösbare Gruppen und also insbesondere $\mathfrak{enr}$-Gruppen [und mehr], wie etwa aus Satz 4.1, (3) folgt. Aber F selbst ist keine $\mathfrak{enr}$-Gruppe, da einfache, endliche, nichtabelsche Gruppen epimorphe Bilder von F sind und derartige Gruppen keine $\mathfrak{nr}$-Gruppen sind [Lemma 1.9].

§ 5. Die $\mathfrak{fnr}$-Gruppen.

Diese Gruppenklasse wird durch folgende Eigenschaft charakterisiert.

$\mathfrak{fnr}$: *Jeder Faktor von G ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

Es ist klar, dass $\mathfrak{fnr}$ eine faktorenvererbliche Unterklasse sowohl von $\mathfrak{unr}$ als auch von $\mathfrak{enr}$ ist. Da $\mathfrak{unr}$ wegen Bemerkung 3.2 nicht epimorphismenvererblich und $\mathfrak{enr}$ wegen Bemerkung 4.4 nicht untergruppenvererblich ist, ist $\mathfrak{fnr}$ eine echte Unterklasse sowohl von $\mathfrak{unr}$ als auch von $\mathfrak{enr}$.

Wir beginnen damit, einige mit $\mathfrak{fnr}$ zusammenhängende Kriterien dafür abzuleiten, dass eine Gruppe artinsch und auflösbar ist.

Hauptsatz 5.0 : *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent :*

(I) *G ist artinsch und auflösbar.*

(II)
- (A) *G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*
- (B) *Abelsche Untergruppen von G sind artinsch.*
- (C) *Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G und 1 der einzige artinsche Subnormalteiler von H, so gibt es einen Subnormalteiler $S \neq 1$ von H, dessen endlich erzeugbare Untergruppen der Minimalbedingung für Normalteiler genügen.*

(III)
- (A) *Abelsche Untergruppen von G sind artinsch.*
- (B) *Ist U eine artinsche und auflösbare Untergruppe von G mit $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$, so gibt es unter den von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren Untergruppen eine minimale.*
- (C) *Jeder minimale Normalteiler eines Faktors von G besitzt ein einfaches epimorphes Bild mit maximaler Untergruppe und der Eigenschaft $\mathfrak{nr}$.*

Beweis : Ist zunächst G artinsch und auflösbar, so ist auch jeder Faktor von G artinsch und auflösbar, wegen Hauptsatz 3.11 also eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so dass G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Nun ist es klar, dass aus (I) die Bedingungen (II) und (III.A) folgen. Ist weiter U eine Untergruppe von G mit $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$, so erinnern wir uns daran, dass G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist und es also Untergruppen X von G gibt, die von U normalisiert werden und mit U nicht vergleichbar sind. Da G artinsch ist, gibt es unter diesen Untergruppen X minimale. Ist schliesslich M ein minimaler Normalteiler eines Faktors von G, so ist M eine charakteristisch einfache, artinsche und auflösbare Gruppe. Man überzeugt sich sofort davon, dass M abelsch und also sogar eine [endliche] elementar abelsche p-Gruppe ist ; und nun ist es klar, dass auch (III) aus (I) folgt.

Gilt (II), so folgern wir aus Satz 2.6, dass die Bedingung (IV) des Hauptsatzes 3.11 gilt und dass also G artinsch und auflösbar ist.

Wir nehmen schliesslich die Gültigkeit von (III) an. Ist M ein minimaler Normalteiler eines Faktors von G, so ist M charakteristisch einfach. Aus (III.C) folgt die Existenz eines einfachen epimorphen Bildes B von M mit maximaler Untergruppe und der Eigenschaft $\mathfrak{nr}$. Anwendung von Lemma 1.9 zeigt die Kommutativität von B. Also ist $M' \subset M$; und aus der charakteristischen Einfachheit von M folgt $M' = 1$. Folglich ist M eine charakteristisch einfache, abelsche Gruppe mit maximaler Untergruppe. Da jede maximale Untergruppe einer abelschen Untergruppe Primzahlindex hat, folgt, dass M eine elementar abelsche Primärgruppe ist. Wir haben gezeigt:

(1) Minimale Normalteiler von Faktoren von G sind elementar abelsche Primärgruppen.

Ist U eine artinsche Untergruppe von G, so besitzt jedes von 1 verschiedene, epimorphe Bild von U einen minimalen Normalteiler, der wegen (1) abelsch ist. Also ist U artinsch und hyperabelsch und aus Baer [3; p. 359/360, Hauptsatz 8.15, **A**] folgt die Auflösbarkeit von U. Wir haben gezeigt:

(2) Artinsche Untergruppen von G sind auflösbar.

Ist A eine auflösbare Untergruppe von G, so ist wegen (III.A) jede abelsche Untergruppe von A artinsch und A ist wegen Baer [3; p. 359/360, Hauptsatz 8.15, **A**] artinsch. Wir haben gezeigt:

(3') Auflösbare Untergruppen von G sind artinsch.

Ist weiter E eine endlich erzeugbare, auflösbare Untergruppe von G, so ist E wegen (3') artinsch und also wegen Baer [2; p. 18, Lemma 3.3] endlich. Wir haben gezeigt:

(3'') Endlich erzeugbare, auflösbare Untergruppen von G sind endlich.

Sei U eine Untergruppe von G, deren endlich erzeugbare Untergruppen auflösbar sind. Aus (3'') folgt, dass die endlich erzeugbaren Untergruppen von U endlich und auflösbar sind. Aus (III.A) folgern wir, dass die abelschen Untergruppen von U artinsch sind. Anwendung eines schönen Satzes von Tschernikow [p. 128, Theorema 3] ergibt, dass U artinsch und wegen (2) also auflösbar ist. Damit haben wir gezeigt:

(3) Lokal auflösbare Untergruppen von G sind artinsch und auflösbar.

Aus dem Maximumprinzip der Mengenlehre ergibt sich die Existenz einer maximalen, lokal auflösbaren Untergruppe M von G. Wegen (3) ist M artinsch und auflösbar. Wäre G nicht artinsch und auflösbar, so wäre $M \subset G$. Wird M von g in G normalisiert, so ist M ein Normalteiler von $\{M, g\}$ mit zyklischer Faktorgruppe $\{M, g\}/M$. Hieraus folgt die Auflösbarkeit von $\{M, g\}$ und aus der Maximalität von M folgt $M = \{M, g\}$. Damit haben wir $M = \mathfrak{n}_G M \subset G$ gezeigt; und aus (III.B) folgt die Existenz einer Untergruppe W von G, die unter den von M normalisierten, mit M nicht vergleichbaren Untergruppen minimal ist. Dann ist W ein Normalteiler von $V = WM$. Ist X ein Normalteiler von V mit $X \subset W$, so wird X von M normalisiert, enthält aber M ebensowenig wie W. Aus der Minimalität von W ergibt sich $X \subseteq M$. Das Produkt W^* aller Normalteiler X von V mit $X \subset W$ ist also ein in M enthaltener Normalteiler von V, so dass W/W^* ein minimaler Normalteiler von V/W^* ist. Anwendung von (1) zeigt, dass W/W^* eine elementar abelsche Primärgruppe ist. Als Untergruppe von M ist W^* auflösbar, woraus auch die Auflösbarkeit von W folgt. Weiter ist $V/W \cong M/(M \cap W)$ mit M auflösbar, woraus die Auflösbarkeit von V folgt. Da M und W miteinander nicht vergleichbar sind, ist $M \subset V$; und dies widerspricht der Maximalität von M unter den lokal auflösbaren Gruppen. Aus diesem Widerspruch folgt, dass G artinsch und auflösbar ist: (I) folgt aus (III).

LEMMA 5.1: $\mathfrak{fnr}$ *ist faktoren- und erweiterungsvererblich.*

BEWEIS: Ist N ein $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler von G mit $\mathfrak{fnr}$-Faktorgruppe G/N, so ist jeder Faktor F von G Erweiterung eines Faktors von N durch einen Faktor von G/N. Es folgt, dass F Erweiterung einer $\mathfrak{nr}$-Gruppe durch eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe und also wegen Zusatz 1.6, (c) selbst eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Folglich ist G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe: $\mathfrak{fnr}$ ist erweiterungsvererblich.

SATZ 5.2: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

(2) *Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{fnr}$-Subnormalteiler.*

(3) *G ist das Erzeugnis seiner $\mathfrak{fnr}$-Subnormalteiler.*

(4) *Jeder von 1 verschiedene Faktor von G besitzt ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild mit der Eigenschaft $\mathfrak{nr}$.*

Wir schicken dem Beweise dieses Satzes die Beweise einiger als Hilfssätze formulierter Spezialfälle voraus.

(5.2.1) *Besitzt jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler, so ist G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

BEWEIS: Unsere Voraussetzung besagt, dass G eine Hyper-$\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Mit $\mathfrak{fnr}$ ist auch Hyper-$\mathfrak{fnr}$ faktorenvererblich; vergl. Baer [2; p. 17, Lemma 3.1] Ist also F ein Faktor von G, so besitzt jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von F einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler, der erst recht ein $\mathfrak{nr}$-Normalteiler ist. Anwendung von Satz 4.1 zeigt, dass F eine $\mathfrak{enr}$-Gruppe und a fortiori eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Folglich ist G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.

(5.2.2) *Produkte von $\mathfrak{fnr}$-Normalteilern sind $\mathfrak{fnr}$-Gruppen.*

BEWEIS: Sei G das Produkt seiner $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler. Ist $E \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so ist auch E das Produkt seiner $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler. Folglich gibt es wenigstens einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler von E. Anwendung von (5.2.1) zeigt, dass G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist.

Es ist zweckmässig, schon jetzt die folgende charakteristische Untergruppe einzuführen:

$$\mathfrak{fnr}G = \textit{Produkt aller } \mathfrak{fnr}\textit{-Normalteiler von } G.$$

Diese charakteristische Untergruppe wird uns auch über den Beweis von Satz 5.2 hinaus interessieren.

(5.2.3) *$\mathfrak{fnr}G$ ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

Dies folgt sofort aus (5.2.2).

(5.2.4) *$\mathfrak{fnr}S \subseteq \mathfrak{fnr}G$ für jeden Subnormalteiler S von G.*

BEWEIS: Ist X ein Normalteiler von Y, so ist die charakteristische Untergruppe $\mathfrak{fnr}X$ von X wegen (5.2.3) ein $\mathfrak{fnr}$-Normalteiler von Y. Also ergibt sich

$$\mathfrak{fnr}\, X \subseteq \mathfrak{fnr}\, Y$$

aus der Definition der charakteristischen Untergruppe $\mathfrak{fnr}Y$; und hieraus folgt (5.2.4) durch eine naheliegende vollständige Induktion.

(5.2.5) $\mathfrak{fnr}G$ *ist das Erzeugnis aller* $\mathfrak{fnr}$-*Subnormalteiler von* G.

Beweis: Ist S ein $\mathfrak{fnr}$-Subnormalteiler von G, so folgt

$$S = \mathfrak{fnr}\, S \subseteq \mathfrak{fnr}\, G$$

aus (5.2.4); und hieraus folgt unsere Behauptung.

(5.2.6) 1 *ist der einzige* $\mathfrak{fnr}$-*Subnormalteiler von* $G/\mathfrak{fnr}\, G$.

Beweis: Jeder $\mathfrak{fnr}$-Subnormalteiler von $G/\mathfrak{fnr}G$ hat die Form $S/\mathfrak{fnr}G$, wobei S ein geeigneter Subnormalteiler von G ist. Wegen (5.2.3) ist S eine Erweiterung der $\mathfrak{fnr}$-Gruppe $\mathfrak{fnr}G$ durch die $\mathfrak{fnr}$-Gruppe $S/\mathfrak{fnr}G$. Anwendung von Lemma 5.1 zeigt, dass S ein $\mathfrak{fnr}$-Subnormalteiler von G ist, so dass $S \subseteq \mathfrak{fnr}G$ aus (5.2.5) folgt. Also wird $S/\mathfrak{fnr}G = 1$, wie behauptet.

Beweis *von Satz* 5.2: Es ist klar, dass (2) aus (1) folgt; und es ergibt sich aus (5.2.3) und (5.2.6), dass (1) aus (2) folgt. Weiter ist es klar, dass (3) aus (1) folgt; und es ergibt sich aus (5.2.3) und (5.2.5), dass (1) aus (3) folgt.

Es ist klar, dass (4) aus (1) folgt. Wir nehmen die Gültigkeit von (4) an und betrachten einen Faktor F von G. Ist $\mathfrak{nr}_* F$ der Durchschnitt aller Normalteiler X von F mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe F/X, so ist $\mathfrak{nr}_* F$ eine charakteristische Untergruppe mit $\mathfrak{nr}$-Faktorgruppe $F/\mathfrak{nr}_* F$ [Zusatz 1.6, (b)]. Wäre der Faktor $\mathfrak{nr}_* F$ von G von 1 verschieden, so folgte $\mathfrak{nr}_* [\mathfrak{nr}_* F] \subset \mathfrak{nr}_* F$ aus (4) im Widerspruch zu Zusatz 1.6, (e). Also ist $\mathfrak{nr}_* F = 1$ und $F = F/\mathfrak{nr}_* F$ ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe: (1) folgt aus (4).

Zusatz 5.3: $\mathfrak{fnr}\, [G/\mathfrak{fnr}\, G] = 1$.

Folgt sofort aus (5.2.6).

Bemerkung 5.4: Das in Bemerkung 4.7 konstruierte Beispiel zeigt, dass die Eigenschaft $\mathfrak{fnr}$ nicht residuell ist.

Diskussion 5.5 *der Bedingungen des Satzes* 5.2:

A. Der mit (5.2.1) identische Spezialfall von (2) lässt sich durch die Eigenschaftengleichung

$$\mathfrak{fnr} = \text{hyper} \cdot \mathfrak{fnr}$$

ausdrücken. Die wegen Satz 4.1, (3) naheliegende Vermutung

$$\mathfrak{fnr} = \text{hyper} \cdot \mathfrak{unr}$$

haben wir weder beweisen noch widerlegen können.

B. Ob es genügt, (3) durch die schwächere Bedingung:

G ist das Erzeugnis seiner von oben erreichbaren $\mathfrak{fnr}$-Untergruppen

zu ersetzen, haben wir nicht entscheiden können; vergl. Bemerkung 4.2, **C**.

C. Es genügt nicht, (4) durch die folgende zu (2) duale Bedingung zu ersetzen:

(4*) Jede von 1 verschiedene Untergruppe von G besitzt ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild mit der Eigenschaft $\mathfrak{fnr}$.

Ist nämlich $U \neq 1$ eine Untergruppe der freien Gruppe G, so ist bekanntlich $U/U' \neq 1$. Also genügen alle freien Gruppen der Bedingung (4*), sind aber keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppen, da ja freie Gruppen eine Fülle epimorpher Bilder besitzen, die keine $\mathfrak{nr}$-Gruppen sind.

Es genügt auch nicht, (4) durch die folgende Bedingung zu ersetzen:

(4**) Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild besitzt ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild mit der Eigenschaft $\mathfrak{fnr}$.

Dies macht man sich etwa am Beispiel der symmetrischen Gruppen [des endlichen Grades ≥ 5] klar.

Um zu zeigen, wie umfassend die Klasse der $\mathfrak{fnr}$-Gruppen ist, wollen wir einige Familien von Unterklassen dieser Klasse konstruieren. Wir beginnen mit einer ganz allgemeinen Konstruktion.

Ist $\mathfrak{e}$ irgendeine gruppentheoretische Eigenschaft, so wird die Eigenschaft $\mathfrak{e}^\sigma$ für jede Ordinalzahl σ durch vollständige [transfinite] Induktion folgendermassen definiert:

$$\mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e},$$

die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{E}^{\sigma}$-*Gruppe* mit $0 < \sigma$, wenn jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-Normalteiler mit $\sigma' < \sigma$ besitzt.

Sind σ' und σ'' Ordinalzahlen mit $0 \leq \sigma' < \sigma''$, so sieht man sofort ein, dass jede $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-Gruppe auch eine $\mathfrak{E}^{\sigma''}$-Gruppe ist. Hieraus folgt etwa, dass die Gruppe G dann und nur dann eine $\mathfrak{E}^{\sigma+1}$-Gruppe ist, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Normalteiler $N \neq 1$ besitzt; mit anderen Worten:

$$\mathfrak{E}^{\sigma+1} = \text{hyper-}\mathfrak{E}^{\sigma}.$$

Dies legt es nahe, die $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppen auch als *Hyper*$^{\sigma}$-$\mathfrak{E}$-*Gruppen* zu bezeichnen. Weiter bilden die Klassen $\mathfrak{E}^{\sigma}$ eine mit σ wachsende Klassenfolge. Wir bilden die Vereinigungsklasse $\mathfrak{E}^{*}$: eine Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{E}^{*}$-*Gruppe*, wenn G für wenigstens ein σ eine $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppe ist. Man sieht sofort, dass

$$\mathfrak{E}^{*} = \text{hyper-}\mathfrak{E}^{*}$$

ist.

LEMMA 5.6: *Ist die gruppentheoretische Eigenschaft* $\mathfrak{E}$ *faktorenvererblich, so gilt:*

(a) *Ist* $F \neq 1$ *ein Faktor einer* $\mathfrak{E}^{\sigma}$-*Gruppe mit* $0 < \sigma$, *so gibt es einen* $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-*Normalteiler* $N \neq 1$ *von* F *mit* $\sigma' < \sigma$.

(b) *Jede der Eigenschaften* $\mathfrak{E}^{\sigma}$ *ist faktorenvererblich.*

(c) *Produkte von* $\mathfrak{E}^{\sigma}$-*Normalteilern sind* $\mathfrak{E}^{\sigma+1}$-*Gruppen.*

(d) $\mathfrak{E}$-*Subnormalteiler sind in* $\mathfrak{E}^{n}$-*Normalteilern mit* $n < \omega$ *enthalten.*

BEWEIS: Dass $\mathfrak{E}^{0} = \mathfrak{E}$ faktorenvererblich ist, ist der Inhalt unserer Voraussetzung. Wir machen also die Induktionsannahme, dass $0 < \sigma$ und $\mathfrak{E}^{\sigma'}$ für jedes $\sigma' < \sigma$ faktorenvererblich ist.

Ist $F \neq 1$ ein Faktor der $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppe G, so gibt es eine Untergruppe U von G und einen Normalteiler V von U mit $U/V \cong F$. Die Menge $\mathfrak{M}$ der $U \cap X \subseteq V$ erfüllenden Normalteiler X von G ist nicht leer; sie enthält etwa $X = 1$. Weiter enthält $\mathfrak{M}$ mit irgendeinem « Turm » auch dessen Vereinigungsmenge. Wir können also das Maximumprinzip der Mengenlehre auf $\mathfrak{M}$ anwenden: es gibt einen maximalen Normalteiler M in $\mathfrak{M}$. Aus

$$U \cap M \subseteq V \subset U$$

ergibt sich insbesondere $M \subset G$. Das epimorphe Bild $G/M \neq 1$ der $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppe G besitzt einen $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-Normalteiler $L \neq 1$ mit $\sigma' < \sigma$. Dann gibt es einen M enthaltenden Normalteiler K von G mit $L = K/M$; und aus $L \neq 1$ folgt $M \subset K$. Aus der Maximalität von M in $\mathfrak{M}$ folgt, dass K nicht in $\mathfrak{M}$ liegt: $U \cap K \not\subseteq V$. Also ist $V(U \cap K)/V$ ein von 1 verschiedener Normalteiler von U/V. Weiter gilt

$$J = V(U \cap K)/V \cong (U \cap K)/(V \cap K)$$

und $U \cap M \subseteq V \cap K$. Hieraus folgt, dass J ein Faktor [sogar ein epimorphes Bild] von $(U \cap K)/(U \cap M)$ ist. Nun ist aber

$$(U \cap K)/(U \cap M) \cong M(U \cap K)/M \subseteq K/M = L.$$

Damit haben wir gezeigt, dass J ein Faktor der $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-Gruppe L ist. Aus $\sigma' < \sigma$ und unserer Induktionsvoraussetzung folgt nun, dass J ein von 1 verschiedener $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-Normalteiler von U/V ist. Damit haben wir gezeigt:

(+) Jeder von 1 verschiedene Faktor einer $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppe besitzt einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{E}^{\sigma'}$-Normalteiler mit $\sigma' < \sigma$.

Sei wieder F ein Faktor der $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppe G. Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von F ist ein von 1 verschiedener Faktor von G, besitzt also wegen (+) einen von 1 verschiedenen σ'-Normalteiler mit $\sigma' < \sigma$. Es folgt, dass F eine $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Gruppe ist. Damit haben wir die Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{E}^{\sigma}$ dargetan. Dies beendet den induktiven Beweis von (b); und unter Benutzung von (+) folgt hieraus auch (a).

Wir betrachten nun eine Gruppe G, die das Produkt ihrer $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Normalteiler ist. Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so folgt aus (b), dass auch H das Produkt seiner $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Normalteiler ist. Wegen $H \neq 1$ ist wenigstens ein $\mathfrak{E}^{\sigma}$-Normalteiler von H von 1 verschieden: G ist eine $\mathfrak{E}^{\sigma+1}$-Gruppe. Damit ist auch (c) bewiesen.

Ist E ein $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler der Gruppe G, so gibt es nach Baer [0; p, 403, Lemma 1.2 und p. 404, Satz 1] eine endliche Kette von Untergruppen $E(i)$ von G mit

$$E(0) = E,$$

$E(i)$ ist ein Normalteiler von $E(i+1)$ und $E(i+1)$ ist ein Produkt von zu $E(i)$ in $E(i+2)$ konjugierten Normalteilern von $E(i+1)$,

$E(n) = \{E^G\}$ und $E(n)$ ist ein Produkt von zu $E(n-1)$ in G konjugierten Normalteilern von $E(n)$.

Nach Voraussetzung ist $E(0) = E$ eine $\mathfrak{C}$-Gruppe; und es ist $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}^0$. Haben wir schon gezeigt, dass $E(i)$ eine $\mathfrak{C}^i$-Gruppe ist, so folgt aus (c), dass $E(i+1)$ eine $\mathfrak{C}^{i+1}$-Gruppe ist. Vollständige Induktion ergibt, dass $\{E^G\} = E(n)$ eine $\mathfrak{C}^n$-Gruppe ist [mit $n < \omega$]. Damit haben wir auch (d) bewiesen.

Satz 5.7: *Ist die gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{C}$ faktorenvererblich, so sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G äquivalent:*

(1) *Jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G besitzt einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler.*

(2) *G ist eine $\mathfrak{C}^\omega$-Gruppe.*

(3) *G ist eine $\mathfrak{C}^*$-Gruppe.*

Beweis: Aus (1) und Lemma 5.6, (d) folgt, dass jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild von G einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{C}^n$-Normalteiler mit $n < \omega$ besitzt, dass also G eine $\mathfrak{C}^\omega$-Gruppe ist: aus (1) folgt (2).

Es ist klar, dass (3) aus (2) folgt. Um schliesslich (1) aus (3) herzuleiten, beweisen wir zunächst durch vollständige [transfinite] Induktion bzgl. σ die folgende Aussage:

(0.σ) Jede von 1 verschiedene $\mathfrak{C}^\sigma$-Gruppe enthält einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{C}$-Subnormalteiler.

Wegen $\mathfrak{C}^0 = \mathfrak{C}$ ist (0.0) trivialerweise richtig. Wir können also annehmen, dass $0 < \sigma$ ist und dass (0.σ') bereits für jedes $\sigma' < \sigma$ bewiesen ist. Ist dann $X \neq 1$ eine $\mathfrak{C}^\sigma$-Gruppe, so gibt es einen $\mathfrak{C}^{\sigma'}$-Normalteiter $Y \neq 1$ von X mit $\sigma' < \sigma$. Aus (0.σ') folgt die Existenz eines $\mathfrak{E}$-Subnormalteilers $E \neq 1$ von Y, der dann natürlich auch ein $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler von X ist. Damit ist auch $(0.\sigma)$ bewiesen und der induktive Beweis ausgeführt.

Ist schliesslich G eine $\mathfrak{E}^*$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{E}^\sigma$-Gruppe für geeignetes σ. Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so ist H ebenfalls eine $\mathfrak{E}^\sigma$-Gruppe, besitzt also wegen $(0.\sigma)$ einen $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler $S \neq 1$. Damit haben wir (1) aus (3) hergeleitet, die Äquivalenz von (1)-(3) bewiesen.

Zusatz 5.8: *Ist die gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{E}$ faktorenvererblich, so gilt:*

(a) *$\mathfrak{E}^*$ ist faktorenvererblich und $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}^{**}$.*

(b) *Erweiterungen von $\mathfrak{E}^*$-Gruppen durch $\mathfrak{E}^*$-Gruppen sind $\mathfrak{E}^*$-Gruppen.*

(c) *Erzeugnisse von $\mathfrak{E}^*$-Subnormalteilern sind $\mathfrak{E}^*$-Gruppen.*

(d) *Sind überdies Produkte beliebiger Mengen von $\mathfrak{E}$-Normalteilern wieder $\mathfrak{E}$-Gruppen, so ist $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}^1$.*

Beweis: (a) folgt sofort aus Lemma 5.6, (b) und der in Satz 5.7 enthaltenen Eigenschaftengleichung $\mathfrak{E}^* = \mathfrak{E}^\omega$.

Ist die Gruppe G eine Erweiterung einer $\mathfrak{E}^*$-Gruppe durch eine $\mathfrak{E}^*$-Gruppe, so folgt aus (a), dass das epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen $\mathfrak{E}^*$-Normalteiler N mit $\mathfrak{E}^*$-Faktorgruppe H/N besitzt. Ist erstens $N = 1$, so ist $H = H/N$ eine $\mathfrak{E}^*$-Gruppe und besitzt wegen Satz 5.7 einen $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler $S \neq 1$. Ist zweitens $N \neq 1$, so besitzt die $\mathfrak{E}^*$-Gruppe N wegen Satz 5.7 einen $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler $S \neq 1$, der natürlich auch ein Subnormalteiler von H ist. Anwendung von Satz 5.7 zeigt, dass G eine $\mathfrak{E}^*$-Gruppe ist. Damit haben wir (b) bewiesen.

Ist die Gruppe G das Erzeugnis ihrer $\mathfrak{E}^*$-Subnormalteiler, so ist auch jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G wegen (a) das Erzeugnis seiner $\mathfrak{E}^*$-Subnormalteiler. Insbesondere besitzt H einen $\mathfrak{E}^*$-Subnormalteiler $S \neq 1$; und dieser enthält wegen Satz 5.7 einen $\mathfrak{E}$-Subnormalteiler $E \neq 1$. Natürlich ist E ein Subnormalteiler von H. Anwendung von Satz 5.7 zeigt, dass G eine $\mathfrak{E}^*$-Gruppe ist: (c) ist bewiesen.

Um (d) zu beweisen, machen wir die Zusatzannahme, dass jedes Produkt von $\mathfrak{E}$-Normalteilern wieder eine $\mathfrak{E}$-Gruppe ist. Wir setzen dann

$\mathfrak{E}G =$ Produkt aller $\mathfrak{e}$-Normalteiler der Gruppe G.

Aus unserer Zusatzvoraussetzung folgt dann, dass $\mathfrak{E}G$ stets eine charakteristische $\mathfrak{e}$-Untergruppe von G ist.

Ist G eine $\mathfrak{e}^2$-Gruppe und $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so gibt es einen $\mathfrak{e}^1$-Normalteiler $N \neq 1$ von H. Da N einen von 1 verschiedenen $\mathfrak{e}$-Normalteiler besitzt [wegen $\mathfrak{e} = \mathfrak{e}^0$], ist $\mathfrak{E}N \neq 1$ als charakteristische Untergruppe eines Normalteilers ein $\mathfrak{e}$-Normalteiler von H. Es folgt, dass G eine $\mathfrak{e}^1$-Gruppe ist: $\mathfrak{e}^2 = \mathfrak{e}^1$. Hieraus folgt sofort $\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e}^1$.

Ist $\mathfrak{x}$ irgendeine gruppentheoretische Eigenschaft, so sei

$\mathfrak{s}\mathfrak{x}\, G =$ *Kompositum aller* $\mathfrak{x}$-*Subnormalteiler von* G.

Dies ist selbstverständlich eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe von G.

Zusatz 5.9: *Ist die gruppentheoretische Eigenschaft* $\mathfrak{e}$ *faktorenvererblich, so gilt:*

(a) $\mathfrak{s}\mathfrak{e}G$ *und* $\mathfrak{s}\mathfrak{e}^*G$ *sind charakteristische* $\mathfrak{e}^*$-*Untergruppen von* G.

(b) 1 *ist der einzige* $\mathfrak{e}^*$-*Subnormalteiler von* $G/\mathfrak{s}\mathfrak{e}^*G$.

(c) $\mathfrak{s}\mathfrak{e}\,[G/\mathfrak{s}\mathfrak{e}^*G] = \mathfrak{s}\mathfrak{e}^*\,[G/\mathfrak{s}\mathfrak{e}^*G] = 1$.

(d) *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe* G *sind äquivalent:*

(1) G *ist eine* $\mathfrak{e}^*$-*Gruppe.*

(2) $G = \mathfrak{s}\mathfrak{e}^*G$.

(3) $\mathfrak{s}\mathfrak{e}H \neq 1$ *für jedes epimorphe Bild* $H \neq 1$ *von* G.

Beweis: (a) folgt aus Zusatz 5.8, (c). Weiter ergibt sich (b) aus (a) und Zusatz 5.8, (b). Aussage (c) ergibt sich aus (a) und (b); und (d) folgert man schliesslich aus (a) und der Eigenschaftengleichung $\mathfrak{e}^* =$ hyper-$\mathfrak{e}^*$.

Um die folgenden Resultate bequem formulieren und anwenden zu können, erinnern wir an einige mehr oder weniger übliche Begriffsbildungen.

Eine *Normalteilerkette der Gruppe* G ist eine Menge $\mathfrak{K}$ von Normalteilern von G mit folgenden Eigenschaften:

(a) 1 und G gehören zu $\mathfrak{K}$.

(b) Irgendzwei Normalteiler aus $\mathfrak{K}$ sind vergleichbar.

(c) Ist $\mathfrak{T}$ eine Teilmenge von $\mathfrak{K}$, so gehören Durchschnitt und Erzeugnis [= Vereinigungsmenge] von $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{K}$.

Das Paar X, Y von Normalteilern aus $\mathfrak{K}$ *definiert einen Faktor von* $\mathfrak{K}$, wenn $X \subset Y$ ist und es keinen $X \subset N \subset Y$ erfüllenden Normalteiler N in $\mathfrak{K}$ gibt. Der von dem Paar X, Y definierte *Faktor* ist natürlich Y/X [und jede dazu isomorphe Gruppe].

Die Wichtigkeit dieser Begriffsbildungen für uns beruht auf folgender, Satz 1.5 verwandter Aussage.

LEMMA 5.10 : *Die Gruppe G ist [dann und nur dann] eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, wenn G eine Normalteilerkette mit $\mathfrak{nr}$-Faktoren besitzt.*

BEWEIS : Ist $\mathfrak{K}$ eine Normalteilerkette von G mit $\mathfrak{nr}$ Faktoren und U eine $U = \mathfrak{n}_G U \subset G$ erfüllende Untergruppe von G, so unterscheiden wir zwei Fälle.

FALL 1 : U ist nicht mit allen Normalteilern aus $\mathfrak{K}$ vergleichbar.

Dann gibt es einen Normalteiler V in $\mathfrak{K}$, der nicht mit U vergleichbar ist, und der natürlich von U normalisiert wird.

FALL 2 : U ist mit allen Normalteilern aus $\mathfrak{K}$ vergleichbar.

Dann bemerken wir zunächst, dass unsere über U gemachte Angabe nach sich zieht, dass U kein Normalteiler von G ist und also nicht zu $\mathfrak{K}$ gehört. Weiter ist der Durchschnitt D aller U enthaltenden Normalteiler aus $\mathfrak{K}$ ein wohlbestimmter, U enthaltender Normalteiler aus $\mathfrak{K}$; und ebenso ist das Erzeugnis E aller in U enthaltenen Normalteiler aus $\mathfrak{K}$ ein wohlbestimmter, in U enthaltener Normalteiler aus $\mathfrak{K}$. Da U nicht in $\mathfrak{K}$ liegt, gilt

$$E \subset U \subset D.$$

Ist X irgendein Normalteiler aus $\mathfrak{K}$, so folgt aus der Voraussetzung des Falles 2, dass X entweder U enthält oder in U enthalten ist, dass also entweder $D \subseteq X$ oder $X \subseteq E$ gilt. Es folgt, dass das Paar E, D einen Faktor von $\mathfrak{K}$ definiert, so dass D/E eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Da U/E eine echte normalisatorgleiche Untergruppe dieser $\mathfrak{nr}$-Gruppe D/E ist, gibt es eine von U/E normalisierte, mit U/E nicht vergleichbare Untergruppe von D/E; und hieraus folgt wieder die Existenz einer von U normalisierten, mit U nicht vergleichbaren Untergruppe V von G.

Damit ist der Beweis erbracht, dass G eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist.

Unter einer *Hauptreihe der Gruppe G* werde eine Normalteilerkette $\mathfrak{K}$ von G verstanden, die noch der weiteren Maximalitätsforderung genügt:

(d) Ist $\mathfrak{H}$ eine $\mathfrak{K}$ umfassende Normalteilerkette von G, so ist $\mathfrak{H} = \mathfrak{K}$.

Aus dem Maximumprinzip der Mengenlehre folgert man mühelos:

(5.11) *Jede Normalteilerkette von G ist in einer Hauptreihe von G enthalten.*

Da insbesondere $1, G$ eine Normalteilerkette von G ist, so ergibt sich aus (5.11) weiter:

(5.12) *Jede Gruppe besitzt eine Hauptreihe.*

Schliesslich wollen wir noch in Anpassung an die übliche Terminologie die Faktoren von Hauptreihen als *Hauptfaktoren* bezeichnen.

LEMMA 5.13: *Die Gruppe X ist dann und nur dann ein Hauptfaktor der Gruppe G, wenn sie einem minimalen Normalteiler eines epimorphen Bildes von G isomorph ist.*

BEWEIS: Ist erstens X einem minimalen Normalteiler eines epimorphen Bildes von G isomorph, so gibt es Normalteiler A, B von G mit $A \subset B$ und $X \cong B/A$ derart, dass zwischen A und B weiter kein Normalteiler von G liegt. Die Normalteilerkette $1, A, B, G$ von G ist in einer Hauptreihe $\mathfrak{H}$ von G enthalten [wegen (5.11)] und das Paar A, B definiert einen Faktor von $\mathfrak{H}$, so dass X ein Hauptfaktor von G ist. Ist umgekehrt X ein Hauptfaktor von G, so gibt es eine Hauptreihe $\mathfrak{K}$ von G und ein Paar L, J von Normalteilern aus $\mathfrak{K}$, das einen Faktor von $\mathfrak{K}$ definiert und $X \cong J/L$ erfüllt. Wäre J/L kein minimaler Normalteiler von G/L, so gäbe es einen Normalteiler W von G mit $L \subset W \subset J$; und durch Hinzufügen von W zu $\mathfrak{K}$ entstünde im Widerspruch zur Maximalität von $\mathfrak{K}$ eine umfassendere Normalteilerreihe.

SATZ 5.14: *Die folgenden Eigenschaften der faktorenvererblichen gruppentheoretischen Eigenschaft $\mathfrak{e}$ sind äquivalent:*

(1) *Jede $\mathfrak{e}^*$-Gruppe ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

(2) *Jede charakteristisch-einfache $\mathfrak{e}$-Gruppe ist eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe.*

(3) *Minimale Normalteiler von* $\mathfrak{e}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{nr}$*-Gruppen.*

(4) *Jede* $\mathfrak{e}$ *Gruppe besitzt eine Normalteilerkette mit* $\mathfrak{nr}$*-Faktoren.*

(5) $\mathfrak{e}$*-Gruppen sind* $\mathfrak{nr}$*-Gruppen.*

Beweis: Da jede $\mathfrak{e}$-Gruppe auch eine $\mathfrak{e}^*$-Gruppe ist [wegen der Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$ und Satz 5.7], folgt aus (1), dass $\mathfrak{e}$-Gruppen stets $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind. Hieraus folgt (2).

Da charakteristische Untergruppen von Normalteilern immer auch Normalteiler sind, sind minimale Normalteiler charakteristisch-einfach. Also folgt (3) aus (2).

Gilt (3), so sind wegen Lemma 5.13 alle Hauptfaktoren der $\mathfrak{e}$-Gruppe G auch $\mathfrak{nr}$-Gruppen. Wegen (5.12) gibt es Hauptreihen von G. Also folgt (4) aus (3).

Wegen Lemma 5.10 folgt (5) aus (4).

Wir nehmen schliesslich die Gültigkeit von (5) an und betrachten eine $\mathfrak{e}^*$-Gruppe G. Ist $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so folgt aus Satz 5.7 die Existenz eines $\mathfrak{e}$-Subnormalteilers $S \neq 1$ von H. Ist F ein Faktor von S, so ist auch F eine $\mathfrak{e}$-Gruppe [Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$]. Wegen (5) ist F eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe, so dass S eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Anwendung der Äquivalenz der Bedingungen (1), (2) des Satzes 5.2 zeigt, dass G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Damit haben wir (1) aus (5) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(5) bewiesen.

Ist $\mathfrak{e}$ irgendeine gruppentheoretische Eigenschaft, so wollen wir wie üblich unter $\mathfrak{le} =$ *lokal*-$\mathfrak{e}$ die folgendermassen definierte [abgeleitete] Eigenschaft verstehen:

$\mathfrak{le}$: *Die Gruppe G ist dann und nur dann eine* $\mathfrak{le}$*-Gruppe, wenn jede endlich erzeugbare Untergruppe von G eine* $\mathfrak{e}$*-Gruppe ist.*

Ist $\mathfrak{e}$, wie das im gegenwärtigen Zusammenhang stets der Fall sein wird, faktorenvererblich, so ist jede $\mathfrak{e}$-Gruppe auch eine $\mathfrak{le}$-Gruppe und $\mathfrak{le}$ ist ebenfalls faktorenvererblich.

Folgerung 5.15: *Ist* $\mathfrak{e}$ *eine faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft, besitzt jede* $\mathfrak{e}$*-Gruppe eine Normalteilerkette mit abelschen Faktoren, so besitzt jede* $\mathfrak{le}$*-Gruppe eine Hauptreihe mit abelschen Faktoren und jede* $(\mathfrak{le})^*$*-Gruppe ist eine* $\mathfrak{fnr}$*-Gruppe.*

Beweis: Ist E eine $\mathfrak{e}$-Gruppe, so gibt es nach Voraussetzung eine Normalteilerkette $\mathfrak{K}$ von E mit abelschen Faktoren. Wegen (5.11) ist $\mathfrak{K}$ in einer Hauptreihe $\mathfrak{H}$ von E enthalten. Jeder Faktor von $\mathfrak{H}$ ist ein Faktor eines Faktors von $\mathfrak{K}$ und also abelsch. Es folgt:

(+) Jede $\mathfrak{e}$-Gruppe besitzt eine Hauptreihe mit abelschen Faktoren.

Durch Anwendung eines Satzes von Mal'cev — vergl. Kurosh [II; p. 183, unten] — ergibt sich aus (+), dass auch jede $\mathfrak{le}$-Gruppe eine Hauptreihe mit abelschen Faktoren besitzt. Da abelsche Gruppen stets $\mathfrak{nr}$-Gruppen sind, wird Bedingung (4) des Satzes 5.14 von $\mathfrak{le}$ erfüllt. Da $\mathfrak{le}$ faktorenvererblich ist, folgt aus Satz 5.14, dass $(\mathfrak{le})^*$-Gruppen auch $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind.

Diskussion 5.16: **A.** Die umfassendste gruppentheoretische Eigenschaft, auf die wir die vorangehenden Resultate anwenden können, ist die durch folgende Bedingung definierte Eigenschaft

$\mathfrak{u}$: *Jeder Faktor von G besitzt eine Normalteilerkette mit abelschen Faktoren.*

Die Eigenschaft $\mathfrak{u}$ ist per definitionem faktorenvererblich. Die schwächere Eigenschaft:

G besitzt eine Normalteilerkette mit abelschen Faktoren

vererbt sich offenbar auf Untergruppen. Sie vererbt sich aber nicht auf epimorphe Bilder, wie das Beispiel der freien [nicht abelschen] Gruppen zeigt, deren Ableitungen ja eine Normalteilerkette mit abelschen Faktoren bilden, die aber viele epimorphe Bilder ohne derartige Ketten besitzen, etwa einfache Gruppen.

Ist $\mathfrak{K}$ eine Normalteilerkette von G mit abelschen Faktoren, so ist $\mathfrak{K}$ wegen (5.11) in einer Hauptreihe $\mathfrak{H}$ von G enthalten. Jeder Faktor von $\mathfrak{H}$ ist ein Faktor eines Faktors der Kette $\mathfrak{K}$ und also abelsch. Daraus folgt:

(**A**.1) Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{u}$-Gruppe, wenn jeder Faktor von G eine Hauptreihe mit abelschen Faktoren besitzt.

Aus Lemma 5.13 ergibt sich unter Hinzuziehung eines erst weiter unten zu beweisenden Resultats [Satz 5.17] die folgende Charakterisierung der $\mathfrak{u}$-Gruppen, die wir aber während der gegenwärtigen Diskussion nicht benutzen werden:

(**A**.1*) Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{u}$-Gruppe, wenn jeder minimale Normalteiler eines jeden Faktors von G abelsch ist.

Aus der Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{u}$ ergibt sich, dass jede $\mathfrak{u}$-Gruppe eine $\mathfrak{lu}$-Gruppe und $\mathfrak{lu}$ faktorenvererblich ist. Ist G eine $\mathfrak{lu}$-Gruppe, so ist jeder Faktor F von G eine $\mathfrak{lu}$-Gruppe. Jede endlich erzeugbare Untergruppe von F ist also eine $\mathfrak{u}$-Gruppe und besitzt wegen (**A**.1) eine Hauptreihe mit abelschen Faktoren. Anwendung eines Satzes von Mal'cev — vergl. Kurosh [II; p. 183, unten] — zeigt, dass F selbst eine Hauptreihe mit abelschen Faktoren besitzt. Also ist G eine $\mathfrak{u}$-Gruppe. Damit haben wir gezeigt:

(**A**.2) $$\mathfrak{u} = \mathfrak{lu}.$$

Aus dem vorhergehenden ersehen wir die Anwendbarkeit von Satz 5.14 auf $\mathfrak{u}$. Also gilt:

(**A**.3) $\mathfrak{u}^*$-*Gruppen sind* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppen.*

B. $\mathfrak{ap}$ = Anti-Perfektheit.

Die Zugehörigkeit einer Gruppe G zu dieser Klasse wird durch folgende Regel erklärt:

G ist eine $\mathfrak{ap}$-Gruppe, wenn $F' \subset F$ für jeden Faktor $F \neq 1$ von G gilt.

Natürlich ist $\mathfrak{ap}$ faktorenvererblich. Ist weiter H ein Hauptfaktor einer $\mathfrak{ap}$-Gruppe, so ist H wegen Lemma 5.13 minimaler Normalteiler einer $\mathfrak{ap}$-Gruppe und also eine charakteristisch-einfache $\mathfrak{ap}$-Gruppe. Es folgt $H' = 1$; und wir haben gezeigt:

$\mathfrak{ap}$-*Gruppen sind* $\mathfrak{u}$-*Gruppen.*

Hieraus und aus (**A**.2) ergibt sich, dass jede $\mathfrak{lap}$-Gruppe eine $\mathfrak{u}$-Gruppe ist; und Anwendung von (**A**.3) ergibt:

Jede $(\mathfrak{lap})^*$-*Gruppe ist eine* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppe.*

C. $\mathfrak{ha}$ = Hyperkommutativität [= Hyperabelschsein].

Dies ist die zur Anti-Perfektheit duale Eigenschaft, die durch die Regel von 1 verschiedene epimorphe Bilder besitzen von 1 verschiedene abelsche Normalteiler

definiert wird. Es ist wohlbekannt, dass diese Eigenschaft faktorenvererblich ist, und dass hyperabelsche Gruppen Normalteilerketten mit abelschen Faktoren besitzen. Also sind hyperabelsche Gruppen auch $\mathfrak{u}$-Gruppen. Es folgt aus (**A**.2) und (**A**.3):

($\mathfrak{lha}$)*-*Gruppen sind* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppen.*

D. $\mathfrak{s}$ = Auflösbarkeit.

Auflösbarkeit ist faktorenvererblich und jede auflösbare Gruppe ist sowohl eine hyperabelsche als auch eine anti-perfekte Gruppe. Es folgt:

($\mathfrak{ls}$)*-*Gruppen sind* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppen.*

Aus Satz 5.7 folgt, dass eine Gruppe G dann und nur dann eine ($\mathfrak{ls}$)*-Gruppe ist, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen lokal auflösbaren Subnormalteiler $S \neq 1$ besitzt.

E. $\mathfrak{p}$ = Polyzyklizität.

Dabei heisst eine Gruppe polyzyklisch, wenn sie gleichzeitig noethersch und auflösbar ist. Es ist $\mathfrak{p}$ eine faktorenvererbliche Unterklasse von $\mathfrak{s}$; und hieraus folgt:

(E.1) ($\mathfrak{lp}$)*-*Gruppen sind* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppen.*

Über diese Gruppenklasse lässt sich noch etwas mehr sagen. Wir definieren dazu das $\mathfrak{lp}$-Radikal einer Gruppe G durch die Formel:

$\mathfrak{LP}G$ = Produkt aller lokal polyzyklischen Normalteiler von G.

Dies ist eine wohlbestimmte charakteristische Untergruppe von G; und es gilt:

(E.2) $\mathfrak{LP}G$ *ist lokal polyzyklisch.*

Beweis: Wir betrachten zunächst zwei lokal polyzyklische Normalteiler A und B von G. Da A und B insbesondere lokal noethersch sind, ist auch AB lokal noethersch; vergl. Baer [6; p. 353, Folgerung 1]. Ist S eine endlich erzeugbare Untergruppe von AB, so ist also S gewiss noethersch. Weiter ist

$$S/(A \cap S) \cong AS/A \subseteq AB/A \cong B/(A \cap B),$$

so dass $S/(A \cap S)$ einer endlich erzeugbaren Untergruppe der mit B lokal polyzyklischen Gruppe $B/(A \cap B)$ isomorph und also insbesondere polyzyklisch ist. Als Untergruppe der noetherschen Gruppe S ist $A \cap S$ endlich erzeugbar; und als Untergruppe der lokal polyzyklischen Gruppe A ist $A \cap S$ also polyzyklisch. Als Erweiterung der polyzyklischen Gruppe $A \cap S$ durch die polyzyklische Gruppe $S/(A \cap S)$ ist S polyzyklisch. Damit ist die lokale Polyzyklizität von AB dargetan.

Aus dem eben bewiesenen folgt durch eine naheliegende vollständige Induktion, dass jedes Produkt endlich vieler lokal polyzyklischer Normalteiler lokal polyzyklisch ist. Ist schliesslich E eine endlich erzeugbare Untergruppe von $\mathfrak{L}\mathfrak{P}\, G$, so ist E bereits in einem Produkt endlich vieler lokal polyzyklischer Normalteiler von G enthalten. Dieses Produkt ist lokal polyzyklisch, so dass E polyzyklisch ist: $\mathfrak{L}\mathfrak{P}\, G$ ist lokal polyzyklisch.

(**E.3**) *$\mathfrak{L}\mathfrak{P}\, G$ ist das Kompositum aller lokal polyzyklischen Subnormalteiler von G.*

Beweis: Ist S ein lokal polyzyklischer Subnormalteiler von G, so gibt es eine endliche Untergruppenkette $S(i)$ von G mit

$$S = S(0),\ S(i) = S(i)^{S(i+1)} \subseteq S(i+1),\ S(n) = G.$$

Natürlich ist $S = \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(0)$. Weiter ist $\mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(i)$ als lokal polyzyklische, charakteristische Untergruppe des Normalteilers $S(i)$ von $S(i+1)$ ein lokal polyzyklischer Normalteiler von $S(i+1)$. Es folgt $\mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(i) \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(i+1)$; und hieraus ergibt sich

$$S = \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(0) \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(i) \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(i+1) \subseteq \dots \subseteq \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, S(n) = \mathfrak{L}\mathfrak{P}\, G,$$

woraus unsere Behauptung folgt.

(E.4) $(\mathfrak{l}\mathfrak{p})^* = (\mathfrak{l}\mathfrak{p})^1$.

Beweis: Wegen Satz 5.7 ist die Gruppe G dann und nur dann eine $(\mathfrak{l}\mathfrak{p})^*$-Gruppe, wenn jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen $\mathfrak{l}\mathfrak{p}$-Subnormalteiler $S \neq 1$ besitzt. Wegen (E. 2) und (E. 3) ist diese Bedingung gleichwertig mit der Eigenschaft:

(+) *$\mathfrak{L}\mathfrak{P}\, H \neq 1$ für jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G.*

Gruppen mit der Eigenschaft (+) sind wegen (**E.2**) aber $(\mathfrak{l}\mathfrak{p})^1$-Gruppen, woraus (**E**.4) folgt. [Nb.: Wir hätten (**E**.4) auch direkt aus (**E**.2) und Zusatz 5.8, (d) folgern können.]

F. $\mathfrak{n}$ = Nilpotenz [von endlicher Klasse]

Es ist $\mathfrak{n}$ eine faktorenvererbliche Unterklasse von $\mathfrak{s}$. Hieraus folgt:

$(\mathfrak{l}\mathfrak{n})^*$-*Gruppen sind* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppen.*

Weiter ist wohlbekannt, dass das Produkt $\mathfrak{LN}\,G$ aller lokal [von endlicher Klasse] nilpotenten Normalteiler von G eine lokal nilpotente, charakteristische Untergruppe von G ist: das Hirsch-Plotkinsche Radikal von G; und $\mathfrak{LN}\,G$ ist sogar das Kompositum aller lokal nilpotenten Subnormalteiler von G. Hieraus [und aus Zusatz 5.8, (d) bzw. Satz 5.7] ergibt sich noch $(\mathfrak{l}\mathfrak{n})^* = (\mathfrak{l}\mathfrak{n})^1$. Es folgt insbesondere, dass die Klasse $(\mathfrak{l}\mathfrak{n})^*$ sich mit der Klasse der radikalen Gruppen im Sinne von Plotkin deckt.

G. $\mathfrak{a}$ = Kommutativität [= Abelschsein].

Es ist $\mathfrak{a}$ eine faktorenvererbliche Unterklasse von $\mathfrak{n}$. Weiter ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{l}\mathfrak{a}$; und es folgt:

(**G**.1) $\mathfrak{a}^*$-*Gruppen sind* $\mathfrak{fnr}$-*Gruppen.*

Zur weiteren Analyse dieser Klasse sei an einige Begriffe erinnert: g ist *ein subnormales Element der Gruppe G*, wenn $\{g\}$ ein Subnormalteiler von G ist. Bekanntlich ist *die Menge $\mathfrak{SN}\,G$ aller subnormalen Elemente der Gruppe G* eine lokal nilpotente charakteristische Untergruppe von G; vergl. Baer [0; p. 418, Satz 2 & 3].

(**G**.2) *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{a}^*$-Gruppe.*

(2) *Jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G besitzt ein subnormales Element $t \neq 1$.*

(3) *$\mathfrak{SN}\,H \neq 1$ für jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G.*

Beweis: Ist G eine $\mathfrak{a}^*$-Gruppe und $H \neq 1$ ein epimorphes Bild von G, so folgt aus Satz 5.7 die Existenz eines abelschen Subnormalteilers $A \neq 1$ von H. Die von 1 verschiedenen Elemente aus A sind dann subnormale Elemente von H, womit wir (2) aus (1) hergeleitet haben. Dass (3) aus (2) folgt, ist in der Definition von $\mathfrak{SN}$ enthalten.

Gilt schliesslich (3), so zeigt die Definition von $\mathfrak{SN}$ die Existenz von 1 verschiedener subnormaler Elemente in von 1 verschiedenen epimorphen Bildern. Da subnormale Elemente zyklische Subnormalteiler erzeugen, folgt, dass jedes von 1 verschiedene epimorphe Bild einen von 1 verschiedenen abelschen Subnormalteiler besitzt; und aus Satz 5.7 folgt, dass G eine $\mathfrak{a}^*$-Gruppe ist, dass also (1)-(3) äquivalent sind.

Terminologische Bemerkung: Gruppen, deren sämtliche Elemente subnormale Elemente sind, werden auch als Nilgruppen bezeichnet. (G.2) legt es also nahe, die $\mathfrak{a}^*$-Gruppen auch *Hypernilgruppen* zu nennen.

$\mathfrak{a}^\sigma$ ist genau die Klasse der von Heribert Baur eingeführten σ-hyperabelschen Gruppen. Satz 5.7 besagt noch, dass

$$\mathfrak{a}^* = \mathfrak{a}^\omega$$

ist. Aus einem Satz von Kovàcs & Neumann ergibt sich für jede positive ganze Zahl n die Existenz einer perfekten n-hyperabelschen Gruppe $G(n)$, die keine $(n - 1)$-hyperabelsche Gruppe ist. Das direkte Produkt G dieser Gruppen $G(n)$ ist dann perfekt und ω-hyperabelsch, aber nicht n-hyperabelsch mit $n < \omega$. Dies zeigt, dass die Klassen $\mathfrak{a}^i$ eine streng monoton aufsteigende Klassenfolge bilden und dass die Klasse $\mathfrak{a}^*$ der Hypernilgruppen umfassender als die Vereinigungsklasse der Klassen $\mathfrak{a}^n$ mit $n < \omega$ ist.

Ob die übrigen hier diskutierten Gruppenklassen sämtlich verschieden sind, und wie sie sich zueinander verhalten, dürfte in den meisten Fällen noch unentschieden sein.

Der Ableitungsoperator $\mathfrak{d}^\sigma$ wird durch vollständige [transfinite] Induktion folgendermassen definiert: Ist $\mathfrak{e}$ irgendeine gruppentheoretische Eigenschaft, so sei

$$\mathfrak{d}^0 \mathfrak{e} = \mathfrak{e};$$

ist $0 < \sigma$, so ist G dann und nur dann eine $\mathfrak{d}^\sigma \mathfrak{e}$-Gruppe, wenn jeder Faktor F von G eine Normalteilerkette $\mathfrak{N}$ mit der Eigenschaft besitzt:

ist L ein Faktor von $\mathfrak{N}$, so ist L eine $\mathfrak{d}^\beta\mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$.

Aus der Definition folgt sofort, dass jede Eigenschaft $\mathfrak{d}^\bullet\mathfrak{e}$ mit

$0 < \sigma$ faktorenvererblich ist. Ist $\mathfrak{e}$ selbst faktorenvererblich, was wir im folgenden fast immer voraussetzen werden, so ist auch $\mathfrak{d}^0\mathfrak{e}$ faktorenvererblich und jede $\mathfrak{e}$-Gruppe ist eine $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e}$-Gruppe für jedes σ. Ist $0 < \sigma < \lambda$, so ist jede $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e}$-Gruppe eine $\mathfrak{d}^\lambda\mathfrak{e}$-Gruppe.

$\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e} =$ Vereinigungsklasse aller Klassen $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e}$.

Es ist also G dann und nur dann eine $\mathfrak{d}^*\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn es eine Ordinalzahl σ derart gibt, dass G eine $\mathfrak{d}_\sigma\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Es gibt dann auch eine eindeutig bestimmte minimale Ordinalzahl σG derart, dass G eine $\mathfrak{d}^{\sigma G}\mathfrak{e}$-Gruppe ist; und wir wollen $\sigma G = \sigma_{\mathfrak{e}} G$ die [$\mathfrak{e}$-] *Stufe der* $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}$*-Gruppe* G nennen.

Satz 5.17: *Ist $\mathfrak{e}$ faktorenvererblich, so sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G und der Ordinalzahl $\sigma \neq 0$ äquivalent:*

(1) *G ist ein $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e}$-Gruppe.*

(2) *Ist F ein Faktor von G, so gibt es eine Hauptreihe $\mathfrak{h}$ von F mit der Eigenschaft:*

Ist L ein Faktor von $\mathfrak{h}$, so ist L eine $\mathfrak{d}^\beta\,\mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$.

(3) *Ist H ein Hauptfaktor eines Faktors von G, so ist H eine $\mathfrak{d}^\beta\,\mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$.*

Beweis: Ist G eine $\mathfrak{d}^\sigma\,\mathfrak{e}$-Gruppe und F ein Faktor von G, so folgt aus $0 < \sigma$ die Existenz einer Normalteilerkette $\mathfrak{n}$ von F mit der Eigenschaft:

(+) Ist L ein Faktor von $\mathfrak{n}$, so ist L eine $\mathfrak{d}^\beta\,\mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$.

Aus (5.11) folgt, dass $\mathfrak{n}$ in einer Hauptreihe $\mathfrak{h}$ von G enthalten ist. Ist A ein Hauptfaktor von $\mathfrak{h}$, so gibt es Normalteiler J und K in $\mathfrak{h}$ mit den Eigenschaften:

(++) $J \subset K$, $K/J \cong A$, es gibt keinen Normalteiler X mit $J \subset X \subset K$ in $\mathfrak{h}$.

Das Produkt J^* aller in J enthaltenen Normalteiler aus $\mathfrak{n}$ ist ein in J enthaltener Normalteiler aus $\mathfrak{n}$; und der Durchschnitt K^* aller K enthaltenden Normalteiler aus $\mathfrak{n}$ ist ein K enthaltender Normalteiler aus $\mathfrak{n}$. Dann ist

(+++) $J^* \subset J \subset K \subseteq K^*$.

Wäre X ein Normalteiler aus $\mathfrak{n}$ mit $J^* \subset X \subset K^*$, so ist $X \not\subseteq J$ und $K \not\subseteq X$. Da aber X auch in der $\mathfrak{n}$ umfassenden Hauptreihe $\mathfrak{h}$ liegt, so folgt $J \subset X \subset K$ im Widerspruch zu (++). Also ist K^*/J^* ein Faktor von $\mathfrak{N}$; und es folgt aus (+), dass K^*/J^* eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$ ist. Da $\mathfrak{e}$ faktorenvererblich ist, ist auch $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$ faktorenvererblich. Wegen (+++) ist K/J ein Faktor von K^*/J^*. Wegen (++) ist also $A \cong K/J$ eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$. Damit haben wir (2) aus (1) hergeleitet.

Wir nehmen die Gültigkeit von (2) an und betrachten einen Hauptfaktor H eines Faktors F von G. Wegen Lemma 5.13 ist H einem minimalen Normalteiler M eines epimorphen Bildes B von F isomorph. Da B ebenfalls ein Faktor von G ist, so ergibt sich aus (2) die Existenz einer Hauptreihe $\mathfrak{h}$ von B mit der Eigenschaft:

(*) Ist L ein Faktor von $\mathfrak{h}$, so ist L eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$.

Es gibt Normalteiler X in $\mathfrak{h}$ mit $M \cap X = 1$ wie etwa $X = 1$. Das Produkt J aller dieser Normalteiler X aus $\mathfrak{h}$ gehört auch zu $\mathfrak{h}$; und da J sogar die Vereinigungsmenge dieser Normalteiler X mit $M \cap X = 1$ ist — $\mathfrak{h}$ ist ja durch Inklusion linear geordnet — so gilt $M \cap J = 1$. Wir bilden weiter den Durchschnitt K aller M enthaltenden Normalteiler aus $\mathfrak{h}$. Dann ist auch K ein M enthaltender Normalteiler aus $\mathfrak{h}$. Aus $M \cap J = 1 \subset M \subseteq K$ folgt zunächst $K \not\subseteq J$ und hieraus $J \subset K$, da J und K Glieder der Hauptreihe $\mathfrak{h}$ sind. Ist X ein Normalteiler aus $\mathfrak{h}$ mit $J \subset X$, so ist $M \cap X \neq 1$ und aus der Minimalität des Normalteilers M folgt $M = M \cap X \subseteq X$, so dass sogar $K \subseteq X$ ist. Also definiert das Paar J, K einen Hauptfaktor K/J von $\mathfrak{h}$, der wegen (*) eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$ ist. Weiter ist

$$M = M/(M \cap J) \cong JM/J \subseteq K/J$$

[es gilt sogar $K = MJ$], so dass M als Faktor der $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe K/J wegen der Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$ — wieder wird die Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$ benutzt — eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe ist. Wegen $H \cong M$ ist also auch H eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$; und damit haben wir (3) aus (2) hergeleitet.

Wir nehmen schliesslich die Gültigkeit von (3) an und betrachten einen Faktor F von G. Dieser besitzt wegen (5.12) eine Hauptreihe $\mathfrak{h}$. Ist L ein Faktor von $\mathfrak{h}$, so ist L ein Hauptfaktor des Faktors F von G und also wegen (3) eine $\mathfrak{d}^\beta \mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma$.

Vergleich mit unserer Definition von $\mathfrak{d}^\sigma\,\mathfrak{e}$ zeigt, dass G eine $\mathfrak{d}^\sigma\,\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Damit haben wir (1) aus (3) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(3) dargetan.

ZUSATZ 5.18: *Jede $\mathfrak{e}^\sigma$-Gruppe ist eine $\mathfrak{d}^\sigma\,\mathfrak{e}$-Gruppe und jede $\mathfrak{e}^*$-Gruppe ist eine $\mathfrak{d}^\omega\mathfrak{e}$-Gruppe.*

BEWEIS: Aus unseren Definitionen folgt zunächst

$$\mathfrak{e}^0 = \mathfrak{e} = \mathfrak{d}^0\,\mathfrak{e}.$$

Wir können also die Induktionsvoraussetzung machen, dass $0 < \sigma$ und jede $\mathfrak{e}^\lambda$-Gruppe mit $\lambda < \sigma$ eine $\mathfrak{d}^\lambda\,\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Ist nun G eine $\mathfrak{e}^\sigma$-Gruppe, so besitzt jedes epimorphe Bild $H \neq 1$ von G einen $\mathfrak{e}^\lambda$-Normalteiler $N \neq 1$ mit $\lambda < \sigma$. Hieraus folgt mühelos die Existenz einer Normalteilerkette $\mathfrak{K}$ von G, die wohlgeordnet aufsteigt und deren Faktoren $\mathfrak{e}^\lambda$-Gruppen mit $\lambda < \sigma$ sind. Nach Induktionsannahme sind die Faktoren von $\mathfrak{K}$ also auch $\mathfrak{d}^\lambda\,\mathfrak{e}$-Gruppen mit $\lambda < \sigma$, so dass G eine $\mathfrak{d}^\sigma\,\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Damit haben wir den induktiven Beweis unserer ersten Behauptung erbracht. Wegen Satz 5.7 ist $\mathfrak{e}^* = \mathfrak{e}^\omega$, woraus auch unsere zweite Behauptung folgt.

ABSTEIGENDE HAUPTFAKTORENFOLGEN EINER GRUPPE G sind Folgen von Gruppen H_i derart, dass

H_0 ein Hauptfaktor eines Faktors von G und

H_{i+1} für $0 \leq i$ ein Hauptfaktor eines Faktors von H_i ist.

Bedenken wir, dass epimorphe Bilder von Faktoren wieder Faktoren sind, so ergibt sich aus Lemma 5.13 die Äquivalenz der obigen Bedingungen mit den folgenden Eigenschaften:

H_0 ist ein minimaler Normalteiler eines Faktors von G;

H_{i+1} ist für $0 \leq i$ ein minimaler Normalteiler eines Faktors von H_i.

Aus der Transitivität des Faktorseins ergibt sich noch, dass alle H_i Faktoren von G und jedes H_i Faktor eines jeden H_j mit $0 \leq j < i$ ist.

SATZ 5.19: *Ist $\mathfrak{e}$ eine faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft, so sind die folgenden Eigenschaften der Gruppe G äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe.*

(2) *Jeder Hauptfaktor eines jeden Faktors von G ist eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe.*

(3) *G ist eine $\mathfrak{d}^* (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe.*

(4) *Absteigende Hauptfaktorenfolgen von G enthalten $\mathfrak{e}$-Gruppen.*

(5) *Absteigende Hauptfaktorenfolgen von G enthalten $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppen.*

Beweis: Erinnern wir uns daran, dass $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$ faktorenvererblich ist, und dass Hauptfaktoren von Faktoren wieder Faktoren sind, so sehen wir, dass (2) aus (1) folgt. Gilt umgekehrt (2), so hat jeder Hauptfaktor H eines Faktors von G als $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe eine wohlbestimmte $\mathfrak{e}$-Stufe σH. Da die Hauptfaktoren der Faktoren von G natürlich eine Menge bilden, existiert eine Ordinalzahl λ mit

$\sigma H < \lambda$ für alle Hauptfaktoren H von Faktoren von G.

Es ist dann auch $0 < \lambda$ und aus der Äquivalenz der Bedingungen (1) und (3) des Satzes 5.17 ergibt sich, dass G eine $\mathfrak{d}^\lambda \mathfrak{e}$-Gruppe und also auch eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe ist. Damit haben wir (1) aus (2) hergeleitet und die Äquivalenz von (1) und (2) dargetan.

Erinnern wir uns daran, dass $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$ faktorenvererblich ist, so sehen wir, dass jede $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe auch eine $\mathfrak{d}^* (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe ist: (3) folgt aus (1). Um umgekehrt (1) aus (3) abzuleiten, beweisen wir durch vollständige [transfinite] Induktion die Gültigkeit von

(3.σ) Jede $\mathfrak{d}^\sigma (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe ist eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe.

Trivialerweise ist (3.0) richtig. Wir können also die Induktionsannahme machen, dass $0 < \sigma$ ist und alle (3.β) mit $\beta < \sigma$ richtig sind. Ist G eine $\mathfrak{d}^\sigma (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe und H ein Hauptfaktor eines Faktors von G, so ergibt sich aus Satz 5.17, dass H eine $\mathfrak{d}^\beta (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe mit $\beta < \sigma$ ist. Wegen (3.β) ist also H eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe: G genügt der Bedingung (2) und ist also eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe. Damit haben wir auch (3.σ) bewiesen und den Induktionsbeweis vollständig ausgeführt. Ist nun G eine $\mathfrak{d}^* (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe, so ist G eine $\mathfrak{d}^\sigma (\mathfrak{d}^* \mathfrak{e})$-Gruppe für geeignetes σ. Wegen (3.σ) ist G also eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe. Damit haben wir (1) aus (3) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(3) bewiesen.

Wir nehmen die Gültigkeit der äquivalenten Bedingungen (1)-(3) an und betrachten eine absteigende Hauptfaktorenfolge H_i von G.

Dann ist jedes H_i [wegen (2)] eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe und hat also eine wohlbestimmte Stufe σ_i. Unter diesen Ordinalzahlen σ_i gibt es eine minimale σ_m. Wäre $0 < \sigma_m$, so ergäbe Anwendung von Satz 5.17 auf die $\mathfrak{d}^{\sigma_m} \mathfrak{E}$-Gruppe H_m, dass der Hauptfaktor H_{m+1} eines Faktors von H_m eine $\mathfrak{d}^{\beta} \mathfrak{E}$-Gruppe mit $\beta < \sigma_m$ ist. Aus der Definition der Stufe ergibt sich dann

$$\sigma_{m+1} \leq \beta < \sigma_m$$

im Widerspruch zur Minimalität von σ_m. Es folgt $\sigma_m = 0$, so dass H_m eine $\mathfrak{E}$-Gruppe ist; und damit haben wir (4) aus (2) hergeleitet.

Da $\mathfrak{E}$ faktorenvererblich ist, ist jede $\mathfrak{E}$ Gruppe eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe: (5) folgt aus (4). Wir nehmen schliesslich an, dass G keine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe ist. Wegen (2) besitzt dann G einen Hauptfaktor H_0 eines Faktors von G, der keine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe ist. Wir können dann die folgende Induktionsannahme machen:

Keine der Gruppen H_i mit $0 \leq i \leq k$ ist eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe und H_{i+1} ist für $0 \leq i < k$ ein Hauptfaktor eines Faktors von H_i.

Wir wenden (2) auf H_k an. Folglich gibt es einen Hauptfaktor H_{k+1} eines Faktors von H_k, der keine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe ist.

Damit ist aber die induktive Konstruktion einer absteigenden Hauptfaktorenfolge H_i von G, in der keine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}$-Gruppe vorkommt, vollständig durchgeführt: G genügt nicht der Bedingung (5). Also folgt (1) aus (5) und wir haben die Äquivalenz der Bedingungen (1)-(5) bewiesen.

Bemerkung 5.20: **A.** Die Äquivalenz der Bedingungen (1) und (3) kann man auch durch die Eigenschaftenidentitäten

$\mathfrak{d}^* \mathfrak{E} = \mathfrak{d}^* (\mathfrak{d}^* \mathfrak{E}) = \mathfrak{d}^{\sigma} (\mathfrak{d}^* \mathfrak{E})$ für alle Ordinalzahlen σ

ausdrücken.

B. Ist $\mathfrak{X}$ irgendeine faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft, kommt in der Hauptfaktorenfolge H_i eine $\mathfrak{X}$-Gruppe H_k vor, so sind alle Gruppen H_i mit $k < i$ Faktoren von H_k und also $\mathfrak{X}$-Gruppen. Aus der Existenz einer $\mathfrak{X}$-Gruppe in der absteigenden Hauptfaktorenfolge H_i ergibt sich damit, dass fast alle H_i die Eigenschaft $\mathfrak{X}$ haben. Man kann also das «enthalten» in den Bedingungen (4) und (5) durch ein entsprechendes « fast alle sind » ersetzen.

C. Verzichten wir auf die vorausgesetzte Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$, so sind alle Eigenschaften $\mathfrak{d}^\sigma \mathfrak{e}$ mit $0 < \sigma$ und $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$ faktorenvererblich. Weiter gilt

$$\mathfrak{d}^* \mathfrak{e} = \mathfrak{d}^* (\mathfrak{d}^1 \mathfrak{e}).$$

Satz 5.19 bleibt also richtig, wenn wir einerseits auf die Voraussetzung der Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{e}$ verzichten, andererseits $\mathfrak{e}$ in Bedingung (4) durch $\mathfrak{d}^1 \mathfrak{e}$ ersetzen.

Ordnung der Hauptfaktoren: Ist H ein Hauptfaktor eines Faktors von G, so ergibt sich aus Lemma 5.13, dass H ein minimaler Normalteiler eines Faktors von G ist. Im Gegensatz zu Faktoren kommt es bei Hauptfaktoren nicht nur auf die abstrakte Struktur, sondern auch auf die konkrete Art der Einlagerung in G an. Ist H minimaler Normalteiler eines Faktors F von G, so gibt es einen Normalteiler N einer Untergruppe U von G mit $F \simeq U/N$; und diese Isomorphie bildet H auf den minimalen Normalteiler M/N von U/N ab. Wir definieren deshalb [konkreter als bisher]:

Das Paar $H = (H^*, H^{**})$ ist ein Hauptfaktor eines Faktors von G, wenn es eine Untergruppe U von G mit folgenden Eigenschaften gibt:

H^* und H^{**} sind Normalteiler von U:

$H^{**} \subset H^*$ und H^*/H^{**} ist ein minimaler Normalteiler von U/H^{**}.

Während H und die «Koordinaten» H^* und H^{**} von H sich gegenseitig eindeutig bestimmen, können viele Untergruppen U in der obigen Definition auftreten; und wir werden anstelle von H^*/H^{**} auch H sagen, wenn es uns nur auf die abstrakte Struktur der Gruppe H^*/H^{**} [nicht auf ihre Einlagerung in G] ankommt.

Sind A und B Hauptfaktoren von Faktoren von G, so bedeute $A \underset{G}{\subset} B$, dass A Hauptfaktor eines Faktors von B ist. Man überzeugt sich mühelos davon, dass dann und nur dann $A \underset{G}{\subset} B$ gilt, wenn

$$B^{**} \subseteq A^{**} \subset A^* \subseteq B^*$$

ist und es eine A^*, A^{**} normalisierende Untergruppe U mit $A^* \subseteq U \subseteq B^*$ derart gibt, dass A^*/A^{**} ein minimaler Normalteiler von U/A^{**} ist.

Sind A und B Hauptfaktoren von Faktoren von G mit $A \underset{G}{\subset} B$ und $A^* = B^*$, so ist A^*/A^{**} zwangsläufig ein minimaler Normalteiler seiner selbst, also eine einfache Gruppe. Insbesondere folgt also aus $A \underset{G}{\subset} B = A$ die Einfachheit dieses Hauptfaktors, so dass $A \underset{G}{\subset} A$ mit der Einfachheit von A äquivalent ist.

Ist B ein Hauptfaktor eines Faktors von G und A ein Hauptfaktor eines Faktors von B [genauer von B^*/B^{**}], so folgt aus der Transitivität der Beziehung des Faktorseins, dass A auch ein Hauptfaktor eines Faktors von G ist. Ebenso ergibt sich aus $A \underset{G}{\subset} B$ und $B \underset{G}{\subset} C$ die Gültigkeit von $A \underset{G}{\subset} C$. Genügen weiter die Hauptfaktoren A und B von G gleichzeitig den Beziehungen $A \underset{G}{\subset} B$ und $B \underset{G}{\subset} A$, so wird

$$B^{**} \subseteq A^{**} \subseteq B^{**} \subset B^* \subseteq A^* \subseteq B^*,$$

woraus wir $A = B$ und die Einfachheit von A erschliessen.

Die Beziehung $X \underset{G}{\subset} Y$ definiert zwar nicht eine richtige Halbordnung im Bereich der Hauptfaktoren von Faktoren von G, da ja $A \underset{G}{\subset} A$ nicht immer gelten wird. Aber die Beziehung ist jedenfalls anti-symmetrisch und transitiv; und dies wird für unsere Zwecke ausreichen.

Die Hauptminimalbedingung wird von der Gruppe G erfüllt, wenn es in jeder nicht leeren Menge $\mathfrak{M}$ von Hauptfaktoren von Faktoren von G ein [minimales] Element M derart gibt, dass

$$M \underset{G}{\subset} X \text{ für jedes } X \neq M \text{ aus } \mathfrak{M}$$

gilt.

Sei H_i eine absteigende Hauptfaktorenfolge von G. Dann gilt also

$$\dots \underset{G}{\subset} H_{i+1} \underset{G}{\subset} H_i \underset{G}{\subset} \dots \underset{G}{\subset} H_0 \underset{G}{\subset} G.$$

Genügt nun G der Hauptminimalbedingung, so gibt es unter den H_i ein minimales Element H_m. Wäre $m < i$ und $H_i \neq H_m$, so würde $H_i \underset{G}{\subset} H_m \underset{G}{\subset} H_i$ gelten, woraus wir schon früher $H_i = H_m$ gefolgert haben. Also folgt $H_m = H_i$ aus $m < i$; und hieraus folgt, wie schon früher bemerkt, die Einfachheit von H_m. Damit haben wir gezeigt:

Absteigende Hauptfaktorenfolgen brechen in einem einfachen Gliede ab.

Wir nehmen umgekehrt die Ungültigkeit der Hauptminimalbedingung an. Dann gibt es eine nicht leere Menge $\mathfrak{M}$ von Hauptfaktoren von Faktoren von G, die kein minimales Element enthält. Da $\mathfrak{M}$ nicht leer ist, gibt es ein H_0 in $\mathfrak{M}$. Angenommen, wir haben bereits Elemente $H_0, \ldots, H_k$ in $\mathfrak{M}$ derart gefunden, dass

$$H_i \neq H_j \text{ für } 0 \leq i < j \leq k \text{ und}$$

$$H_{i+1} \subseteq_G H_i \text{ für } 0 \leq i < k$$

gelten. Da H_k aus $\mathfrak{M}$ und also nach Voraussetzung nicht minimal in $\mathfrak{M}$ ist, gibt es ein H_{k+1} in $\mathfrak{M}$ mit $H_{k+1} \subseteq_G H_k \neq H_{k+1}$. Wäre $H_{k+1} = H_i$ mit $0 \leq i \leq k$, so wäre sogar $i < k$ und wir hätten

$$H_{k+1} \subseteq_G H_k \subseteq_G H_i = H_{k+1},$$

woraus dann doch $H_k = H_{k+1}$ folgen würde. Damit haben wir die induktive Konstruktion einer in $\mathfrak{M}$ enthaltenen, absteigenden Hauptfaktorenfolge mit lauter verschiedenen Gliedern vollständig durchgeführt. Aus unseren bisherigen Betrachtungen ergibt sich die Äquivalenz der folgenden drei Eigenschaften der Gruppe G:

(I) Die Hauptminimalbedingung wird von G erfüllt.

(II) Absteigende Hauptfaktorenfolgen von G enden nach endlich vielen Schritten in einem einfachen Gliede.

(III) Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G bricht ab.

Es ist klar, dass aus diesen drei äquivalenten Bedingungen das folgende Eigenschaftenpaar folgt:

(IV)
(a) Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G enthält einen einfachen Hauptfaktor.
(b) Jede nur aus einfachen Gruppen bestehende absteigende Hauptfaktorenfolge von G bricht [nach endlich vielen Schritten] ab.

Gilt umgekehrt (IV), ist H_i [mit $0 \leq i$] eine absteigende Hauptfaktorenfolge von G, so bilden auch für jedes positive k die H_i mit $k < i$ eine absteigende Hauptfaktorenfolge von G, die wegen (IV. a) ein einfaches Glied enthält. Hieraus folgert man die Existenz einer Zahlenfolge $n(i)$ mit

$$0 < n(0) < \dots < n(i) < n(i+1) < \dots \text{ und einfachem } H_{n(i)}.$$

Die $H_{n(i)}$ bilden ebenfalls eine absteigende Hauptfaktorenfolge von G, die wegen (IV. b) nach endlich vielen Schritten abbricht. Ist m so gewählt, dass

$$H_{n(m)} = H_{n(i)} \text{ für } m < i$$

ist, ist weiter $n(m) < j$ und j von allen $n(i)$ verschieden, so gibt es ein und nur ein j' mit $n(j') < j < n(j'+1)$. Es wird

$$H_{n(m)} = H_{n(j'+1)} \subsetneq_G H_j \subsetneq_G H_{n(j')} = H_{n(m)};$$

und hieraus folgt

$$H_{n(m)} = H_i \text{ für } n(m) < i.$$

Damit haben wir bewiesen, dass die Bedingung (IV) mit (I)-(III) äquivalent ist.

Es genüge G der Hauptminimalbedingung. Weiter sei A, B ein Paar von isomorphen Hauptfaktoren von Faktoren von G mit $A \subset_G B$. Dann ist natürlich $A = (A^*, A^{**})$, $B = (B^*, B^{**})$ mit

$$A^*/A^{**} \cong B^*/B^{**}$$

und es gibt eine A^*, A^{**} normalisierende Untergruppe U mit

$$B^{**} \subseteq A^{**} \subset A^* \subseteq U \subseteq B^*$$

derart, dass A^*/A^{**} ein minimaler Normalteiler von U/A^{**} ist. Der Isomorphismus von B^*/B^{**} auf A^*/A^{**} produziert dann wieder einen isomorphen Hauptfaktor eines Faktors von A usw., so dass aus der Verschiedenheit von A und B die Existenz einer unendlichen, nicht abbrechenden, absteigenden Hauptfaktorenfolge von G sich ergeben würde. Dies widerspricht (III). Also gilt:

(V) Wird die Hauptminimalbedingung von G erfüllt, sind A, B isomorphe Hauptfaktoren von Faktoren von G mit $A \underset{G}{\subseteq} B$, so ist $A = B$.

Klassifizierung der Gruppen mit Hauptminimalbedingung: Zu diesem Zweck konstruieren wir durch vollständige [transfinite] Induktion eine wohlgeordnete [transfinite] Folge von Gruppenklassen $\mathfrak{k}_\sigma$.

$\mathfrak{k}_0$: Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{k}_0$-Gruppe, wenn jeder Hauptfaktor eines Faktors von G zyklisch von Primzahlordnung ist.

Da jeder einfache Faktor auch Hauptfaktor seiner selbst ist, so sind alle einfachen Faktoren von $\mathfrak{k}_0$-Gruppen zyklisch von Primzahlordnung.

Verstehen wir, wie üblich, unter einer dedekindschen Gruppe eine Gruppe, deren sämtliche Untergruppen Normalteiler sind, so sieht man sofort ein, dass alle dedekindschen Gruppen auch $\mathfrak{k}_0$-Gruppen sind. Ebenso kann man sich davon überzeugen, dass alle überauflösbaren Gruppen [= hyperzyklische Gruppen = Gruppen, deren nicht triviale epimorphe Bilder nicht triviale zyklische Normalteiler besitzen] $\mathfrak{k}_0$-Gruppen sind.

$\mathfrak{k}_\sigma$ [mit $0 < \sigma$]: Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{k}_\sigma$-Gruppe, wenn jeder von G verschiedene Hauptfaktor eines Faktors von G eine $\mathfrak{k}_\beta$-Gruppe mit $0 \leq \beta < \sigma$ ist.

Natürlich hängt das β von dem betrachteten Hauptfaktor eines Faktors von G ab; ist freilich $\sigma = \sigma' + 1$ keine Limeszahl, so sind alle von G verschiedenen Hauptfaktoren von Faktoren von G insbesondere $\mathfrak{k}_{\sigma'}$-Gruppen. Die an die Hauptfaktoren von Faktoren von G in $\mathfrak{k}_\sigma$ gestellte Anforderung betrifft nur die von G verschiedenen. Aber G ist nur dann Hauptfaktor eines Faktors von G, wenn G einfach ist.

$\mathfrak{k}^*$: Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{k}^*$-Gruppe, wenn G eine $\mathfrak{k}_\sigma$-Gruppe für geeignetes σ ist.

Es ist direkt in den Definitionen enthalten, dass jede der Eigenschaften $\mathfrak{k}_\sigma$ und also auch die Eigenschaft $\mathfrak{k}^*$ faktorenvererblich ist. Sind weiter β, λ Ordinalzahlen mit $\beta < \lambda$, so ist jede $\mathfrak{k}_\beta$-Gruppe auch eine $\mathfrak{k}_\lambda$-Gruppe. Die Klassen $\mathfrak{k}_\sigma$ bilden also eine aufsteigende Folge und $\mathfrak{k}^*$ ist ihre Vereinigungsklasse.

Da alle abelschen Gruppen $\mathfrak{k}_0$-Gruppen sind, kann man durch vollständige [transfinite] Induktion beweisen, dass jede $\mathfrak{d}^\sigma\,\mathfrak{a}$-Gruppe eine $\mathfrak{k}^\sigma$-Gruppe und also auch jede $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$-Gruppe eine $\mathfrak{k}^*$-Gruppe ist. Insbesondere umfasst die Klasse $\mathfrak{k}_1$ allerlei Klassen auflösbarer Gruppen, die etwa in $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$ enthalten sind.

Satz 5.21: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G genügt der Hauptminimalbedingung.*

(2) *Jeder Hauptfaktor eines Faktors von G ist eine $\mathfrak{k}^*$-Gruppe.*

(3) *G ist eine $\mathfrak{k}^*$-Gruppe.*

(4) *Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G enthält eine $\mathfrak{k}^*$-Gruppe.*

Beweis: Wir nehmen zunächst die Gültigkeit der Hauptminimalbedingung an. Sei $\mathfrak{M}$ die Menge aller der Hauptfaktoren von Faktoren von G, die keine $\mathfrak{k}^*$ Gruppen sind. Wäre (2) falsch, so wäre $\mathfrak{M}$ nicht leer und es folgte aus der Hauptminimalbedingung die Existenz eines minimalen Elements M aus $\mathfrak{M}$. Sei $\mathfrak{M}^*$ die Menge aller Hauptfaktoren X von Faktoren von G mit $X \underset{G}{\subset} M \neq X$. Wäre $\mathfrak{M}^*$ leer, so wäre M wegen (5.12) frei von eigentlichen Untergruppen, also zyklisch von Primzahlordnung und also eine $\mathfrak{k}_0$-Gruppe, was der Definition von $\mathfrak{M}$ und der Wahl von M widerspricht. Also ist $\mathfrak{M}^*$ nicht leer. Liegt X in $\mathfrak{M}^*$, so folgt aus der Minimalität von M in $\mathfrak{M}$ die Nicht-Zugehörigkeit von X zu $\mathfrak{M}$. Also ist X eine $\mathfrak{k}^*$ Gruppe. Es folgt die Existenz einer [eindeutig bestimmten minimalen] Ordinalzahl $\sigma(X)$ derart, dass X eine $\mathfrak{k}^{\sigma(X)}$-Gruppe ist. Da $\mathfrak{M}^*$ eine Menge ist, gibt es eine Ordinalzahl σ mit

$$\sigma(X) < \sigma \text{ für alle } X \text{ aus } \mathfrak{M}^*.$$

Natürlich ist $0 < \sigma$. Weiter ist $\mathfrak{M}^*$ die Menge aller von M verschiedenen Hauptfaktoren von Faktoren von M. Folglich ist M eine $\mathfrak{k}^\sigma$-Gruppe im Widerspruch zu unserer Definition von $\mathfrak{M}$ und Wahl von M in $\mathfrak{M}$. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass (2) aus (1) folgt.

Gilt (2), ist H ein Hauptfaktor eines Faktors von G, so gibt es eine [und nur eine] minimale Ordinalzahl $\sigma(H)$ derart, dass H eine $\mathfrak{k}^{\sigma(H)}$-Gruppe ist. Da diese Hauptfaktoren eine Menge bilden, gibt es eine positive Ordinalzahl σ mit

$\sigma(H) < \sigma$ für alle Hauptfaktoren H von Faktoren von G.

Dann ist G eine $\mathfrak{k}^{\sigma}$-Gruppe und also auch eine $\mathfrak{k}^{*}$-Gruppe: (3) folgt aus (2).

Gilt (3), so ergibt sich (4) [und mehr] aus der Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{k}^{*}$. Gilt schliesslich (4), so betrachten wir eine absteigende Hauptfaktorenfolge H_i von G. Es gibt dann ein H_m, das die Eigenschaft $\mathfrak{k}^{*}$ hat; und aus der Faktorenvererblichkeit von $\mathfrak{k}^{*}$ folgt, dass jedes H_i mit $m \leq i$ die Eigenschaft $\mathfrak{k}^{*}$ hat. Also gibt es zu jedem i mit $m \leq i$ eine und nur eine minimale Ordinalzahl $\sigma(i)$ derart, dass H_i eine $\mathfrak{k}^{\sigma(i)}$-Gruppe ist. Aus der Wohlordnung der Ordinalzahlen ergibt sich die Existenz einer ganzen Zahl k mit $m \leq k$ und $\sigma(k) \leq \sigma(i)$ für $m \leq i$. Ist $k < i$ und $H_k \neq H_i$, so folgt aus $H_i \subset H_k$ und der Minimalität von $\sigma(i)$, dass $\sigma(i) < \sigma(k) \leq \sigma(i)$ ist, ein Widerspruch. Also wird $H_k = H_i$ für $k < i$: die absteigende Hauptfaktorenfolge H_i bricht ab. Damit haben wir die zur Hauptminimalbedingung äquivalente Bedingung (III) aus (4) abgeleitet und die Äquivalenz von (1)-(4) bewiesen.

Spezialfälle 5.22: **A.** Enthält jede absteigende Hauptfaktorenfolge der Gruppe G eine dedekindsche Gruppe, so erinnern wir uns an die früher gemachte Bemerkung, dass dedekindsche Gruppen $\mathfrak{k}_0$-Gruppen und erst recht $\mathfrak{k}^{*}$-Gruppen sind. Anwendung von Satz 5.21 ergibt dann, dass G der Hauptminimalbedingung genügt.

B. Wir betrachten eine artinsche Gruppe G und eine absteigende Hauptfaktorenfolge $H_i = (H_i^{*}, H_i^{**})$ von G. Dann bilden aber die Untergruppen H_i^{*} von G eine absteigende Folge von Untergruppen der artinschen Gruppe G, die zwangsläufig nach endlich vielen Schritten abbricht. Es gibt also ein ganzes m mit $H_m^{*} = H_i^{*}$ für $m < i$. Dann sind aber alle $H_i^{*}/H_i^{**} = H_m^{*}/H_i^{**}$ mit $m < i$ einfache epimorphe Bilder der einfachen Gruppe H_{m+1}^{*}/H_{m+1}^{**}, woraus wir $H_{m+1} = H_i$ für $m < i$ schliessen können. Damit haben wir das Abbrechen jeder absteigenden Hauptfaktorenfolge einer artinschen Gruppe dargetan; und aus der Äquivalenz der Bedingungen (I)-(III) ergibt sich, dass alle artinschen Gruppen der Hauptminimalbedingung genügen, wegen Satz 5.21 also $\mathfrak{k}^*$-Gruppen sind. Eine zweite Anwendung von Satz 5.21 zeigt dann die Gültigkeit des folgenden Kriteriums:

Die Gruppe G genügt der Hauptminimalbedingung, wenn jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G eine artinsche Gruppe enthält.

Insbesondere genügt also jede artinsche Gruppe der Hauptminimalbedingung, die damit als [wesentliche] Abschwächung der Minimalbedingung erkannt ist.

EIGENSCHAFTEN MIT HAUPTMINIMALBEDINGUNG: Die faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{e}$ genügt der Hauptminimalbedingung, wenn jede $\mathfrak{e}$-Gruppe der Hauptminimalbedingung genügt. Aus der Äquivalenz der Bedingungen (I)-(III) ergibt sich dann sofort:

Die faktorenvererbliche Eigenschaft $\mathfrak{e}$ genügt dann und nur dann der Hauptminimalbedingung, wenn jede absteigende Hauptfaktorenfolge einer $\mathfrak{e}$-Gruppe nach endlich vielen Schritten mit einer einfachen $\mathfrak{e}$-Gruppe endet.

SATZ 5.23: *Genügt die faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft $\mathfrak{e}$ der Hauptminimalbedingung, so ist die Gruppe G dann und nur dann eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}$-Gruppe, wenn*

(a) *jeder einfache Faktor von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist und*

(b) *absteigende Hauptfaktorenfolgen von G nach endlich vielen Schritten abbrechen.*

BEWEIS: Ist erstens G eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}$-Gruppe, so ist auch jeder einfache Faktor E von G eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}$-Gruppe. Wäre E keine $\mathfrak{e}$ Gruppe, so wäre die Stufe $\sigma E \neq 0$. Als einfache Gruppe ist E ein Hauptfaktor von E; und aus Satz 5.17 ergibt sich, dass E eine $\mathfrak{d}^\beta\,\mathfrak{e}$-Gruppe mit $\beta < \sigma E$ ist. Dies widerspricht der Minimaleigenschaft der Stufe σE. Also ist E eine $\mathfrak{e}$-Gruppe. Ist weiter H_i eine absteigende Hauptfaktorenfolge der $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}$ Gruppe G, so ergibt sich aus Satz 5.19 die Existenz eines Index m derart, dass H_m eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Natürlich bilden die H_i mit $m < i$ eine absteigende Hauptfaktorenfolge der $\mathfrak{e}$-Gruppe H_m, die wegen der Äquivalenz der Bedingungen

(I)-(III) nach endlich vielen Schritten abbricht. Damit ist die Notwendigkeit der Bedingungen (a), (b) dargetan.

Gelten umgekehrt die Bedingungen (a), (b), so betrachten wir eine absteigende Hauptfaktorenfolge H_i von G. Diese bricht wegen (b) nach endlich vielen Schritten ab; und daraus folgt, wegen der Äquivalenz der Bedingungen (I)-(III) die Existenz eines einfachen H_i, das wegen (a) als Faktor von G eine $\mathfrak{e}$-Gruppe ist. Damit haben wir die Gültigkeit der Bedingung (4) des Satzes 5.19 dargetan: G ist eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$-Gruppe.

Zusatz 5.24: *Ist $\mathfrak{e}$ eine faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft, so ist dann und nur dann $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e} = \mathfrak{d}^\sigma \mathfrak{e}$, wenn $\mathfrak{d}^\sigma \mathfrak{e} = \mathfrak{d}^{\sigma+1} \mathfrak{e}$ ist.*

Beweis: Bedenken wir, dass jede $\mathfrak{d}^\sigma \mathfrak{e}$-Gruppe eine $\mathfrak{d}^{\sigma+1}\mathfrak{e}$-Gruppe und jede $\mathfrak{d}^{\sigma+1} \mathfrak{e}$-Gruppe eine $\mathfrak{d}^*\mathfrak{e}$-Gruppe ist, so folgt aus $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e} = \mathfrak{d}^*\mathfrak{e}$ sofort $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e} = \mathfrak{d}^{\sigma+1}\mathfrak{e}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e}=\mathfrak{d}^{\sigma+1}\mathfrak{e}$, so setzen wir $\mathfrak{f}=\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{e}$. Dann ist $\mathfrak{f}$ eine faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft mit $\mathfrak{d}^*\mathfrak{e} = \mathfrak{d}^*\mathfrak{f}$ und $\mathfrak{f} = \mathfrak{d}^1\mathfrak{f}$. Die letzte Gleichung ist wegen Satz 5.17 gleichwertig mit der Aussage:

(+) Dann und nur dann ist G eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, wenn jeder Hauptfaktor eines Faktors von G eine $\mathfrak{f}$-Gruppe, ist.

Wir beweisen nun durch vollständige [transfinite] Induktion die Gültigkeit von

$$(++) \qquad \mathfrak{f} = \mathfrak{d}^\lambda \mathfrak{f}$$

für alle Ordinalzahlen λ. Da $\mathfrak{f}$-Gruppen stets auch $\mathfrak{d}^\lambda$ $\mathfrak{f}$-Gruppen sind, ist (++) mit der Aussagenfamilie

(++. λ) jede $\mathfrak{d}^\lambda$ $\mathfrak{f}$-Gruppe ist eine $\mathfrak{f}$-Gruppe

gleichwertig. Es ist klar, dass (++. 0) richtig ist. Wir können also annehmen, dass $0 < \lambda$ ist und alle Aussagen (++. β) mit $\beta < \lambda$ bereits als richtig erwiesen sind. Ist dann G eine $\mathfrak{d}^\lambda$ $\mathfrak{f}$-Gruppe, so folgt aus Satz 5.17, dass jeder Hauptfaktor eines Faktors von G eine $\mathfrak{d}^\beta$ $\mathfrak{f}$-Gruppe mit $\beta < \lambda$ und wegen (++.β) also sogar eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist. Anwendung von (+) zeigt, dass G selbst eine $\mathfrak{f}$-Gruppe ist. Damit ist auch (++.λ) bewiesen: der induktive Beweis dieser Aussagenfamilie ist vollständig ausgeführt.

Damit haben wir aber auch (++) bewiesen. Es folgt

$$\mathfrak{d}^{\sigma}\,\mathfrak{e} = \mathfrak{f} = \mathfrak{d}^{*}\,\mathfrak{f} = \mathfrak{d}^{*}\,\mathfrak{e}\,;$$

und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Satz 5.25: (A) $\mathfrak{fnr} = \mathfrak{d}^{*}(\mathfrak{fnr})$.

(B) *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

(2) *Jeder Hauptfaktor eines jeden Faktors von G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

(3) *Jede absteigende Hauptfaktorenkette von G enthält eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

(4) *Jede echte Untergruppe von G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe und einfache epimorphe Bilder von G sind entweder frei von maximalen Untergruppen oder zyklisch von Primzahlordnung.*

(5) *Ist der Hauptfaktor H eines Faktors von G nicht abelsch, so ist jede echte Untergruppe von H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe; und falls H einfach ist, ist H frei von maximalen Untergruppen.*

Beweis: Natürlich ist jede $\mathfrak{fnr}$-Gruppe auch eine $\mathfrak{d}^{1}(\mathfrak{fnr})$-Gruppe. Ist umgekehrt G eine $\mathfrak{d}^{1}(\mathfrak{fnr})$-Gruppe und F ein Faktor von G, so besitzt F eine Normalteilerkette $\mathfrak{N}$, deren Faktoren $\mathfrak{fnr}$-Gruppen und a fortiori $\mathfrak{nr}$-Gruppen sind; vergl. die Definition des Operators $\mathfrak{d}^{1}$. Anwendung von Lemma 5.10 zeigt, dass F eine $\mathfrak{nr}$ Gruppe und G mithin eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Damit haben wir

$$\mathfrak{fnr} = \mathfrak{d}^{1}(\mathfrak{fnr})$$

bewiesen. Hieraus und aus Zusatz 5.24 folgt unsere Behauptung (A).

Ist G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so ist auch jeder Faktor und erst recht jeder Hauptfaktor eines Faktors von G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe: (2) folgt aus (1). Es ist klar, dass (3) aus (2) folgt, da ja jedes Glied einer absteigenden Hauptfaktorenkette ein Hauptfaktor eines Faktors ist. Gilt schliesslich (3), so folgern wir aus Satz 5.19, dass G eine $\mathfrak{d}^{*}(\mathfrak{fnr})$-Gruppe ist. Wegen (A) ist G also sogar eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe: (3) folgt aus (1) und (1)-(3) sind äquivalent.

Ist G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so ist auch jede Untergruppe und jedes epimorphe Bild von G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Ist insbesondere E ein einfaches epimorphes Bild von G, besitzt diese $\mathfrak{fnr}$-Gruppe maximale Untergruppen, so ergibt Lemma 1.9, dass E zyklisch von Primzahlordnung ist. Damit haben wir (4) aus (1) hergeleitet.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (4) an. Ist der Hauptfaktor H eines Faktors von G ein epimorphes Bild einer echten Untergruppe U von G, so ist mit U auch H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Wir notieren :

(+) Hauptfaktoren von G sind $\mathfrak{fnr}$-Gruppen, wenn sie epimorphe Bilder echter Untergruppen von G sind.

Ist der Hauptfaktor H eines Faktors von G nicht epimorphes Bild einer echten Untergruppe von G, so folgert man aus Lemma 5.13, dass H ein epimorphes Bild von G und als Hauptfaktor seiner selbst einfach ist. Ist H zyklisch von Primzahlordnung, so ist H natürlich eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Ist H nicht zyklisch von Primzahlordnung, so hat H wegen (4) die folgenden Eigenschaften :

(*) H ist einfach ; jede echte Untergruppe von H ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ; H ist frei von maximalen Untergruppen.

Sei Q ein Faktor von H. Ist Q ein epimorphes Bild einer echten Untergruppe von H, so ist Q eine $\mathfrak{fnr}$ Gruppe und erst recht eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe. Ist aber Q kein epimorphes Bild einer echten Untergruppe von H, so ist Q als epimorphes Bild der einfachen Gruppe H [entweder 1 oder] H. Ist dann U eine Untergruppe von H mit $U = \mathfrak{n}_H U \subset H$, so folgt aus der Nicht-Existenz maximaler Untergruppen von H, dass U keine maximale Untergruppe von H ist und es also eine Untergruppe V mit $U \subset V \subset H$ gibt. Da V wegen (*) eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist, gibt es eine von U normalisierte, mit U nicht vergleichbare Untergruppe von V. Es folgt, dass $Q = H$ eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe ist. Damit haben wir aber gezeigt, dass alle Faktoren von H die Eigenschaft $\mathfrak{nr}$ haben, so dass also H selbst eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Damit haben wir in Verbindung mit (+) gezeigt :

alle Hauptfaktoren H von Faktoren von G sind $\mathfrak{fnr}$-Gruppen.

Wir haben (2) aus (4) hergeleitet und die Äquivalenz von (1)-(4) bewiesen.

Wir nehmen wieder an, dass G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist und betrachten einen Hauptfaktor H eines Faktors von G. Dann ist auch H

eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so dass erst recht jede echte Untergruppe von H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Ist H eine einfache Gruppe mit maximalen Untergruppen, so ist die $\mathfrak{fnr}$-Gruppe H zyklisch von Primzahlordnung [Lemma 1.9]; und damit haben wir (5) aus (1) abgeleitet.

Wir nehmen umgekehrt die Gültigkeit von (5) an und betrachten einen Hauptfaktor H eines Faktors von G. Wegen Lemma 5.13 ist H charakteristisch-einfach. Angenommen, H ist keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Dann ist H gewiss nicht abelsch; und aus (5) folgt, dass

(+) jede echte Untergruppe von H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe und

(++) H nicht gleichzeitig einfach und im Besitz maximaler Untergruppen sein kann.

Wir nehmen nun an, dass H das Produkt seiner echten Normalteiler ist. Ist M ein maximaler Normalteiler von H, so gibt es einen Normalteiler N von H mit $N \subset H$ und $N \not\subseteq M$. Dann wird $H = MN$ wegen der Maximalität von M, so dass

$$H/M = MN/M \cong N/(M \cap N)$$

ist. Wegen (+) ist N und also auch das epimorphe Bild H/M von N eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Wegen Lemma 1.9 ist eine einfache $\mathfrak{fnr}$-Gruppe mit maximalen Untergruppen zyklisch von Primzahlordnung. Damit haben wir gezeigt, dass jedes einfache epimorphe Bild von H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe und entweder frei von maximalen Untergruppen oder zyklisch von Primzahlordnung ist. Wegen (+) genügt also H der Bedingung (4); und aus der bereits bewiesenen Äquivalenz von (1) und (4) folgt, dass H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass H nicht das Produkt seiner echten Normalteiler ist.

Das Produkt aller echten Normalteiler von H ist also eine von H verschiedene, charakteristische Untergruppe von H. Da H charakteristisch-einfach ist, ergibt dies, dass dieses Produkt trivial ist, woraus die Einfachheit von H folgt. Aus (+), (++) folgern wir nun, dass die einfache Gruppe H frei von maximalen Untergruppen ist und dass die echten Untergruppen von H sämtlich $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind. Also genügt H wieder der Bedingung (4), so dass H eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Aus diesem Widerspruch ergibt sich, dass H auf jeden Fall eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist; und damit haben wir (2) aus (5) hergeleitet, die Äquivalenz von (1)-(5) bewiesen.

FOLGERUNG 5.26 : *Ist* $\mathfrak{e}$ *eine faktorenvererbliche gruppentheoretische Eigenschaft, so ist dann und nur dann jede* $\mathfrak{e}$*-Gruppe eine* $\mathfrak{fnr}$*-Gruppe, wenn jede* $\mathfrak{d}^*\mathfrak{e}$*-Gruppe eine* $\mathfrak{fnr}$*-Gruppe ist.*

Dies ergibt sich mühelos aus Satz 5.25, (A).

Wir wollen die bisherigen Resultate auf die Eigenschaft $\mathfrak{d}^*\mathfrak{a}$ anwenden. Hierfür benötigen wir das folgende

LEMMA 5.27 : *Es sei* $G \neq 1$ *eine charakteristisch-einfache Gruppe.*

(A) *Dann und nur dann ist* G *abelsch, wenn* G *eine* $\mathfrak{fnr}$*-Gruppe mit artinschen epimorphen Bildern* $\neq 1$ *ist.*

(B) *Die folgenden Eigenschaften von* G *sind äquivalent:*

(1) G *ist eine elementar-abelsche Primärgruppe.*

(2) G *ist eine* $\mathfrak{fnr}$*-Gruppe, die ein einfaches epimorphes Bild mit maximaler Untergruppe besitzt.*

(3) G *ist eine* $\mathfrak{fnr}$*-Gruppe mit noetherschem epimorphem Bilde* $\neq 1$.

BEWEIS : Es sei zunächst G eine abelsche charakteristisch-einfache Gruppe. Ist erstens G radizierbar [d.h. $G^n = G$ für alle positiven ganzen Zahlen n], so ist G bekanntlich ein direktes Produkt von Gruppen des Ranges 1, die entweder vom Typ der Additionsgruppe der rationalen Zahlen oder vom Prüferschen Typ p^∞ sind; vergl. Fuchs [p. 64, Theorem 19.1] — übrigens können die Torsionsfaktoren wegen der charakteristischen Einfachheit nicht auftreten. In diesem Falle besitzt G gewiss ein epimorphes Bild vom Typ p^∞, das natürlich artinsch und von 1 verschieden ist. Ist zweitens G nicht radizierbar, so gibt es eine Primzahl p mit $G^p \subset G$, so dass $G^p = 1$ aus der charakteristischen Einfachheit von G folgt. Dann ist G eine elementar-abelsche p-Gruppe und besitzt ein epimorphes Bild der Ordnung p. Aus diesen Bemerkungen folgt:

(+) Ist $G \neq 1$ eine charakteristisch-einfache abelsche Gruppe, so besitzt G ein artinsches epimorphes Bild $\neq 1$; und G ist dann und nur dann eine elementar abelsche Primärgruppe, wenn G ein epimorphes Bild von Primzahlordnung besitzt.

Aus (+) folgt sofort die Notwendigkeit der ad (A) angegebenen Bedingungen. Ist umgekehrt G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe mit artinschem epimorphem Bild $A \neq 1$, so ist A eine artinsche $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, die nach Hilfssatz 3.6 sicherlich auflösbar ist. Also ist $A' \subset A$ und hieraus folgt $G' \subset G$. Aus der charakteristischen Einfachheit von G ergibt sich dann $G' = 1$, so dass G abelsch und (A) bewiesen ist.

Ist die charakteristisch-einfache Gruppe $G \neq 1$ eine elementar-abelsche Primärgruppe, so ergibt sich aus (+) die Existenz eines epimorphen Bildes von Primzahlordnung von G. Hieraus ergibt sich sofort, dass (B.3) — und sehr viel mehr — aus (B.1) folgt. Von 1 verschiedene noethersche Gruppen besitzen natürlich einfache epimorphe Bilder, die noethersch sind und also maximale Untergruppen besitzen: (B.2) folgt aus (B.3). Gilt schliesslich (B.2), so ergibt Lemma 1.9 die Existenz eines epimorphen Bildes B von G, das zyklisch von Primzahlordnung p ist. Hieraus folgern wir $G' G^p \subset G$, woraus $G' G^p = 1$ wegen der charakteristischen Einfachheit von G folgt. Also ist G eine elementar-abelsche p-Gruppe, womit wir (B.1) aus (B.2) abgeleitet und die Äquivalenz von (B.1)-(B.3) bewiesen haben.

Um unser nächstes Resultat bequem aussprechen zu können, führen wir den u. a. durch Lemma 5.27, (B.2) nahegelegten Begriff *der annähernd noetherschen oder* $\mathfrak{an}$-*Gruppe ein:*

Die Gruppe G ist dann und nur dann eine $\mathfrak{an}$-Gruppe, wenn jeder von 1 verschiedene Faktor von G ein von 1 verschiedenes einfaches epimorphes Bild mit maximaler Untergruppe besitzt.

Man sieht leicht ein, dass noethersche Gruppen auch $\mathfrak{an}$-Gruppen sind, und dass $\mathfrak{an}$ faktorenvererblich ist. Also ist auch $\mathfrak{lan}$ [= lokal annähernd noethersch] faktorenvererblich.

FOLGERUNG 5.28: *Eine $\mathfrak{lan}$-Gruppe ist dann und nur dann eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, wenn sie eine $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppe ist.*

BEWEIS: Da abelsche Gruppen trivialerweise $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind, so folgt aus Folgerung 5.26, dass auch jede $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppe eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Sei umgekehrt G sowohl eine $\mathfrak{lan}$-Gruppe als auch eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Ist E eine endlich erzeugbare Untergruppe von G, so ist E eine $\mathfrak{an}$-Gruppe. Ist H ein Hauptfaktor eines Faktors von E, so besitzt H als Faktor $\neq 1$ von E ein einfaches epimorphes Bild mit maximaler Untergruppe. Weiter ist H wegen Lemma 5.13 einem minimalen Normalteiler eines Faktors von E isomorph und also charakteristisch-einfach. Da H als Faktor der $\mathfrak{fnr}$-Gruppe G selbst eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist, können wir Lemma 5.27, (C) anwenden: H ist eine elementar-abelsche Primärgruppe. Da alle Hauptfaktoren von E damit als abelsch erwiesen sind, folgt aus Satz 5.17, dass E eine $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppe ist. Erinnern wir daran, dass $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppen $\mathfrak{u}$-Gruppen im Sinne der Diskussion 5.16, **A** sind, so haben wir gezeigt, dass G eine $\mathfrak{lu}$-Gruppe ist. Aus Diskussion 5.16, (**A**.2) folgt, dass G eine $\mathfrak{u}$-Gruppe ist; und $\mathfrak{u}$-Gruppen sind wegen Satz 5.17 auch $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppen. Also ist G eine $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppe.

SATZ 5.29: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$-Gruppe.*

(2) *Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G enthält einen lokal noetherschen $\mathfrak{fnr}$-Hauptfaktor.*

(3) *Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G enthält einen $\mathfrak{fnr}$-Hauptfaktor mit einem von 1 verschiedenen epimorphen Bilde, das noethersch oder artinsch ist.*

(4) *Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G bricht nach endlich vielen Schritten ab und einfache Faktoren von G sind abelsch.*

(5) *Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G bricht nach endlich vielen Schritten ab und einfache Faktoren von G sind $\mathfrak{fnr}$-Gruppen mit maximalen Untergruppen.*

(6) *G ist sowohl eine $\mathfrak{d}^*\,(\mathfrak{lan})$-Gruppe als auch eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

BEWEIS: Aus Satz 5.19 ergibt sich die Äquivalenz von Bedingung (1) und folgender Eigenschaft von G:

(1*) Absteigende Hauptfaktorenfolgen von G enthalten abelsche Gruppen.

Da abelsche Gruppen lokal noethersche $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind, folgt (2) aus (1*). Gilt (2), so enthält jede absteigende Hauptfaktorenfolge eine lokal noethersche Gruppe, also eine $\mathfrak{lan}$-Gruppe, so dass G wegen Satz 5.19 eine $\mathfrak{d}^*\,(\mathfrak{lan})$-Gruppe ist. Weiter enthält jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so dass G wegen Satz 5.25, (B) eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Damit haben wir (6) aus (2) abgeleitet.

Gilt (6), so enthält wegen Satz 5.19 jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G eine $\mathfrak{lan}$-Gruppe, die mit G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Sie ist wegen Folgerung 5.28 eine $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppe und a fortiori eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$-Gruppe. Anwendung von Satz 5.19 zeigt, dass G eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$-Gruppe ist. Damit ist die Äquivalenz von (1), (1*), (2), (6) dargetan.

Genügt G den äquivalenten Bedingungen (1) und (1*), so enthält jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G eine abelsche Gruppe. Diese ist Hauptfaktor eines Faktors von G und wegen Lemma 5.13 ist sie einem minimalen Normalteiler eines Faktors von G isomorph. Also ist diese abelsche Gruppe charakteristisch einfach; und Anwendung von Lemma 5.27 zeigt, dass sie eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist, die ein von 1 verschiedenes epimorphes Bild besitzt, das artinsch oder noethersch ist. Damit haben wir (3) aus (1*) abgeleitet.

Gilt umgekehrt (3), so enthält jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe H mit einem von 1 verschiedenen epimorphen Bild, das noethersch oder artinsch ist. Wegen Lemma 5.13 sind Hauptfaktoren, wie schon häufig bemerkt, charakteristisch-einfach; und Lemma 5.27 zeigt, dass H abelsch ist. Damit haben wir (1*) aus (3) hergeleitet und die Äquivalenz von (1) und (3) dargetan.

Absteigende Hauptfaktorenfolgen abelscher Gruppen brechen nach endlich vielen Schritten mit einfachen abelschen Gruppen ab [Bemerkung 5.22]. Wir können also Satz 5.23 anwenden, der die Äquivalenz der Bedingungen (1) und (4) in Evidenz setzt. Bedenken wir, dass einfache abelsche Gruppen zyklisch von Primzahlordnung sind, so sehen wir, dass (5) aus (4) folgt. Aus Lemma 5.27, (B) folgt weiter, dass einfache $\mathfrak{fnr}$-Gruppen mit maximalen Untergruppen abelsch sind. Also folgt (4) aus (5), womit die Äquivalenz von (1), (4) und (5) dargetan ist: die Bedingungen (1)-(6) sind äquivalent.

Bemerkung 5.30: Im Laufe des Beweises hat sich gezeigt, dass eine Gruppe G dann und nur dann eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$-Gruppe ist, wenn (4*) absteigende Hauptfaktorenfolgen von G nach endlich vielen Schritten abbrechen und einfache Faktoren von G zyklisch von Primzahlordnung sind.

Ohne grosse Mühe folgert man weiter aus Satz 5.29, Folgerung 5.28, dass G dann und nur dann eine $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$-Gruppe ist, wenn (3*) G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist und jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G eine artinsche oder eine noethersche Gruppe enthält.

Bemerkung 5.31: **A.** Wir wissen nicht, ob die Gruppenklassen $\mathfrak{d}^\sigma\mathfrak{a}$, $\mathfrak{d}^*\mathfrak{a}$, $\mathfrak{fnr}$ sämtlich verschieden sind; und ihr Verhältnis zur Klasse $\mathfrak{a}^*$ der Hypernilgruppen ist auch noch ungeklärt.

B.
$$\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a} = \mathfrak{d}^1\,(\mathfrak{ap}).$$

Beweis: Wir erinnern zunächst daran, dass die Gruppe G dann und nur dann eine $\mathfrak{ap}$ Gruppe ist, wenn $F' \subset F$ für jeden Faktor $F \neq 1$ von G gilt. Insbesondere sind also alle abelschen Gruppen auch $\mathfrak{ap}$-Gruppen, so dass $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppen stets $\mathfrak{d}^1\,(\mathfrak{ap})$-Gruppen sind. Ist weiter G eine $\mathfrak{d}^1\,(\mathfrak{ap})$-Gruppe, so ist jeder Hauptfaktor H eines Faktors von G eine $\mathfrak{ap}$-Gruppe [Satz 5.17]. Also ist $H' \subset H$. Aus Lemma 5.13 folgert man die charakteristische Einfachheit von H. Es folgt $H' = 1$, so dass alle Hauptfaktoren von Faktoren von G abelsch sind und G eine $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a}$-Gruppe ist [Satz 5.17].

C. Aus Satz 5.29 und Folgerung 5.28 folgert man mühelos die Äquivalenz der folgenden Eigenschaften der noetherschen Gruppe G:

$$\mathfrak{ap},\ \mathfrak{d}^1\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a},\ \mathfrak{fnr}.$$

Dagegen wissen wir nicht, ob noethersche $\mathfrak{fnr}$-Gruppen stets polyzyklisch sind. Gäbe es noethersche $\mathfrak{fnr}$-Gruppen W, die nicht polyzyklisch sind, so könnte W auch keine polyzyklische Untergruppe von endlichem Index in W besitzen. Es ist aber eines der offenen Probleme der Theorie der noetherschen Gruppen, ob jede noethersche Gruppe eine polyzyklische Untergruppe von endlichem Index besitzt.

D. Sei π eine Menge von Primzahlen und $\mathfrak{e}_\pi$ die aus 1 und allen zyklischen Gruppen mit Primzahlordnung p aus π bestehende Gruppenklasse. Dann ist $\mathfrak{e}_\pi$ faktorenvererblich und genügt der Hauptminimalbedingung; vergl. Spezialfall 5.22, **B.**

(**D.**1) Ist π die Menge aller Primzahlen, so ist $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}_\pi = \mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$.

Beweis: Da $\mathfrak{e}_\pi$ eine Teilklasse der Klasse $\mathfrak{a}$ aller abelschen Gruppen ist, ist $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}_\pi$ eine Teilklasse von $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$. Da jede abelsche Gruppe eine Hauptreihe mit zyklischen Faktoren von Primzahlordnung besitzt, ist $\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{e}_\pi$ enthalten. Also ist $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a}$ in $\mathfrak{d}^*\,(\mathfrak{d}^1\,\mathfrak{e}_\pi) = \mathfrak{d}^*\mathfrak{e}_\pi$ enthalten, womit wir $\mathfrak{d}^*\,\mathfrak{a} = \mathfrak{d}^*\,\mathfrak{e}_\pi$ bewiesen haben.

(**D**.2) Ist π weder leer noch die Menge aller Primzahlen, so ist die Gruppe G dann und nur dann eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$-Gruppe, wenn G eine Torsionsgruppe aus $\mathfrak{d}^* \mathfrak{a}$ ist und die Ordnungen der Elemente aus G nur durch Primzahlen aus π teilbar sind.

Beweis: Da jede $\mathfrak{e}_\pi$-Gruppe abelsch ist, ist $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$ eine Teilklasse von $\mathfrak{d}^* \mathfrak{a}$. Ist weiter G irgendeine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$-Gruppe, so ist auch jede zyklische Untergruppe $\{g\}$ eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$-Gruppe. Aus Satz 5.23 folgt, dass jeder einfache Faktor von $\{g\}$ eine $\mathfrak{e}_\pi$-Gruppe und also zyklisch von Primzahlordnung p aus π ist. Wäre $\{g\}$ unendlich, so erinnern wir uns daran, dass $\{g\}$ dann auch zyklische Faktorgruppen der in π nach Voraussetzung nicht vorkommenden Primzahlordnungen besitzen würde. Es folgt, dass $\{g\}$ endlich ist und die Ordnung von g nur durch Primzahlen aus π teilbar ist: die Bedingungen sind notwendig.

Ist umgekehrt G eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{a}$-Torsionsgruppe, sind die Ordnungen von Elementen aus G nur durch Primzahlen aus π teilbar, so ergibt sich aus Satz 5.29:

Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von G bricht nach endlich vielen Schritten ab und einfache Faktoren von G sind zyklisch von Primzahlordnung.

Natürlich ist aber ein Faktor von G, der zyklisch von Primzahlordnung ist, eine p-Gruppe mit p aus π. Anwendung von Satz 5.23 zeigt dann, dass G eine $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$-Gruppe ist.

Die Wichtigkeit der damit charakterisierten Klassen $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$ beruht auf ihrem Minimalcharakter: Ist $\mathfrak{e}$ irgendeine [faktorenvererbliche] gruppentheoretische Eigenschaft und π die Menge aller Primzahlen, die Ordnungen von Gruppen aus $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$ sind, so enthält $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}$ die ganze Klasse $\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi$ und es ist [wegen (**D**.1) und (**D**.2)]

$$\mathfrak{d}^* \mathfrak{e}_\pi = \mathfrak{d}^* \mathfrak{e} \cap \mathfrak{d}^* \mathfrak{a}.$$

Satz 5.32: *Brechen absteigende Hauptfaktorenfolgen der Gruppe G ab, so ist G dann und nur dann eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, wenn jeder einfache Faktor von G, der eine maximale Untergruppe besitzt, zyklisch von Primzahlordnung ist.*

Beweis: Ist erstens G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe und E ein einfacher Faktor von G mit maximaler Untergruppe, so ist E eine $\mathfrak{nr}$-Gruppe und also wegen Lemma 1.9 zyklisch von Primzahlordnung.

Wir nehmen umgekehrt an, dass alle maximale Untergruppen besitzenden einfachen Faktoren von G zyklisch von Primzahlordnung sind. Sei nun F ein Faktor von G, dessen einfache Faktoren sämtlich $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind. Jede absteigende Hauptfaktorenfolge von F ist dann auch eine absteigende Hauptfaktorenfolge von G; und als solche bricht sie nach endlich vielen Schritten ab. Wie schon bemerkt, bricht jede absteigende Hauptfaktorenfolge, wenn überhaupt, in einem einfachen Gliede ab. Also enthält jede absteigende Hauptfaktorenfolge von F einen einfachen Faktor, der nach Voraussetzung eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist: F genügt der Bedingung (3) des Satzes 5.25, (B) und ist also eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Damit haben wir gezeigt:

(1) Ist jeder einfache Faktor des Faktors F von G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so ist F selbst eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.

Weiter sei E ein einfacher Faktor von G, dessen echte Untergruppen sämtlich $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind. Ist B ein einfaches epimorphes Bild von E, so ist $E = B$ und B ist nach Voraussetzung entweder frei von maximalen Untergruppen oder zyklisch von Primzahlordnung. Die Gruppe E genügt also der Bedingung (4) des Satzes 5.25, (B) und ist folglich eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe. Damit haben wir bewiesen:

(2) Ist E ein einfacher Faktor von G, dessen echte Untergruppen sämtlich $\mathfrak{fnr}$-Gruppen sind, so ist E eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.

Sei wieder E ein einfacher Faktor von G. Wäre E keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so folgte aus (2) die Existenz einer echten Untergruppe U von E, die keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist; und aus (1) folgt die Existenz eines einfachen Faktors von U, der keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Damit haben wir gezeigt:

(3) Ist der einfache Faktor E von G keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so gibt es einen einfachen Faktor $E^* \neq E$ von E, der keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist.

Wäre nun G keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so folgte aus (1) die Existenz eines einfachen Faktors E_0 von G, der keine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist. Wegen (3) kann man dann eine Folge E_i mit folgenden Eigenschaften konstruieren:

Jedes E_i ist einfach und kein E_i ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe; stets ist E_{i+1} ein von E_i verschiedener Faktor von E_i.

Nun sind einfache Gruppen Hauptfaktoren ihrer selbst. Die E_i bilden also eine nicht abbrechende, absteigende Hauptfaktorenfolge von G. Dies widerspricht unserer Voraussetzung; und damit haben wir gezeigt, dass G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist.

Bemerkung 5.33: Wir haben schon darauf hingewiesen, dass jede $\mathfrak{a}^*$-Gruppe eine $\mathfrak{d}^*\mathfrak{a}$-Gruppe ist; und wir wissen nicht, ob es $\mathfrak{d}^*\mathfrak{a}$-Gruppen gibt, die keine $\mathfrak{a}^*$-Gruppen sind. Aus Satz 5.29 ergibt sich, dass jede $\mathfrak{d}^*\mathfrak{a}$-Gruppe die folgende Eigenschaft hat:

$\mathfrak{ae}$: Absteigende Hauptfaktorenfolgen brechen nach endlich vielen Schritten ab und einfache Faktoren mit maximaler Untergruppe sind zyklisch von Primzahlordnung.

Wieder wissen wir nicht, ob jede $\mathfrak{ae}$-Gruppe auch eine $\mathfrak{d}^*\mathfrak{a}$-Gruppe ist. Satz 5.32 zeigt, dass jede $\mathfrak{ae}$-Gruppe eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist; und wir wissen wieder nicht, ob alle $\mathfrak{fnr}$-Gruppen der Bedingung $\mathfrak{ae}$ genügen.

Folgerung 5.34: *Die folgenden Eigenschaften der artinschen Gruppe G sind äquivalent:*

(1) *G ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

(2) *G ist auflösbar.*

(3) *Einfache Faktoren von G sind zyklisch von Primzahlordnung.*

(4) *Jeder einfache Faktor von G, der eine maximale Untergruppe besitzt, ist eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe.*

Beweis: Ist erstens G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe, so ergibt sich aus Minimalbedingung und Hilfssatz 3.6 die Auflösbarkeit von G. Ist zweitens G auflösbar, so ist auch jeder einfache Faktor von G auflösbar, also abelsch, also zyklisch von Primzahlordnung.

Zyklische Gruppen von Primzahlordnung sind $\mathfrak{fnr}$-Gruppen, so dass auch (4) aus (3) folgt. Gilt schliesslich (4), so folgt aus der Minimalbedingung, dass alle absteigenden Hauptfaktorenfolgen von G abbrechen [Spezialfall 5.22, B]. Aus Lemma 1.9 folgt weiter, dass einfache $\mathfrak{fnr}$-Gruppen mit maximalen Untergruppen zyklisch von Primzahlordnung sind. Anwendung des Satzes 5.32 ergibt schliesslich, dass G eine $\mathfrak{fnr}$-Gruppe ist: die Bedingungen (1)-(4) sind äquivalent.

LITERATURVERZEICHNIS

REINHOLD BAER

[0] *Nilgruppen,* Math. Zeitschr. 62, 402-437 (1955).
[1] *Classes of finite groups und their properties,* Illinois J. Math. 1, 115-187 (1957).
[2] *Gruppen mit Minimalbedingung,* Math. Ann. 150, 1-44 (1963).
[3] *Auflösbare, artinsche, noethersche Gruppen,* Math. Ann. 168, 325-363 (1967).
[4] *Supersoluble groups,* Proc. Amer. Math. Soc. 6, 16-32 (1955).
[5] *Überauflösbare Gruppen,* Hamburger Abhandlungen 23, 11-28 (1959).
[6] *Lokal noethersche Gruppen,* Math. Zeitschr. 66, 341-363 (1957).

M. HALL, Jr.

The Theory of Groups, New York, 1959.

HERMANN HEINEKEN

Eine Verallgemeinerung des Subnormalteilerbegriffs, Archiv der Mathematik 11, 244-252 (1960).

B. HUPPERT

Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen, Math. Zeitschr. 60, 409-434 (1954).

L. G. KOVÀCS & B. H. NEUMANN

Baur-Soluble groups of arbitrary height, Acta Sci. Math. 26, 1-2 (1965).

A. G. KUROSH

The Theory of Groups, Second English Edition, New York (1960).

D. H. MCLAIN

A characteristically-simple group, Proc. Cambridge Phil. Soc. 50, 641-642 (1954).

WILHELM SPECHT

Gruppentheorie, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1957.

S. N. TSCHERNIKOW

Über lokal auflösbare Gruppen, die der Minimalbedingung für Untergruppen genügen, Mat. Sbornik, 28, 119-129 (1951).

Manoscritto pervenuto in redazione il 3 marzo 1967