RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROLAND SCHMIDT

**Verbandshomomorphismen endlicher Gruppen**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 38 (1967), p. 331-357

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__331_0>

# VERBANDSHOMOMORPHISMEN ENDLICHER GRUPPEN

ROLAND SCHMIDT *)

## Einleitung

In ihrer Arbeit « Endomorphisms of Lattices » [**6**] hat *A.* Hostinsky den Begriff des Homomorphismus von Gruppen auf Verbände verallgemeinert und insbesondere Homomorphismen von modularen Verbänden untersucht.

In seiner Arbeit « On the lattice of subgroups of finite groups » [**11**] hat M. Suzuki Verbandsisomorphismen endlicher Gruppen untersucht und dabei unter anderem die folgenden Ergebnisse erhalten :

*Sei* $\sigma$ *ein Verbandsisomorphismus der endlichen Gruppe* $G$ *auf die Gruppe* $G\sigma$. *Dann gilt :*

**1**: *Ist* $G$ *eine* $p$*-Gruppe, dann ist auch* $G\sigma$ *eine* $p$*-Gruppe, ausser wenn* $G$ *zyklisch oder elementarabelsch ist* [**11**, Th. 3, S. 352].

**2** : *Ist* $\sigma$ *nicht indexerhaltend, dann existiert ein Primteiler* $p$ *von* $o(G)$, *so dass* $G$ *eine* $p'$*-abgeschlossene Gruppe mit zyklischem oder elementarabelschem* $G/G_{p'}$ *ist* [**10**, Th. 8, S. 45].

**3** : *Ist* $G$ *perfekt bzw. auflösbar, so ist* $G\sigma$ *ebenfalls perfekt bzw. auflösbar* [**11**, Th. 12, S. 359].

Ziel unserer Arbeit ist es, diese Sätze auf den Fall der Verbandshomomorphismen (im Sinne der Hostinskyschen Definition) zu verallgemeinern. Es wird sich zeigen, dass das für eine gewisse Klasse

---

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität, Frankfurt a. M., Germania occidentale

von Verbandshomomorphismen von Gruppen $G$ möglich ist, nämlich für die, deren Kern (s. Definition 1.2) eine quasinormale Untergruppe von $G$ ist.

Um diese Verallgemeinerungen durchführen zu können, müssen wir zunächst einige vorbereitende Sätze über Verbandshomomorphismen von Gruppen beweisen, die sogar für Homomorphismen beliebiger Verbände gelten. Deshalb beschäftigen wir uns in Teil I der Arbeit allgemein mit Homomorphismen von Verbänden, und wir beschränken uns dabei auf endliche Verbände, da wir uns später nur für Verbandshomomorphismen endlicher Gruppen interessieren werden. (In unendlichen Verbänden gelten einige unserer Sätze nicht, z. B. der « Homomorphiesatz » für Verbände (Satz 1.1), der den Homomorphiesatz für Gruppen verallgemeinert und der grundlegend für alles Folgende ist.)

In Teil II der Arbeit werden dann die erwähnten Suzukischen Sätze verallgemeinert. Wir erhalten dabei unter anderem folgende Ergebnisse:

*Sei $\sigma$ ein Verbandshomomorphismus der endlichen Gruppe $G$ auf die Gruppe $G\sigma$ und sei der Kern $K = K(\sigma)$ von $\sigma$ quasinormal in $G$. Dann gilt:*

**1**: (a) *Ist* $\mathbf{o}(G\sigma) = p^n$ *und* $[G:K] \neq p^n$ *($p$ Primzahl), so ist $G\sigma$ zyklisch oder elementarabelsch* (Satz. 2.1, (b)).

(b) *Ist* $[G:K] = p^n$ *und* $\mathbf{o}(G\sigma) \neq p^n$, *so ist $G\sigma$ zyklisch oder elementarabelsch* (Satz 2.2).

**2**: *Ist $\sigma$ nicht indexerhaltend, dann existiert ein Primteiler $p$ von $\mathbf{o}(G\sigma)$, so dass $G\sigma$ eine $p'$-abgeschlossene Gruppe mit zyklischem oder elementarabelschem $G\sigma/(G\sigma)_{p'}$ ist* (Satz 2.3).

**3**: *Ist $K_1$ das Herz von $K$, so gilt:*

(a) *Ist $G/K_1$ perfekt, so ist auch $G\sigma$ perfekt. Ist $G\sigma$ perfekt, so ist $K_1 = K$ und $G/K$ perfekt* (Satz 2.4).

(b) *$G\sigma$ ist dann und nur dann auflösbar, wenn $G/K_1$ auflösbar ist* (Satz 2.5).

Zum Beweis dieser Sätze werden im allgemeinen die Suzukischen Sätze und Methoden benutzt.

Herrn Prof. Dr. R. Baer und Herrn Dr. O. H. Kegel bin ich für ihre Ratschläge und Hinweise zu grossem Dank verpflichtet.

## I. — Homomorphismen endlicher Verbände.

### 1.1. Bezeichnungen.

Wir betrachten nur endliche Verbände; « Verband » bedeutet also immer endlicher Verband.

Seien $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ Verbände, $U, V$ Elemente von $\mathfrak{X}$ (kurz: $U, V \in \mathfrak{X}$) mit $U \subseteq V$ und $\alpha$ bzw. $\beta$ Abbildungen von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ bzw. von $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{Z}$. Dann bezeichnen wir mit

$I_x$ das Einselement von $\mathfrak{X}$,

$0_x$ das Nullelement von $\mathfrak{X}$,

$[V/U]$ den Verband aller $W \in \mathfrak{X}$ mit $U \subseteq W \subseteq V$,

$\alpha\beta$ die Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Z}$, die durch Hintereinanderausführen der Abbildungen $\alpha$ und $\beta$ entsteht.

### 1.2. Grundlegende Definitionen.

Definition 1.1: (*a*) Ein *Homomorphismus* des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ ist eine eindeutige Abbildung $\sigma$ von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ mit:

(1) zu jedem $V \subseteq I_x \sigma \in \mathfrak{Y}$ existiert ein $U \in \mathfrak{X}$ mit $U\sigma = V$,

(2) $(U \cup V)\sigma = U\sigma \cup V\sigma$ für alle $U, V \in \mathfrak{X}$ und

(3) ist $U\sigma = V\sigma$, so existieren $U', V' \in \mathfrak{X}$ mit $U'\sigma = V'\sigma = 0_y$ und $U \cup U' = V \cup V'$.

(b) Ein Homomorphismus $\sigma$ heisst *ausschöpfend*, wenn gilt:

(1′) zu jedem $V \subseteq W\sigma$ ($W \in \mathfrak{X}$, $V \in \mathfrak{Y}$) existiert ein $U \in \mathfrak{X}$ mit $U \subseteq W$ und $U\sigma = V$.

Die hier gegebene Definition des Homomorphismus ist eine leichte Abschwächung der Definition von A. Hostinsky (für endliche Verbände) [s. **6**, S. 332]. Nach der üblichen Definition [s. **4**, S. 16] ist ein Homomorphismus des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$, die Vereinigung und Durchschnitt erhält. Unser Homomorphiebegriff deckt sich also zwar nicht mit dem in der Verbandstheorie üblichen, wohl aber mit dem in der Gruppentheorie gebräuchlichen, und ist damit für Anwendungen in der Gruppentheorie geeigneter: während nämlich ein Homomorphismus $\alpha$ einer Gruppe $G$ in eine andere $H$ im allgemeinen keinen Homomorphismus im üblichen Sinn des Untergruppenverbandes von $G$ in den von $H$ induziert — D. G. Higman [s. **5**, Th. 2.1, S. 471] und G. Zappa [s. **12**, Teor., S. 191] zeigten, dass das nur in ganz speziellen Fällen geschieht —, induziert $\alpha$ immer einen Homomorphismus im Hostinskyschen Sinne des Untergruppenverbandes von $G$ in den von $H$, wie man leicht zeigt. Wir werden uns nur mit Homomorphismen im Sinne unserer Definition 1.1 beschäftigen; es kann also keine Verwirrung durch die gleiche Benennung der beiden verschiedenen Begriffe entstehen.

DEFINITION 1.2: Der *Kern* $K(\sigma)$ eines Homomorphismus $\sigma$ des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ ist die Vereinigung aller $U \in \mathfrak{X}$ mit $U\sigma = 0_y$.

LEMMA 1.1: *$\sigma$ sei ein Homomorphismus des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$. Dann gilt für $U, V \in \mathfrak{X}$:*

$$\text{(i)} \qquad U \subseteq V \Longrightarrow U\sigma \subseteq V\sigma,$$

$$\text{(ii)} \qquad U\sigma = 0_y \Longleftrightarrow U \subseteq K(\sigma),$$

$$\text{(iii)} \qquad U\sigma = V\sigma \Longleftrightarrow U \cup K(\sigma) = V \cup K(\sigma).$$

*Beweis*: (i) folgt aus Def. 1.1, (2). (ii) ist triviale Folge von Def. 1.1, (2), Def. 1.2 und Lemma 1.1, (i). (iii) folgt aus Def. 1.1, (2) und (3) sowie Lemma 1.1, (ii).

DEFINITION 1.3: Ein Homomorphismus $\sigma$ des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ ist ein

(a) *Epimorphismus*, wenn $I_x\sigma = I_y$ ist,
(b) *Endomorphismus*, wenn $\mathfrak{X} = \mathfrak{Y}$ ist,
(c) *Isomorphismus*, wenn $I_x\sigma = I_y$ und $K(\sigma) = 0_x$ ist.

Es lässt sich leicht zeigen, dass unser Isomorphiebegriff mit den anderen in der Verbandstheorie gebräuchlichen Isomorphiebegriffen [s. **4**, S. 16] zusammenfällt.

### 1.3. Der Homomorphiesatz.

Wir geben nun eine Verallgemeinerung der Homomorphiesätze für Gruppen auf Homomorphismen von Verbänden.

LEMMA 1.2 : *Sei* $\mathfrak{X}$ *ein Verband und* $K \in \mathfrak{X}$.
*Dann ist die Abbildung*

$$\varphi_K : \mathfrak{X} \ni U \longrightarrow U\varphi_K = U \cup K \in [I_x/K]$$

*ein Epimorphismus von* $\mathfrak{X}$ *auf* $[I_x/K]$ *mit Kern* $K$.

*Beweis:* Man verifiziert ohne Mühe alle in Definition 1.1 und 1.2 geforderten Eigenschaften für $\varphi_K$.

SATZ 1.1. : *Sei* $\sigma$ *ein Homomorphismus des Verbandes* $\mathfrak{X}$ *in den Verband* $\mathfrak{Y}$ *mit Kern* $K = K(\sigma)$.
*Dann induziert* $\sigma$ *einen Isomorphismus* $\bar{\sigma}$ *von* $[I_x/K]$ *auf den Verband* $[I_x \sigma/0_y]$ *durch*

$$\bar{\sigma} : [I_x/K] \ni U \longrightarrow U\sigma \in [I_x \sigma/0_y],$$

*und es ist* $\sigma = \varphi_K \bar{\sigma}$, *wo* $\varphi_K$ *der in Lemma* 1.2 *definierte Epimorphismus von* $\mathfrak{X}$ *auf* $[I_x/K]$ *ist.*

*Beweis:* Die Abbildung $\bar{\sigma}$ ist wegen Lemma 1.1, (i) eine eindeutige Abbildung von $[I_x/K]$ in $[I_x \sigma/0_y]$. Zu zeigen sind zunächst (1), (2) und (3) von Definition 1.1 für $\bar{\sigma}$. Ist $V \subseteq I_x \bar{\sigma}$, dann existiert nach (1) von Def. 1.1 ein $U_1 \in \mathfrak{X}$ mit $U_1 \sigma = V$. Für $U = U_1 \cup K$ gilt dann $U \in [I_x/K]$ und $U\bar{\sigma} = V$, womit (1) gezeigt ist. (2) ist trivial. Ist $U\bar{\sigma} = V\bar{\sigma}$ $(U, V \in [I_x/K])$, dann ist $U\sigma = V\sigma$, also $U \cup K = V \cup K$. Da $K \in [I_x/K]$ und $K\bar{\sigma} = 0_y$ ist, ist (3) für $U' = V' = K$ erfüllt. Damit ist $\bar{\sigma}$ ein Homomorphismus von $[I_x/K]$ in $[I_x \sigma/0_y]$. Der Kern von $\bar{\sigma}$ ist $K$, d. h. das Nullelement von $[I_x/K]$. Da ferner $I_x\bar{\sigma} = I_x \sigma$ das Einselement von $[I_x \sigma/0_y]$ ist, ist also schliesslich $\bar{\sigma}$ nach Definition 1.3 ein Isomorphismus. Nach Lemma 1.1 ist ferner $U\sigma = (U \cup K)\sigma = U(\varphi_K \bar{\sigma})$ für alle $U \in \mathfrak{X}$. Damit ist $\sigma = \varphi_K \bar{\sigma}$, womit Satz 1.1 bewiesen ist.

Für das Folgende benötigen wir noch ein Lemma.

LEMMA 1.3: *Seien $\alpha$ bzw. $\beta$ Abbildungen der Verbände $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Y}$ bzw. $\mathfrak{Y}$ in $\mathfrak{Z}$. Dann gilt:*

(i) *Ist $\alpha$ Epimorphismus und $\beta$ Homomorphismus, dann ist $\alpha\beta$ Homomorphismus.*

(ii) *Ist $\alpha$ ausschöpfender Epimorphismus und $\beta$ ausschöpfender Homomorphismus, dann ist $\alpha\beta$ ausschöpfender Homomorphismus.*

*Beweis:* (i) Dass $\alpha\beta$ eindeutige Abbildung von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Z}$ ist, ist klar. Zu zeigen ist (1), (2), (3) von Definition 1.1 für $\alpha\beta$. Ist $V \subseteq I_x(\alpha\beta)$, so existiert ein $U_1 \subseteq I_x \alpha \in \mathfrak{Y}$ mit $U_1 \beta = V$ und dazu ein $U_2 \in \mathfrak{X}$ mit $U_2 \alpha = U_1$, also $U_2(\alpha\beta) = V$. Damit ist (1) gezeigt. (2) ist trivial. Seien $U, V \in \mathfrak{X}$ mit $U(\alpha\beta) = V(\alpha\beta)$ und sei $R = \bigcup_{W(\alpha\beta)=0_z} W$. Dann ist $R(\alpha\beta) = 0_z$ und $((U \cup R)\alpha)\beta = ((V \cup R)\alpha)\beta$. Nach Lemma 1.1 folgt $(U \cup R)\alpha = (V \cup R)\alpha$ (da $K(\beta) \subseteq R\alpha$ ist) und schliesslich $U \cup R = V \cup R$, womit (3) gezeigt ist. Damit ist $\alpha\beta$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{X}$ in $\mathfrak{Z}$.

(ii) Zu zeigen ist wegen (i) nur, dass $\alpha\beta$ ausschöpfend ist. Sei also $V \subseteq W(\alpha\beta)$ $(W \in \mathfrak{X})$. Dann existiert, da $\beta$ ausschöpfend ist, ein $U_1 \subseteq W\alpha$ mit $U_1\beta = V$ und, da $\alpha$ ausschöpfend ist, ein $U_2 \subseteq W$ mit $U_2\alpha = U_1$, also $U_2(\alpha\beta) = V$. Damit ist (ii) gezeigt.

BEMERKUNG: Die Voraussetzung « $\alpha$ Epimorphismus » lässt sich nicht zu « $\alpha$ Homomorphismus » abschwächen. Es braucht nicht einmal das Produkt zweier ausschöpfender Endomorphismen eines Verbandes wieder ein Endomorphismus zu sein, selbst wenn der Verband der Untergruppenverband einer Gruppe ist. Dies zeigt das folgende

BEISPIEL: Sei $G$ das direkte Produkt einer elementarabelschen Gruppe $R$ der Ordnung 4 und einer Gruppe $S$, die isomorph zur alternierenden Gruppe von 4 Elementen ist, und sei $\mathfrak{X}$ der Untergruppenverband von $G$. Sei weiter $U$ die Untergruppe der Ordnung 4 von $S$ und $V$ das (direkte) Produkt von $R$ und einer Untergruppe der Ordnung 3 von $S$. Dann ist $U \cap V = 0$. Sei weiter $\alpha = \varphi_s \sigma$, wobei $\sigma$ irgendein Isomorphismus des Verbandes $[G/S]$ auf $[U/0]$ ist, und $\beta = \varphi_v \tau$, wobei $\tau$ ein Isomorphismus von $[G/V]$ auf $[W/0]$

($W$ eine Untergruppe der Ordnung 2 von $G$) ist. Dann sind $\alpha$ und $\beta$ ausschöpfende Endomorphismen von $\mathfrak{X}$; wäre aber $\alpha\beta$ ebenfalls ein Endomorphismus von $\mathfrak{X}$, dann müsste nach Satz 1.1 $[G/S]$ isomorph zu $[W/0]$ sein, was sicher nicht der Fall ist.

### 1.4 Ausschöpfende Homomorphismen.

SATZ 1.2: *Sei $\sigma$ ein Homomorphismus des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ mit Kern $K = K(\sigma)$.*

*Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

(i) *$\sigma$ ist ausschöpfend,*

(ii) *$\varphi_K$ ist ausschöpfend,*

(iii) *$(U \cap V) \cup K = (U \cup K) \cap V$ für alle $U, V \in \mathfrak{X}$ mit $K \subseteq V$.*

*Beweis*: Zunächst zeigen wir, dass (ii) aus (i) folgt, nehmen also an, dass $\sigma$ ausschöpfend ist. Sei weiter $V \in [I_X/K]$ und $W \in \mathfrak{X}$ mit $V \subseteq W\varphi_K$. Dann ist $V\sigma \subseteq W\sigma$; da $\sigma$ ausschöpfend ist, existiert also ein $U \in \mathfrak{X}$ mit $U \subseteq W$ und $U\sigma = V\sigma$. Nach Lemma 1.1 ist $U\varphi_K = V\varphi_K = V$; $\varphi_K$ ist also ausschöpfend.

Nun nehmen wir an, dass (ii) erfüllt, $\varphi_K$ also ausschöpfend ist. Sei dann $U, V \in \mathfrak{X}$ mit $K \subseteq V$. Dann ist $K \subseteq (U \cup K) \cap V \subseteq U \cup K$; da $\varphi_K$ ausschöpfend ist, existiert also ein $W \subseteq U$ mit $W \cup K = (U \cup K) \cap V$. Damit ist $W \subseteq U \cap V$, womit $(U \cup K) \cap V \subseteq (U \cap V) \cup K$ folgt. Die umgekehrte Ungleichung gilt bekanntlich immer [s. 4, S. 43]. Damit ist (iii) aus (ii) hergeleitet.

Als letztes nehmen wir an, dass (iii) gilt, und wollen zeigen, dass $\sigma$ ausschöpfend ist. Sei dazu $V \in \mathfrak{Y}$, $W \in \mathfrak{X}$ mit $V \subseteq W\sigma$. Sei $U = V\bar{\sigma}^{-1} \cap W$. Dann ist $U \subseteq W$ und nach Satz 1.1 und (iii) $U\sigma = ((V\bar{\sigma}^{-1} \cap W) \cup K)\bar{\sigma} = ((W \cup K) \cap V\bar{\sigma}^{-1})\bar{\sigma} = V$. Damit ist gezeigt, dass (i) aus (iii) folgt, womit Satz 1.2 bewiesen ist.

DEFINITION 1.4: Sei $\sigma$ ein Homomorphismus des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ und $L \in \mathfrak{X}$. Dann ist $\sigma_L$ die *Beschränkung von $\sigma$ auf* $[L/0_X]$:

$$\sigma_L: \quad [L/0_X] \ni U \longrightarrow U\sigma \in \mathfrak{Y}.$$

Es braucht $\sigma_L$ nicht für jedes $L \in \mathfrak{X}$ ein Homomorphismus zu sein. Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wann das der Fall ist.

SATZ 1.3: *Die folgenden Eigenschaften des Homomorphismus $\sigma$ des Verbandes $\mathfrak{X}$ in den Verband $\mathfrak{Y}$ sind äquivalent:*

(a) *$\sigma_L$ ist für jedes $L \in \mathfrak{X}$ ein Homomorphismus von $[L/0_X]$ in $\mathfrak{Y}$.*

(b) *$\sigma_L$ ist für jedes $L \in \mathfrak{X}$ ein ausschöpfender Homomorphismus von $[L/0_X]$ in $\mathfrak{Y}$.*

(c) *Der Kern $K = K(\sigma)$ von $\sigma$ bildet mit jedem $U \in \mathfrak{X}$ ein modulares Paar von Elementen von $\mathfrak{X}$, d.h. es gilt:*

(i) $(U \cap V) \cup K = (U \cup K) \cap V$ *für alle* $U, V \in \mathfrak{X}$ *mit* $K \subseteq V$

*und*

(ii) $(U \cup K) \cap L = U \cup (L \cap K)$ *für alle* $U, L \in \mathfrak{X}$ *mit* $U \subseteq L$.

*Beweis*: Dass (a) aus (b) folgt, ist trivial.
Wir wollen nun (c) aus (a) folgern, nehmen also an, dass $\sigma_L$ für jedes $L \in \mathfrak{X}$ ein Homomorphismus ist. Ist dann $W \in \mathfrak{X}$, $V \in \mathfrak{Y}$ mit $V \subseteq W\sigma$, so existiert, da $\sigma_W$ ein Homomorphismus ist, ein $U \in [W/0_X]$ mit $U\sigma_W = U\sigma = V$. Damit ist $\sigma$ ausschöpfend, und (i) von (c) folgt aus Satz 1.2. Nach Lemma 1.1 ist $K(\sigma_L) \subseteq L \cap K$, andererseits aber $(L \cap K)\sigma_L = 0_y$; es ist also $K(\sigma_L) = L \cap K$. Sei nun $U, L \in \mathfrak{X}$ mit $U \subseteq L$. Dann ist $U \cup (L \cap K) \subseteq (U \cup K) \cap L \subseteq$ $\subseteq (U \cup (L \cap K)) \cup K$, nach Lemma 1.1 also $(U \cup (L \cap K))\sigma =$ $= ((U \cup K) \cap L)\sigma$ und damit $(U \cup (L \cap K))\sigma_L = ((U \cup K) \cap L)\sigma_L$. Aus Lemma 1.1 und $K(\sigma_L) = L \cap K$ folgt schliesslich $U \cup (L \cap K) =$ $= (U \cup K) \cap L$, womit auch (ii) von (c) aus (a) hergeleitet ist.

Wir nehmen nun an, dass (c) gilt und wollen (b) zeigen. Sei dazu $L \in \mathfrak{X}$; dann sind (1′), (2), (3) von Definition 1.1 für $\sigma_L$ nachzuweisen. Wegen (i) von (c) ist $\sigma$ ausschöpfend (Satz 1.2). Ist also $V \in \mathfrak{Y}$, $W \in [L/0_X]$ mit $V \subseteq W\sigma_L$, so existiert ein $U \in \mathfrak{X}$ mit $U \subseteq W$ und $U\sigma = U\sigma_L = V$. Damit ist (1′) gezeigt. (2) ist trivial. Sei schliesslich $U$, $V \in [L/0_X]$ mit $U\sigma_L = V\sigma_L$, also $U\sigma = V\sigma$. Nach Lemma 1.1 und (ii) von (c) folgt $U \cup (L \cap K) = V \cup (L \cap K)$, ausserdem $(L \cap K)\sigma_L = 0_y$; (3) ist also für $\sigma_L$ erfüllt. Damit ist auch (b) aus (c) gefolgert, womit Satz 1.3 bewiesen ist.

BEMERKUNG: Ist $\sigma_L$ ein Homomorphismus, so ist $K \cap L$ der Kern von $\sigma_L$.

## II. Verbandshomomorphismen (zwischen Gruppen) mit quasinormalem Kern.

### 2.1. Bezeichnungen, Definitionen und Vorbemerkungen.

Wir betrachten nur endliche Gruppen; « Gruppe » bedeutet also immer endliche Gruppe.

Sei $G$ eine Gruppe, $U$, $V$ Untergruppen von $G$ ($U, V \subseteq G$) und $g$ ein Element von $G$ ($g \in G$). Dann bezeichnen wir mit

| | |
|---|---|
| $\mathbf{o}(G)$ | die Ordnung von $G$, |
| $\Phi(G)$ | die Frattiniuntergruppe von $G$ (= Durchschnitt aller maximalen Untergruppen von $G$), |
| $\mathcal{V}(G)$ | den Untergruppenverband von $G$, |
| $[G : U]$ | den Index von $U$ in $G$, |
| $[G/U]$ | den Verband aller $W \in \mathcal{V}(G)$ mit $U \subseteq W \subseteq G$, |
| $U \cup V$ | die minimale $U$ und $V$ enthaltende Untergruppe von $G$, |
| $U \cap V$ | den (mengentheoretischen) Durchschnitt von $U$ und $V$, |
| $UV$ | die Menge aller $uv$ mit $u \in U$, $v \in V$, |
| $U^g$ | die Menge aller $g^{-1}ug$ mit $u \in U$. |

Weiter bedeutet

$U \lhd G$ : $U$ ist normal in $G$,

$U \overline{\lhd} G$ : $U$ ist nicht normal in $G$,

$U \underset{q}{\lhd} G$ : $U$ ist quasinormal in $G$, d.h. $UW = WU$ für alle $W \subseteq G$.

Das *Herz* von $U$ (genauer *G-Herz* von $U$) ist der Durchschnitt aller $U^x$ mit $x \in G$. (Es ist das Produkt aller in $U$ enthaltenen Normalteiler von $G$, also der maximale in $U$ enthaltene Normalteiler von $G$.)

$G$ heisst *perfekt*, wenn es keinen Normalteiler mit Primzahlindex in $G$ gibt.

$G$ heisst *$p'$-abgeschlossen* ($p$ Primzahl), wenn die Menge $G_{p'}$ der Elemente mit zu $p$ teilerfremder Ordnung eine (charakteristische) Untergruppe von $G$ ist.

$G$ ist eine *P-Gruppe* [s. **10**, S. 11], wenn $G$ entweder eine elementarabelsche $p$-Gruppe ist oder von Elementen $a_1, \ldots, a_n$ und $b$ erzeugt wird mit $a_i^p = b^q = 1$, $a_i a_j = a_j a_i$, $b a_i b^{-1} = a_i^r$ mit $r^q \equiv 1 \ (p)$, $r \not\equiv 1 \ (p)$, $p, q$ Primzahlen, $p \neq q$.

DEFINITION 2.1 : Ein *Verbandshomomorphismus* (*-epi-, -endo-, -isomorphismus*) (*kurz: $\mathfrak{V}$-Homomorphismus, ...*) einer Gruppe $G$ in eine Gruppe $H$ ist ein Homomorphismus (Epi-, Endo-, Isomorphismus) des Untergruppenverbandes von $G$ in den von $H$.

Sei $\sigma$ ein $\mathfrak{V}$-Homomorphismus von $G$ in $H$ mit Kern $K$. Dann bezeichne

$\bar{\sigma}$ den nach Satz 1.1 von $\sigma$ in $[G/K]$ induzierten Isomorphismus,

$R'$ : $R\bar{\sigma}^{-1}$ für $R \subseteq G\sigma$,

$G \underset{V}{\simeq} H$: $G$ ist verbandsisomorph zu $H$ (d. h. $\sigma$ ist ein $\mathfrak{V}$-Isomorphismus).

Satz 1.3 zeigt, dass $\sigma$ nur dann in jeder Untergruppe von $G$ wieder einen $\mathfrak{V}$-Homomorphismus induziert, wenn der Kern von $\sigma$ modular in $G$ ist, d. h. mit jeder Untergruppe von $G$ ein modulares Paar von Untergruppen bildet. Man wird deshalb, wenn man interessante Ergebnisse erhalten will, voraussetzen müssen, dass $K$ modular in $G$ ist. Modulare Untergruppen einer Gruppe brauchen nicht subnormal zu sein; da man aber über modulare (und nicht notwendig subnormale) Untergruppen von Gruppen recht wenig weiss, werden wir uns im folgenden auf $\mathfrak{V}$-Homomorphismen $\sigma$ beschränken, deren Kerne modular und subnormal und somit bekanntlich (s. etwa [**3**, Satz 7]) quasinormal sind. Damit ist für jedes $L \subseteq G$ $\sigma_L$ ein $\mathfrak{V}$-Homomorphismus mit Kern $K \cap L$, also mit quasinormalem Kern [s. **8**, S. 208]. Das wird bei unseren Induktionsbeweisen immer wieder benutzt.

Ausserdem wird beim Beweis unserer Sätze der folgende Satz von Ito und Szép (s. [**7**, S. 168]; ein ähnlicher Satz wurde von Kegel [**8**, Satz 3] bewiesen) eine wichtige Rolle spielen.

LEMMA 2.1 : (Ito, Szép) *Sei $K$ ein Quasinormalteiler der endlichen Gruppe $G$ und sei $K_1$ das Herz von $K$. Dann gilt:*

(a) *$K/K_1$ ist nilpotent,*

(b) *$G$ enthält zu jedem Primteiler $p$ von $[K : K_1]$ einen $K$ enthaltenden Normalteiler $N$ mit $[G : N] = p$.*

*Bemerkung*: 1. Ito und Szép setzen noch voraus, dass $K$ kein Normalteiler von $G$ ist. Ist aber $K \lhd G$, dann ist $K_1 = K$, und (a) und (b) sind trivialerweise richtig.

2. Die Behauptung $N \supseteq K$ in (b) fehlt in der Formulierung des Satzes bei Ito und Szép. Sie beweisen sie aber mit. Sie zeigen: ist $p$ ein Primteiler von $[K : K_1]$, so existiert ein Normalteiler $H/K_1$ von $G/K_1$, dessen Faktorgruppe eine $p$-Gruppe ist, so dass $(KH)/K_1$ echt in $G/K_1$ enthalten ist [a. a. O., S. 169]. Dann existiert eine maximale Untergruppe $N$ von $G$, die $KH$ enthält; $N$ hat natürlich die in (b) genannten Eigenschaften.

## 2.2. $\mathcal{V}$-Homomorphismen auf $p$ Gruppen.

Wir wollen uns in diesem Abschnitt mit $\mathcal{V}$-Homomorphismen mit quasinormalem Kern auf $p$-Gruppen beschäftigen.

SATZ 2.1 : *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus der endlichen Gruppe $G$ auf die $p$-Gruppe $G\sigma$ der Ordnung $p^n$ und sei $K(\sigma) \lhd_q G$.*

*Dann gilt:*

(a) *$K(\sigma) \lhd G$ oder $[G : K(\sigma)] = q^n$, $q$ Primzahl.*

(b) *Ist $[G : K(\sigma)] \neq p^n$, so ist $G\sigma$ zyklisch oder elementarabelsch.*

*Beweis*: Wir beweisen zunächst (a). Wir nehmen an, (a) sei falsch. Seien dann $G, \sigma$ unter allen Gegenbeispielen zu (a) minimal, d. h. $G\sigma$ habe unter allen $p$-Gruppen, zu denen es ein $G$ und ein $\sigma$ gibt, so dass der Satz falsch wird, minimale Ordnung $p^n$, und $G$ sei unter den zu $G\sigma$ gehörigen Urbildgruppen, für die der Satz falsch wird, erneut minimal. Wir zeigen nun

(i) $G\sigma$ ist nicht zyklisch.

*Bew.*: Angenommen $G\sigma$ wäre zyklisch. Sei $R$ die maximale Untergruppe von $G\sigma$. Dann ist $R' = R\bar{\sigma}^{-1}$ die einzige maximale Untergruppe von $G$, die $K = K(\sigma)$ enthält. Wäre $R'$ einzige maximale Untergruppe von $G$, so folgte $G$ zyklisch, also $K \lhd G$, was nicht geht. Sei also $S$ eine weitere maximale Untergruppe von $G$, $S \neq R'$. Dann ist $K \not\subseteq S$, also $K \cup S = G$. Damit ist $S\sigma_S = G\sigma$; wegen der Minimalität von $G$ ist also $K \cap S \lhd S$ oder $[S : K \cap S] = q^n, q$ Primzahl. Im ersten Falle ist nach Satz 1.1 $S/(K \cap S) \underset{\vee}{\approx} G\sigma$, also $S/(K \cap S)$ verbandsisomorph zu einer zyklischen Gruppe der Ordnung $p^n$, damit selbst eine zyklische Gruppe der Ordnung $q^n$, $q$ Primzahl [s. **1**, (2.2), S. 5]. In jedem Fall ist also $[S : K \cap S] = q^n$, $q$ Primzahl. Da $K \underset{q}{\lhd} G$ ist, ist $q^n = [S : K \cap S] = [K \cup S : K] = [G : K]$. Das ist ein Widerspruch, womit (i) gezeigt ist.

Sei nun $K_1$ das Herz von $K$. Da $G/K_1$ und der von $\sigma$ in $G/K_1$ induzierte $\mathcal{V}$-Homomorphismus ein Gegenbeispiel zur Behauptung darstellen, folgt $K_1 = 1$ wegen der Minimalität von $G$. Es ist

(ii) $K$ $q$-Gruppe, $q$ Primzahl.

*Bew.*: Angenommen $K$ wäre keine Gruppe mit Primzahlpotenzordnung. Dann gäbe es also zwei Primzahlen $p_1 \neq p_2$, die $\mathbf{o}(K)$ teilen. Nach dem Lemma von Ito und Szép existierten Normalteiler $N_i \supseteq K$ von $G$ mit $[G : N_i] = p_i$ $(i = 1, 2)$. Sei $M$ eine weitere maximale Untergruppe von $G$ mit $K \subseteq M$. Dann teilt $[M : M \cap N_i] = [G : N_i] = p_i$ den Index von $K$ in $M$ $(i = 1, 2)$. Damit ist $[M : K]$ keine Primzahlpotenz; da $G$ minimales Gegenbeispiel zu (*a*) war, folgt also $K \lhd M$. Somit ist $K \mathrel{\overline{\lhd}} N_i$ $(i = 1, 2)$; nach Induktionsannahme ist also $[N_1 : K] = p_2^{n-1}$ und $[N_2 : K] = p_1^{n-1}$. Da aber $K \subset N_1 \cap N_2$ ist, ist $p_1 = p_2$, was nicht der Fall sein sollte. Damit ist (ii) gezeigt.

Nach dem Lemma von Ito und Szép existiert nun ein Normalteiler $N$ von $G$ mit $K \subseteq N$ und $[G : N] = q$. Es ist

(iii) $K \lhd N$ und $[M : K] = q^{n-1}$ für jede maximale Untergruppe $M \neq N$ von $G$ mit $K \subseteq M$.

*Bew.*: Angenommen $K \mathrel{\overline{\lhd}} N$. Nach Induktionsannahme ist dann $[N : K] = r^{n-1}$, $r$ Primzahl. Sei $K_2$ das $N$-Herz von $K$. Da $q$ die Ordnung von $K/K_2$ teilt, existiert nach Lemma 2.1 ein Normalteiler

$N_1$ von $N$ mit $[N : N_1] = q$ und $K \subseteq N_1$. Damit ist $r = q$, also $[G : K] = q^n$, was ja nicht der Fall ist. Es ist also $K \lhd N$. Ist nun $M$ eine maximale Untergruppe von $G$ mit $K \subseteq M \neq N$, so ist $K \overline{\lhd} M$, also nach Induktionsannahme $[M : K] = q^{n-1}$, da $q = [M : M \cap N]$ ein Teiler von $[M : K]$ ist.

Wir zeigen schliesslich:

(iv) $N/K$ ist nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $p^{n-2}r$ ($p > r$, $r$ Primzahl); ferner ist $n \geq 3$ und $q = p$ oder $q = r$.

*Bew.*: Nach (i) ist $G\sigma$ nicht zyklisch, somit $n \neq 1$. Wäre $n = 2$, so wäre $K \lhd G$. Es ist also $n \geq 3$.

Daher teilt nach (iii) $q$ die Ordnung von $N/K$. $N/K$ kann aber keine $q$-Gruppe sein, da sonst $[G : K] = q^n$ folgen würde. Somit ist $N/K$ überhaupt keine Gruppe mit Primzahlpotenzordnung. Andererseits ist $N/K$ verbandsisomorph zur $p$-Gruppe $N\sigma$ (der Ordnung $p^{n-1}$). Dann ist $N\sigma$ abelsche $P$-Gruppe [**10**, Th. 12, S. 12] und somit [**1**, Th. 11.2., S. 23] $N/K$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $p^{n-2}\,r$, $r < p$, $r$ Primzahl. Da $q$ ein Teiler von $o(N/K)$ ist, ist also $q = r$ oder $q = p$, womit (iv) bewiesen ist.

Wir nehmen nun zunächst an: $q = p$.

Dann sei $L/K$ die $p$-Sylowuntergruppe von $N/K$. $L/K$ hat dann die Ordnung $p^{n-2}$. Ferner ist nach (iii) $[M \cap N : K] = p^{n-2}$ für jede maximale Untergruppe $M$ von $G$ mit $K \subseteq M \neq N$, also $M \cap N = L$ für alle solchen $M$. Damit ist $L$ der Durchschnitt aller $K$ enthaltenden maximalen Untergruppen von $G$ und somit $L\sigma$ die Frattinigruppe $\Phi(G\sigma)$ von $G\sigma$. Es folgt $L \lhd G$ und $L\sigma \lhd G\sigma$. $\bar{\sigma}$ induziert also einen $\mathfrak{V}$-Isomorphismus von $G/L$ auf die elementarabelsche $p$-Gruppe $G\sigma/\Phi(G\sigma)$; $G/L$ ist also nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $pr, p > r$. $N/L$ ist dann eine $r$-Sylowgruppe von $G/L$, die normal in $G/L$ ist. Das widerspricht aber der Struktur der $P$-Gruppe.

Es ist also $q \neq p$, somit nach (iv) $q = r$.

Nach (iii) teilt dann $q^{n-2}$ die Ordnung von $N/K$; nach (iv) ist also $n = 3$. Wäre nun $\Phi(G\sigma) = 1$, dann existierten minimale Untergruppen $U_i$ von $G\sigma$ mit $\bigcup_i U_i = G\sigma$. Es wäre somit $K$ in jedem $U_i'$ maximale Untergruppe und Quasinormalteiler, also Normalteiler [s. **9**, Th. 16, S. 438]. Damit wäre schliesslich $K \lhd G$, was nicht der Fall ist. Es ist also $\Phi(G\sigma) \neq 1$. Sei $P = (\Phi(G\sigma))\,\bar{\sigma}^{-1}$. Dann ist $P \lhd G$

und $[G:P] = pq$. Damit ist $P/K$ ein Normalteiler vom Index $p$ in $N/K$; einen solchen Normalteiler gibt es aber in einer nichtabelschen Gruppe der Ordnung $pq\,(p > q)$ nicht.

Das ist ein endgültiger Widerspruch, womit Satz 2.1, (a) bewiesen ist.

(b) ist eine einfache Folgerung aus (a). Nach (a) ist $K = K(\sigma) \lhd G$ oder $[G:K] = q^n$, $q$ Primzahl. Im ersten Fall induziert $\bar{\sigma}^{-1}$ einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $G\sigma$ auf $G/K$, also einer $p$-Gruppe auf eine Gruppe, die keine $p$-Gruppe ist. Nach einem Satz von Suzuki [**10**, Th. 12, S. 12] ist $G\sigma$ dann zyklisch oder elementarabelsch. Im zweiten Fall ist $[G:K] = q^n$, $q \neq p$, und wir können annehmen, dass $K \overline{\lhd} G$ ist. Wir können ausserdem annehmen, dass das Herz $K_1$ von $K$ gleich 1 ist, da sich die weiteren Betrachtungen in $G/K_1$ abspielen. Dann ist nach dem Lemma von Ito und Szép $K$ und damit auch $G$ eine $q$ Gruppe. Wäre $G\sigma$ nicht zyklisch, dann existierte ein Normalteiler $N$ von $G\sigma$ mit elementarabelscher Faktorgruppe der Ordnung $p^2$. Da $G$ eine $q$-Gruppe ist, wäre $N' \lhd G$. Damit induzierte $\bar{\sigma}$ einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $G/N'$ auf $G\sigma/N$, also einer elementarabelschen Gruppe der Ordnung $q^2$ auf eine elementarabelsche Gruppe der Ordnung $p^2$. Das ist aber für $p \neq q$ unmöglich. Es ist also $G\sigma$ zyklisch, was zu zeigen war.

Damit ist Satz 2.1 bewiesen.

Satz 2.2: *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus der endlichen Gruppe $G$ auf $G\sigma$ mit $K(\sigma) \lhd_q G$ und $[G:K(\sigma)] = p^n$.*

*Dann ist $G\sigma$ $p$-Gruppe oder zyklische $q$-Gruppe, $q$ Primzahl (und damit $[G/K]$ Kette) oder nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $p^{n-1}q$, $p > q$ (und damit $K \lhd G$ und $G/K$ elementarabelsche $p$-Gruppe).*

*Beweis*: Ist $K = K(\sigma) \lhd G$, so ist Satz 2.2 triviale Folge eines Satzes von Suzuki [**10**, Th. 12, S. 12]. Sei also $K \overline{\lhd} G$. Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen des Satzes erfüllt sind und $G\sigma$ keine $p$-Gruppe ist. Wir können ausserdem wieder annehmen, dass das Herz $K_1$ von $K$ gleich 1 ist. Dann ist, da $[G:K] = p^n$ ist, $K$, also auch $G$, eine $p$-Gruppe (nach dem Lemma von Ito und Szép). Dann ist $\mathcal{V}(G)$ ein nach unten semimodularer Verband, dessen Intervalle alle irreduzibel sind [**10**, Prop. 1.5, S. 12]. Das gleiche gilt für $[G/K]$ und damit auch, nach Satz 1.1, für $\mathcal{V}(G\sigma)$. Nach Suzuki [**10**, Prop. 1.5., S. 12] ist dann entweder

(i) $G\sigma$ $q$-Gruppe ($q$ Primzahl), oder es gilt

(ii) $G\sigma$ besitzt einen Normalteiler $N$ mit $N$ abelsche $q$-Gruppe, $G\sigma/N$ zyklisch der Ordnung $r$ ($q, r$ Primzahlen), und es existiert ein $b \in G$ mit $bab^{-1} = a^s$, $a \in N$, wobei $s$ unabhängig von a und $s \not\equiv 1$, $s^r \equiv 1\ (q)$ ist.

Im Fall (i) ist $G\sigma$ zyklisch nach Satz 2.1, (*b*). Dann ist $[G/K]$ natürlich eine Kette.

Im Fall (ii) wollen wir zeigen, dass $N$ elementarabelsch ist. Angenommen $N$ enthielte Elemente der Ordnung $q^2$. Sei dann $N_1$ eine zyklische Untergruppe von $N$ der Ordnung $q^2$, sei $R$ eine $r$-Sylowgruppe von $G\sigma$ und sei $M = N_1 R$. Dann ist $\mathbf{o}(M) = q^2 r$ und $N_1 \lhd M$. Weiter enthält $M$ genau $q^2$ Untergruppen der Ordnung $r$, insgesamt also $q^2 + 1$ minimale Untergruppen. Damit wird $M$ Vereinigung minimaler Untergruppen, woraus $K \lhd M'$ folgt. $\bar{\sigma}$ induziert also einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus der $p$-Gruppe $M'/K$ auf $M$. Es folgt $p = q$, und, da $q > 2$ ist, ist die Anzahl der minimalen Untergruppen von $M'/K$ nach einem Satz von Kulakoff [s. **13**, S. 153] $\equiv p + 1\ (p^2)$, andererseits, wie eben gezeigt, gleich $p^2 + 1$. Das ist aber unmöglich. Damit ist $N$ elementarabelsch und daher $G\sigma$ Vereinigung minimaler Untergruppen. Es folgt $K \lhd G$, im Widerspruch zur Annahme $K \overline{\lhd}\, G$. Der Fall (ii) kann also nicht auftreten, womit Satz 2.2 bewiesen ist.

## 2.3. Singuläre $\mathcal{V}$-Homomorphismen.

DEFINITION 2.2: Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus der Gruppe $G$ in die Gruppe $H$ mit Kern $K$.

(a) $\sigma$ heisst *indexerhaltend*, wenn für alle $U \in \mathcal{V}(G)$ mit $K \subseteq U \subseteq G$ gilt: $[G : U] = [G\sigma : U\sigma]$.

(b) $\sigma$ heisst *singulär*, wenn $\sigma$ nicht indexerhaltend ist.

LEMMA 2.2: *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus der Gruppe $G$ auf die Gruppe $G\sigma$, sei $K(\sigma) \underset{q}{\lhd} G$ und sei $[S\bar{\sigma}^{-1} : K(\sigma)] = \mathbf{o}(S)$ für jede Sylowgruppe $S$ von $G\sigma$.*

*Dann ist $\sigma$ indexerhaltend.*

*Beweis:* Die Voraussetzungen vererben sich auf Untergruppen $U$ von $G$ mit $K(\sigma) = K \subseteq U$ und die darin induzierten $\mathfrak{V}$-Homomorphismen $\sigma_u$. Wir machen Induktion und haben daher nur zu zeigen, dass $[G : K] = \mathbf{o}(G\sigma)$ ist. Sei also $p$ irgendeine Primzahl und sei $p^n$ bzw. $p^m$ die maximale $p$-Potenz, die $\mathbf{o}(G\sigma)$ bzw. $[G : K]$ teilt. Sei $T$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Da $K \underset{q}{\triangleleft} G$ ist, ist $[T \cup K : K] = [T : T \cap K]$ eine $p$-Potenz, andererseits $p$ kein Teiler von $[G : T \cup K]$, also $[T \cup K : K] = p^m$. Ferner ist $(T \cup K)\sigma$ eine $p$-Gruppe, da eine $q$-Untergruppe von $(T \cup K)\sigma$ in einer $q$-Sylowgruppe $Q$ von $G\sigma$ enthalten wäre, für die die Bedingung $[Q' : K] = \mathbf{o}(Q)$ sicher verletzt wäre. Ist also $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G\sigma$, die $(T \cup K)\sigma$ enthält, dann ist $T \cup K \subseteq S'$. Da aber $[S' : K]$ eine $p$-Potenz ist, ist schliesslich $T \cup K = S'$, also $p^n = p^m$. Damit ist Lemma 2.2 gezeigt.

Definition 2.3: Sei $\sigma$ ein $\mathfrak{V}$-Homomorphismus der Gruppe $G$ in die Gruppe $H$ und $p$ eine Primzahl. Dann heisst

(a) $\sigma$ *singulär an der Stelle* $p$, wenn es eine $p$-Sylowgruppe $S$ von $G\sigma$ mit $[S\bar{\sigma}^{-1} : K(\sigma)] \neq \mathbf{o}(S)$ gibt,

(b) $\sigma$ *singulär von* 1. *Art an der Stelle* $p$, wenn $\sigma$ singulär an der Stelle $p$ ist und es keine $P$-Gruppe $T \subseteq G\sigma$ gibt, die eine $p$-Sylowgruppe $S$ von $G\sigma$ als echten Normalteiler enthält,

(c) $\sigma$ *singulär von* 2. *Art an der Stelle* $p$, wenn $\sigma$ singulär an der Stelle $p$, die Singularität aber nicht von 1. Art ist.

Lemma 2.2 besagt also, dass es, wenn $\sigma$ ein singulärer $\mathfrak{V}$-Homomorphismus mit quasinormalem Kern ist, eine Primzahl $p$ gibt, so dass $\sigma$ singulär an der Stelle $p$ ist. Es gilt aber sogar:

Lemma 2.3: *Sei $\sigma$ ein singulärer $\mathfrak{V}$-Homomorphismus der Gruppe $G$ auf $G\sigma$ mit quasinormalem Kern $K = K(\sigma)$.*

*Dann existiert eine Primzahl $p$, so dass $\sigma$ singulär von* 1. *Art an der Stelle $p$ ist.*

*Beweis:* [s. **10**, S. 43] Angenommen, das Lemma wäre falsch. Sei dann $\sigma$ ein $\mathfrak{V}$-Homomorphismus von $G$ auf $G\sigma$, der nicht indexerhaltend ist, dessen Singularitäten aber alle von 2. Art sind.

Nach Lemma 2.2 ist $[S' : K] \neq \mathbf{o}(S)$ für eine $q$-Sylowgruppe $S$ von $G\sigma$, $\sigma$ also singulär an der Stelle $q$. Da $\sigma$ nur Singularitäten 2. Art hat, existiert eine $P$-Gruppe $T \subseteq G\sigma$, in der $S$ ein echter Normalteiler ist. Die Ordnung von $T$ ist dann gleich $q^n r$, $r < q$, $r$ Primzahl. Da $T$ Vereinigung minimaler Untergruppen ist, ist $K \triangleleft T'$, also $T'/K$ eine $P$-Gruppe der Ordnung $q^{n+1}$ oder $q^n s$, $s < q$. Da aber $\sigma$ singulär an der Stelle $q$ ist, ist $T'/K$ keine $q$-Gruppe, also $\mathbf{o}(T'/K) = q^n s$. Sei $Q$ die Untergruppe von $G\sigma$, für die $Q'/K$ die $q$-Sylowuntergruppe von $T'/K$ ist. Dann ist $Q$ keine $q$-Gruppe, enthält also eine Untergruppe $R$ der Ordnung $r$. $R$ ist in einer $r$-Sylowgruppe $U$ von $G\sigma$ enthalten. Da $\mathbf{o}(R'/K) = q \neq r$ ist, ist $\sigma$ singulär an der Stelle $r$. Nach Voraussetzung ist die Singularität von 2. Art. Damit ist $U$ in einer $P$-Gruppe $V \subseteq G\sigma$ als echter Normalteiler enthalten, womit $r$ der grössere Primteiler von $\mathbf{o}(V)$ ist. Weiter ist wie oben $K \triangleleft V'$ und $V'/K$ $P$-Gruppe der Ordnung $r^m t$, $r > t$, $t$ Primzahl. Da aber $R \subseteq U \subseteq V$ ist, ist $q = [R' : K]$ ein Teiler der Ordnung von $V'/K$; es ist also $q = t$. Wir haben somit $r < q$ und $r > q$, was offensichtlich ein Widerspruch ist. Damit ist Lemma 2.3 bewiesen.

LEMMA 2.4: *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus mit quasinormalem Kern $K = K(\sigma)$ der Gruppe $G$ auf $G\sigma$, der singulär von* 1. *Art an der Stelle $p$ ist ($p$ Primzahl).*

*Dann ist $G\sigma$ $p'$-abgeschlossen.*

*Beweis:* Wir nehmen an, das Lemma sei falsch. Sei dann $G, \sigma$ ein minimales Gegenbeispiel, d. h. das Lemma für alle Gruppen $H$ mit $\mathbf{o}(H) < \mathbf{o}(G)$ und deren $\mathcal{V}$-Homomorphismen richtig.

Wäre $K \triangleleft G$, so induzierte $\bar{\sigma}$ einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $G/K$ auf $G\sigma$, der singulär von 1. Art an der Stelle $p$ wäre. Nach einem Satz von Suzuki [**10**, Prop. 2.8., S. 43] wäre dann $G\sigma$ $p'$-abgeschlossen. (Die Suzukische Definition von « singulär an der Stelle $p$ » für $\mathcal{V}$-Isomorphismen stimmt mit unserer nicht genau überein. Wenn ein $\mathcal{V}$-Isomorphismus $\tau$ von $G_1$ auf $G_2$ (nach unserer Definition) singulär an der Stelle $p$ ist, so ist nach Suzukischer Definition $\tau^{-1}$ singulär an der Stelle $p$. Damit ergibt der oben erwähnte Satz von Suzuki hier wirklich, dass $G\sigma$ und nicht $G/K$ $p'$-abgeschlossen ist.) Da $G$ aber ein Gegenbeispiel ist, ist das unmöglich.

Damit ist $K \mathrel{\overline{\lhd}} G$. Sei $K_1$ das Herz von $K$. Da $G/K_1$ und der von $\sigma$ in $G/K_1$ induzierte $\mathfrak{V}$-Homomorphismus ein Gegenbeispiel zu unserem Lemma darstellen, folgt $K_1 = 1$ wegen der Minimalität von $G$.

Sei nun $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G\sigma$ ($\mathrm{o}(S) = p^n$). Dann gilt:

(i) $S \lhd G\sigma$, $S$ zyklisch oder elementarabelsch und $G\sigma/S$ zyklisch der Ordnung $q^m$, $q$ Primzahl.

*Bew.:* Da $\sigma$ singulär an der Stelle $p$ ist, existiert eine $p$-Sylowgruppe $S_1$ von $G\sigma$ mit $[S_1' : K] \neq \mathrm{o}(S_1)$. Nach Satz 2.1, (b) ist dann $S_1$ zyklisch oder elementarabelsch. Wäre der Normalisator $H$ von $S_1$ in $G\sigma$ eine echte Untergruppe von $G\sigma$, dann wäre $H$ nach Induktion $p'$-abgeschlossen und, da $S_1 \lhd H$ ist, wäre $H = S_1 \times H_{p'}$. Da $S_1$ abelsch ist, läge also $S_1$ im Zentrum seines Normalisators. Nach einem Satz von Burnside [**2**, Th. 2, S. 327] wäre dann aber $G\sigma$ $p'$-abgeschlossen, was ja nicht der Fall sein sollte. Es ist also $H = G\sigma$, d. h. $S = S_1 \lhd G\sigma$. Wäre nun $G\sigma/S$ nicht zyklisch von Primzahlpotenzordnung, so enthielte $G\sigma$ mindestens 2 maximale Untergruppen $U_1$, $U_2$, die $S$ enthalten. Nach Induktionsannahme wären beide $p'$-abgeschlossen. Damit läge $S$ im Zentrum jeder dieser beiden Gruppen und daher im Zentrum von $G\sigma$. Somit wäre $G\sigma$ aber erneut (nach dem Satz von Burnside) $p'$-abgeschlossen, was nicht geht. Damit ist (i) bewiesen.

Sei nun $Q_1$ eine $q$-Sylowgruppe von $G\sigma$. Dann ist $Q_1$ zyklisch und $Q_1 \mathrel{\overline{\lhd}} G\sigma$ (da $G$ Gegenbeispiel). Sei $Q$ die maximale Untergruppe von $Q_1$. Dann ist $SQ \subset G\sigma$ und nach Induktionsannahme also $Q \lhd SQ$, somit $SQ = S \times Q$. Ferner ist $Q \lhd Q_1$, also $Q \lhd G\sigma$. Damit ist $Q$ der Durchschnitt aller $q$-Sylowgruppen von $G\sigma$.

Wir unterscheiden nun 2 Fälle:

1. *Fall*: $S$ ist zyklisch.

Sei dann $S_1$ die maximale Untergruppe von $S$. Es gilt:

(ii) $\Phi(G\sigma) = S_1 \times Q$, $G\sigma/\Phi(G\sigma)$ ist nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $pq$, $p > q$; ferner ist $G\sigma$ die Vereinigung ihrer $q$-Sylowgruppen.

*Bew.*: Da $Q$ einzige maximale Untergruppe jeder $q$-Sylowgruppe von $G\sigma$ ist, ist $Q$ in jeder maximalen Untergruppe von $G\sigma$ enthalten.

Das gleiche gilt für $S_1$. Damit ist $\Phi(G\sigma) \supseteq S_1 \times Q$. Da $[G\sigma : S_1 \times Q] = pq$ ist, ist also $\Phi(G\sigma) = S_1 \times Q$ und $G\sigma/\Phi(G\sigma)$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $pq$. Da $SQ/\Phi(G\sigma) \lhd G\sigma/\Phi(G\sigma)$ vom Index $q$ ist, ist $p > q$. Es existiert somit kein Normalteiler vom Index $p$ in $G\sigma$; die Vereinigung der $q$-Sylowgruppen von $G\sigma$ ist also gleich $G\sigma$. Damit ist (ii) gezeigt.

Da $K \overline{\lhd} G$ ist, existiert nach Lemma 2.1 ein Normalteiler $N$ von $G$ mit $[G : N] = r$ ($r$ Primzahl) und $K \subseteq N$. Sei $P = (\Phi(G\sigma))\,\bar{\sigma}^{-1}$. Es gilt:

(iii) $K$ ist $r$-Gruppe, $P \lhd G$ und $G/P$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $pr, p > r$.

*Bew.*: Da $G\sigma/\Phi(G\sigma)$ eine $P$-Gruppe ist, existieren ausser $N$ noch zwei weitere maximale Untergruppen $U_1, U_2$ von $G$ mit $U_i \supseteq K$. Dann ist $N \cap U_i = P$ $(i = 1, 2)$, also $P \lhd G$. $\bar{\sigma}$ induziert somit einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $G/P$ auf die nichtabelsche $P$-Gruppe $G\sigma/\Phi(G\sigma)$ der Ordnung $pq, p > q$. Damit ist $G/P$ entweder elementarabelsch der Ordnung $p^2$ oder nichtabelsch der Ordnung $pp_1, p > p_1$. Das erste ist unmöglich; denn nach Satz 2.1, (a) ist $[S' : K] = s^n$, $s$ Primzahl (oder $K \lhd S'$; dann ist aber auch $[S' : K] = s^n$, da $S$ zyklisch ist) und, da $\sigma$ singulär an der Stelle $p$ ist, ist $s \neq p$. Es folgte somit $S' \subseteq P$, also $S \subseteq \Phi(G\sigma)$, was sicher nicht der Fall ist. Es ist also $\mathrm{o}(G/P) = pp_1, p > p_1$. Da $N/P$ Normalteiler vom Index $r$ in $G/P$ ist, ist schliesslich $p_1 = r$. Ferner ist, da $G/P$ nichtabelsch ist, $N$ die einzige $K$ enthaltende maximale Untergruppe von $G$, die normal in $G$ ist. Nach dem Lemma von Ito und Szép ist also $K$ eine $r$-Gruppe. Damit ist (iii) bewiesen.

(iv) $Q' \lhd G$.

*Bew.*: Sei $U$ irgendeine $q$-Sylowgruppe von $G\sigma$. Dann ist, wie gezeigt wurde, $Q$ maximale Untergruppe von $U$. Wir zeigen, dass $Q' \lhd U'$ ist. Dann folgt $Q' \lhd G$, da $G\sigma$ nach (ii) Vereinigung ihrer $q$-Sylowgruppen ist. Ist $K \lhd U'$, so ist $U'/K$ zyklische $t$-Gruppe ($t$ Primzahl), also $Q' \lhd U'$. Ist $K \overline{\lhd} U'$, so folgt aus Satz 2.1, ($a$) und Lemma 2.1 $[U' : K] = r^m$, also $U'$ $r$-Gruppe. Dann ist aber ebenfalls $Q' \lhd U'$. Damit ist (iv) gezeigt.

$\bar{\sigma}$ induziert also einen $\mathfrak{V}$-Isomorphismus $\hat{\sigma}$ von $G/Q'$ auf $G\sigma/Q$, der singulär an der Stelle $p$ ist. Wäre die Singularität von 1. Art, so folgte [**10**, Prop. 2.8, S. 43], dass $G\sigma/Q$ und damit auch $G\sigma$ $p'$-abgeschlossen wäre. Die Singularität ist also von 2. Art, d. h. $G\sigma/Q$ $P$-Gruppe. Damit ist $SQ/Q$ elementarabelsch, ausserdem zyklisch, hat also die Ordnung $p$. Es folgt $S_1 = 1$ und somit nach (ii) $\Phi(G\sigma) = Q$, d. h. $Q' = P$. Ferner ist $Q' \neq K$ und damit, wegen (iii) und Satz 2.1, $[U' : K] = r^m$ für jede $q$-Sylowgruppe $U$ von $G\sigma$. Da nach (iii) $[N : P] = p \neq r$ ist, ist also $U' \neq N$ für jedes solche $U$ und folglich $N = (SQ)'$. Damit ist $[S' : K] = [N : Q'] = p$, was ein Widerspruch ist, da $\sigma$ singulär an der Stelle $p$ sein sollte. Fall 1 kann also nicht auftreten.

2. *Fall*: $S$ ist elementarabelsch, aber nicht zyklisch.
Wir zeigen auch hier zunächst:

(v) $K$ ist $r$-Gruppe, $r$ Primzahl.

*Bew.*: Angenommen, das wäre nicht so. Dann teilten Primzahlen $p_1, \dots, p_s$ $(s \geq 2)$ die Ordnung von $K$. Nach dem Lemma von Ito und Szép ist $K$ nilpotent, also $p_i'$-abgeschlossen für jedes $p_i$. Es ist ferner $K \lhd S'$, da $S$ Vereinigung minimaler Untergruppen ist. Sei $U$ eine $q$-Sylowgruppe von $G\sigma$. Dann ist $K \overline{\lhd}\, U'$, nach Satz 2.1, (a) also $[U' : K] = t^m$, $t$ Primzahl. Sei $D$ das $U'$-Herz von $K$. Dann ist nach dem Lemma von Ito und Szép $K/D$ $t$-Gruppe, also $t = p_i$ für ein $i$. Sei $D_1 = K_{p_i'}$. Dann ist $D_1$ charakteristische Untergruppe von $K$ und, da $K \lhd S'$ ist, ist $D_1 \lhd S'$. Ferner ist $D_1 \subseteq D$ und somit $D_1 = D_{p_i'}$, also $D_1$ charakteristisch in $D$. Da $D \lhd U'$ ist, ist also $D_1 \lhd U'$ und somit schliesslich $D_1 \lhd G$. Da $s \geq 2$ war, ist $D_1 \neq 1$. Das ist ein Widerspruch, da $K$ keinen Normalteiler $\neq 1$ von $G$ enthält.

(vi) Es ist $K \lhd S'$, $S'/K$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $p^{n-1}s$, $s < p$, $[U' : K] = r^m$ für jede $q$-Sylowgruppe $U$ von $G\sigma$ und $p \neq r \neq s$.

*Bew*: Da $S$ Vereinigung minimaler Untergruppen ist, ist $K \lhd S'$ und damit $S'/K$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $p^{n-1}s$, $s < p$, da $\sigma$ singulär an der Stelle $p$ ist. Sei $U$ eine $q$-Sylowgruppe von

$G\sigma$. Da $K \trianglelefteq U'$ ist, ist nach Satz 2.1, (*a*) und Lemma 2.1 $[U':K] = r^m$. Ausserdem folgt $\mathbf{o}(U) \geq q^2$, also $\mathbf{o}(Q) \geq q$. Sei nun $W$ die Untergruppe der Ordnung $q$ von $Q$. Dann ist $S \cup W = S \times W$, ferner $(\mathbf{o}(S), \mathbf{o}(W)) = 1$. Nach einem Satz von Suzuki [**10**, Th. 4, S. 5] ist dann $\mathcal{V}(S \cup W) = \mathcal{V}(S) \times \mathcal{V}(W)$. Ferner ist $K \triangleleft W'$ (da maximal in $W'$), also $K \triangleleft (S \cup W)'$. Damit induziert $\bar{\sigma}^{-1}$ einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $S \cup W$ auf $(S \cup W)'/K$. Es folgt also $\mathcal{V}((S \cup W)'/K) = \mathcal{V}(S'/K) \times \times \mathcal{V}(W'/K)$. Nach Suzuki [**10**, Th. 4, S. 5] ist dann $(S \cup W)'/K = (S'/K) \times (W'/K)$ und $(\mathbf{o}(S'/K), \mathbf{o}(W'/K)) = 1$, also $(p^{n-1}s, r) = 1$. Da $n \geq 2$ ist, folgt $p \neq r \neq s$, womit (vi) vollständig bewiesen ist.

(vii) $Q' \triangleleft G$.

*Bew*: Wir wollen zeigen, dass $Q'$ der Durchschnitt der $r$-Sylowgruppen von $G$ ist. Dann folgt natürlich $Q' \triangleleft G$. Sei also $R$ eine $r$-Sylowgruppe von $G$. Dann ist, da $K$ $r$-Gruppe und Quasinormalteiler von $G$ ist, $KR$ wieder eine $r$-Gruppe, damit $KR = R$, d.h. $K \subseteq R$. Es folgt also $K \subseteq R \cap S'$; da aber (nach (vi)) $r$ kein Teiler von $[S':K]$ ist, ist $K = R \cap S'$. Dann ist $R\bar{\sigma} \cap S = 1$ die $p$-Sylowgruppe von $R\bar{\sigma}$, also $R\bar{\sigma}$ $q$-Gruppe. Sei $U$ eine $q$-Sylowgruppe von $G\sigma$, die $R\bar{\sigma}$ enthält. Dann ist $R \subseteq U'$; da aber nach (vi) $U'$ eine $r$-Gruppe ist, ist $R = U'$. Ist andererseits $V$ eine beliebige q-Sylowgruppe von $G\sigma$, so ist $V'$ (nach (vi)) eine $r$-Sylowgruppe von $G$. Der Durchschnitt der $r$-Sylowgruppen von $G$ ist also gleich $Q'$, da der Durchschnitt der $q$-Sylowgruppen von $G\sigma$ gleich $Q$ ist.

Wie im ersten Fall induziert $\bar{\sigma}$ nun einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $G/Q'$ auf $G\sigma/Q$, der singulär von 2. Art an der Stelle $p$ ist. Es ist also $G\sigma/Q$ und damit auch $G/Q'$ eine $P$-Gruppe. Nach (vi) teilen aber $p$, $r$ und $s$ die Ordnung von $G/Q'$, und es ist $p \neq r \neq s \neq p$ (ebenfalls nach (vi)). Damit hätte die Ordnung der $P$-Gruppe $G/Q'$ drei verschiedene Primteiler, was sicher unmöglich ist.

Dieser Widerspruch zeigt, dass auch der 2. Fall nicht auftreten kann, also $S$ weder zyklisch noch elementarabelsch sein kann. Das ist aber ein Widerspruch zu (i), womit das Lemma bewiesen ist.

Es folgt nun sofort:

SATZ 2.3: *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus der endlichen Gruppe $G$ auf $G\sigma$ mit quasinormalem Kern $K(\sigma)$.*

*Ist $\sigma$ nicht indexerhaltend, dann existiert ein Primteiler $p$ von $\mathbf{o}(G\sigma)$, so dass $G\sigma$ eine $p'$-abgeschlossene Gruppe mit zyklischem oder elementarabelschem $G\sigma/(G\sigma)_{p'}$ ist.*

*Beweis*: Sei $\sigma$ singulärer $\mathcal{V}$-Homomorphismus von $G$ auf $G\sigma$ mit quasinormalem Kern $K(\sigma)$. Dann gibt es nach Lemma 2.3 eine Primzahl $p$, so dass $\sigma$ singulär von 1. Art an der Stelle $p$ ist. Nach Lemma 2.4 ist dann $G\sigma$ $p'$-abgeschlossen. Nach Satz 2.1, (*b*) sind ferner die $p$-Sylowgruppen von $G\sigma$ zyklisch oder elementarabelsch. Damit ist schliesslich auch $G\sigma/(G\sigma)_{p'}$ zyklisch oder elementarabelsch, womit Satz 2.3 bewiesen ist.

## 2.4. $V$-Homomorphismen perfekter und auflösbarer Gruppen.

Wir benötigen zunächst zwei Lemmata, die etwas über die Bilder maximaler Normalteiler bei $\mathcal{V}$-Homomorphismen mit quasinormalem Kern aussagen.

LEMMA 2.5: *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus mit quasinormalem Kern $K$ der Gruppe $G$ auf $G\sigma$, sei $R \lhd G\sigma$ mit $[G\sigma : R] = p$ ($p$ Primzahl) und sei $R\bar{\sigma}^{-1} \,\overline{\lhd}\, G$.*

*Dann existiert ein Normalteiler $D$ von $G\sigma$ mit*

(1) $D \subseteq R$, (2) $D\bar{\sigma}^{-1} \lhd G$, (3) $G/D\bar{\sigma}^{-1}$

*nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $qr$, $q$, $r$ Primzahlen.*

*Beweis*: Wir nehmen an, das Lemma wäre falsch. Sei dann $G$, $\sigma$ minimales Gegenbeispiel, d.h. das Lemma für alle Gruppen $H$ mit $\mathbf{o}(H) < \mathbf{o}(G)$ und deren $\mathcal{V}$-Homomorphismen richtig. Dann gilt:

(i) $K \,\overline{\lhd}\, G$.

*Bew.*: Wäre $K \lhd G$, so würde $\bar{\sigma}^{-1}$ einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus von $G\sigma$ auf $G/K$ induzieren. Nach einem Satz von Suzuki [**11**, Lemma 9, S. 358] existierte ein Normalteiler $D_1$ von $G\sigma$ mit $D_1 \subseteq R$, $D_1' \lhd G$, $G/D_1'$ $P$-Gruppe. Dann ist $R/D_1 \lhd G\sigma/D_1$ vom Index $p$, also ist $[G\sigma : D_1] = q^n p$ ($q > p$ oder $q = p$) und $R/D_1$ elementarabelsche $q$-Gruppe. Da $R' \,\overline{\lhd}\, G$ ist, ist $R'/D_1'$ eine $P$-Gruppe der Ordnung $q^{n-1} r$, $r$ Primzahl, $r < q$. Sei $D$ die Untergruppe von $G\sigma$, für die $D'/D_1'$ die $q$-Sylowgruppe von $R'/D_1'$ ist. Dann hat $D$ alle im Lemma geforderten Eigenschaften. Da $G$ ein Gegenbeispiel ist, ist das unmöglich; (i) ist also gezeigt.

Nach Lemma 2.1 existiert nun ein Normalteiler $N$ von $G$ mit $K \subseteq N$ und $[G:N] = r$, $r$ Primzahl. Da $R' \mathrel{\overline{\triangleleft}} G$ ist, ist $N \neq R'$. Weiter ist

(ii) $N \cap R' \mathrel{\overline{\triangleleft}} N$.

*Bew*: Wäre $N \cap R' \triangleleft N$, so wäre $N \cap R' \triangleleft G$. Sei $D = (N \cap R')\,\overline{\sigma}$. Dann ist $D \triangleleft N\sigma$ mit $[N\sigma : D] = p$, also $[N : D'] = q$, $q$ Primzahl. Da $R' \mathrel{\overline{\triangleleft}} G$ ist, ist also $G/D'$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $qr$. Daher ist $D$ Durchschnitt von $R$ und mindestens 2 weiteren maximalen Untergruppen von $G\sigma$, also $D \triangleleft G\sigma$. Damit hat $D$ alle im Lemma geforderten Eigenschaften, was nicht möglich ist; (ii) ist also gezeigt.

Da $R \triangleleft G\sigma$ ist, ist $R \cap N\sigma \triangleleft N\sigma$ vom Index $p$; nach (ii) gilt ausserdem $(R \cap N\sigma)\,\overline{\sigma}_N^{-1} = R' \cap N \mathrel{\overline{\triangleleft}} N$. Da $G$ minimales Gegenbeispiel ist, existiert somit ein Normalteiler $D_1$ von $N\sigma$ mit $D_1 \subseteq R \cap N\sigma$, $D_1\,\overline{\sigma}_N^{-1} = D_1' \triangleleft N$ und $N/D_1'$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $st$ ($s$, $t$ Primzahlen; sei etwa $s > t$). Wir zeigen nun.

(iii) $D_1 \triangleleft G\sigma$ und $D_1' \triangleleft G$; ferner gilt $r < t < s$.

*Bew.*: Da $R'$ maximal und nicht normal in $G$ ist, ist $R'$ sein eigener Normalisator. Es existiert also ein $x \in N$ mit $R'^x = S \neq R'$. Da $D_1' \triangleleft N$ ist, ist $D_1'^x = D_1'$, also $D_1' \subseteq S$ und damit $D_1' \subseteq R' \cap S$.

Wäre nun $R' \cap S \subseteq N$, so wäre $R' \cap S = R' \cap N = N \cap S$. Dann hätte aber $D = (R' \cap S)\,\sigma$ alle im Lemma geforderten Eigenschaften, was nicht geht.

Es ist also $R' \cap S \not\subseteq N$ und damit $D_1' = N \cap (R' \cap S) \triangleleft R' \cap S$. Da ausserdem $D_1' \triangleleft N$ ist, ist schliesslich $D_1' \triangleleft G$.

Da $N \cap R' \mathrel{\overline{\triangleleft}} N$ (nach (ii)) ist, ist $[N \cap R' : D_1']$ der kleinere Primteiler von $[N : D_1']$, also gleich $t$. Damit ist $[G : R'] = s$. Wäre $R'/D_1'$ (und damit auch $S/D_1'$) abelsch, dann hätte $D = R \cap S\,\overline{\sigma}$ die im Lemma geforderten Eigenschaften. Es ist also $R'/D_1'$ nichtabelsche Gruppe der Ordnung $rt$ und damit $r < t$, da $N \cap R' \triangleleft R'$ vom Index $r$ ist.

Ist $M/D_1'$ eine maximale Untergruppe von $G/D_1'$, die von $R'/D_1'$ und $N/D_1'$ verschieden ist, dann ist $(M \cap R')/D_1'$ maximal in $M/D_1'$ (und damit auch in $R'/D_1'$), da $R \lhd G\sigma$ und $[G\sigma : R] = p$ ist. Ferner ist $M \cap R' \neq N \cap R'$; denn sonst hätte $D = (N \cap R')\bar{\sigma}$ alle im Lemma geforderten Eigenschaften, was nicht geht. $R'/D_1'$ besitzt $t$ von $(N \cap R')/D_1'$ verschiedene maximale Untergruppen und $s$ Konjugierte. Da $2 \leq r < t < s$ ist, ist $t < s - 1$; somit existieren zwei Konjugierte von $R'$, die sich mit $R'$ in derselben Gruppe $T$ schneiden. $T/D_1'$ ist $r$-Sylowgruppe von $G/D_1'$. Es liegt also jede $r$-Sylowgruppe von $G/D_1'$ in mindestens 3 maximalen Untergruppen von $G/D_1'$. Seien $T_1/D_1'$, $T_2/D_1'$ zwei in $R'/D_1'$ liegende $r$-Sylowgruppen von $G/D_1'$. Dann ist $T_1 \cap T_2 = D_1'$, $T_i\bar{\sigma} \lhd G\sigma$ (i $= 1, 2$) und damit auch $D_1 = T_1\bar{\sigma} \cap T_2\bar{\sigma} \lhd G\sigma$, womit (iii) gezeigt ist.

$\bar{\sigma}^{-1}$ induziert nun in $G\sigma/D_1$ einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus, der $R/D_1$ auf die nicht normale Untergruppe $R'/D_1'$ von $G/D_1'$ abbildet. Damit existiert [**11**, Lemma 9, S. 358] ein Normalteiler $D/D_1$ von $G\sigma/D_1$ mit $D \subseteq R$, $D'/D_1' \lhd G/D_1'$ und $G\sigma/D$ $P$-Gruppe. Dann ist auch $G/D'$ $P$-Gruppe und, da $r < t < s$ ist (nach (iii)), ist $D \supset D_1$. $D$ hat also alle im Lemma geforderten Eigenschaften, was ein endgültiger Widerspruch ist. Damit ist Lemma 2.5 bewiesen.

Lemma 2.6: *Sei $\sigma$ ein indexerhaltender $\mathcal{V}$-Homomorphismus mit quasinormalem Kern $K$ der Gruppe $G$ auf $G\sigma$.*

*Dann gilt:*

(a) *Ist $N$ ein maximaler Normalteiler von $G$, so ist $N\sigma \lhd G\sigma$.*

(b) *Ist $R$ ein maximaler Normalteiler von $G\sigma$, so ist $R\bar{\sigma}^{-1} \lhd G$.*

*Beweis*: (a) [s. **10**, Prop. 2.6., S. 42].

Wir zeigen zunächst:

(i) Ist $N \lhd G$ und $[G : N] = p$ ($p$ Primzahl), so ist $N\sigma \lhd G\sigma$.

*Bew.*: Wir nehmen an, (i) wäre falsch. Sei dann $G$ ein minimales Gegenbeispiel zu (i), d.h. (i) für alle Untergruppen von $G$ und deren $\mathcal{V}$-Homomorphismen richtig.

Wäre $K \not\subseteq N$, so wäre $K \cup N = G$, also $N\sigma = (N \cup K)\sigma = G\sigma$ und damit $N\sigma \lhd G\sigma$, was nicht sein kann. Es ist also $K \subseteq N$.

Da $N\sigma \mathrel{\overline{\lhd}} G\sigma$ ist, existiert ein $S \subseteq G$ mit $S \supseteq K$, so dass $S\sigma$ in $G\sigma$ zu $N\sigma$ konjugiert ist. Da $\sigma$ indexerhaltend ist, ist $[G\sigma : S\sigma] = [G\sigma : N\sigma] = p$. Sei $D = N \cap S$. Dann ist $D \lhd S, [S : D] = p$ und $\sigma_S$ indexerhaltend; da $G$ ein minimales Gegenbeispiel ist, folgt $D\sigma \lhd S\sigma$. Da $N\sigma$ von $S\sigma$ nicht normalisiert wird, existiert ein $s \in S\sigma$ mit $(N\sigma)^s = M \neq N\sigma$. Da $s \in S\sigma$ ist, ist auch $M \neq S\sigma$ und $D\sigma \subseteq M$. Da aber $[G\sigma : D\sigma] = p^2$ ist, ist also $D\sigma = N\sigma \cap S\sigma = N\sigma \cap M$ und $D = N \cap S = N \cap M'$. Damit ist $D \lhd M', [M' : D] = p$ und $\sigma_{M'}$ indexerhaltend; nach Induktionsannahme folgt also auch $D\sigma \lhd M$, somit schliesslich $D\sigma \lhd G\sigma$. Da $[G\sigma : D\sigma] = p^2$ ist, ist $G\sigma/D\sigma$ abelsch. Das kann aber nicht sein, da $N\sigma \supseteq D\sigma$ und $N\sigma \mathrel{\overline{\lhd}} G\sigma$ ist. Damit ist (i) gezeigt.

Sei nun $N$ maximaler Normalteiler von $G$ mit nichtabelscher (einfacher) Faktorgruppe. Dann existieren $U_i \subseteq G$, so dass $N$ eine maximale Untergruppe in jedem $U_i$ ist, mit $\bigcup_i U_i = G$. Da $\sigma_{u_i}$ indexerhaltend ist, ist nach (i) $N\sigma \lhd U_i\sigma_{u_i} = U_i\sigma$ für alle i, also $N\sigma \lhd G\sigma$. Damit ist (a) gezeigt.

(b) Ist $R$ von Primzahlindex in $G\sigma$, so existiert, falls $R' \mathrel{\overline{\lhd}} G$ ist, nach Lemma 2.5 ein Normalteiler $D$ von $G\sigma$ mit $D \subseteq R$, $D' \lhd G$ und $G/D'$ nichtabelsche $P$-Gruppe der Ordnung $qr, q, r$ Primzahlen. Da $R' \mathrel{\overline{\lhd}} G$ ist, ist $[R' : D'] = r$, wenn $r < q$ ist. Da $G/D'$ $P$-Gruppe ist, ist auch $G\sigma/D$ $P$-Gruppe und, da $R \lhd G\sigma$ ist, ist $[R : D] = q \neq [R' : D']$, woraus natürlich folgt, dass $\sigma$ singulär ist. Das ist aber ein Widerspruch, da $\sigma$ indexerhaltend ist. Es ist also $R' \lhd G$, falls $R$ von Primzahlindex in $G\sigma$ ist.

Ist $R$ nicht maximale Untergruppe von $G\sigma$, so existieren wie unter (a) minimale Untergruppen $V_i/R$ von $G\sigma/R$, deren Vereinigung $G\sigma/R$ ist. Dann folgt $R' \lhd V_i'$ für alle i, also $R' \lhd G$. Damit ist Lemma 2.6 bewiesen.

Wir können nun die in der Einleitung angekündigten Sätze über $\mathcal{V}$-Homomorphismen von perfekten und von auflösbaren Gruppen beweisen.

SATZ 2.4 : *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus mit quasinormalem Kern $K$ der endlichen Gruppe $G$ auf $G\sigma$ und sei $K_1$ das Herz von $K$. Dann gilt :*

(a) *Ist $G/K_1$ perfekt, so ist auch $G\sigma$ perfekt.*

(b) *Ist $G\sigma$ perfekt, so ist $K_1 = K$ und $G/K$ perfekt.*

*Beweis*: (a) Da $G/K_1$ perfekt ist, ist $K \triangleleft G$ (nach dem Lemma von Ito und Szép oder nach [8, Satz 3]). $\bar{\sigma}$ induziert also einen $\mathcal{V}$-Isomorphismus der perfekten Gruppe $G/K$ auf $G\sigma$. Nach einem Satz von Suzuki [10, Th. 9, S. 46] ist dann $G\sigma$ perfekt.

(b) Ist $G\sigma$ perfekt, so enthält $G\sigma$ keinen Normalteiler mit abelscher Faktorgruppe; nach Satz 2.3 ist $\sigma$ also indexerhaltend. Existierte ein Normalteiler $N \supseteq K$ von $G$ mit Primzahlindex $p$, dann wäre, da $\sigma$ indexerhaltend ist, $N\sigma \triangleleft G\sigma$ (Lemma 2.6) und $[G\sigma : N\sigma] = p$. Das ist aber unmöglich, da $G\sigma$ perfekt ist. Es existiert also kein Normalteiler $N \supseteq K$ mit Primzahlindex in $G$; es ist also $K \triangleleft G$ (nach dem Lemma von Ito und Szép) und ausserdem $G/K$ perfekt.

SATZ 2.5: *Sei $\sigma$ ein $\mathcal{V}$-Homomorphismus mit quasinormalem Kern $K$ der endlichen Gruppe $G$ auf $G\sigma$ und sei $K_1$ das Herz von $K$. Dann gilt: $G\sigma$ ist dann und nur dann auflösbar, wenn $G/K_1$ auflösbar ist.*

*Beweis*: (a) Wir zeigen zunächst, dass $G\sigma$ auflösbar ist, falls $G/K_1$ auflösbar ist, und machen dazu Induktion. Sei also die Behauptung für Gruppen kleinerer Ordnung als $\mathrm{o}(G)$ und deren $\mathcal{V}$-Homomorphismen richtig und sei $G/K_1$ auflösbar. Nach Satz 2.4, (b) ist $G\sigma$ nicht perfekt. Es existiert also ein Normalteiler $R$ von Primzahlindex in $G\sigma$. Dann ist $R' \subset G$, und wenn $K_2$ das $R'$-Herz von $K$ ist, so ist $K_2 \supseteq K_1$, also $R'/K_2$ auflösbar. Nach Induktionsannahme ist also $R'\sigma_{R'} = R$ auflösbar. Da auch $G\sigma/R$ auflösbar ist, ist somit $G\sigma$ auflösbar und der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

(b) Wir zeigen nun, ebenfalls mit Induktion, dass $G/K_1$ auflösbar ist, falls $G\sigma$ auflösbar ist. Sei die Behauptung für Gruppen kleinerer Ordnung als $\mathrm{o}(G)$ und deren $\mathcal{V}$-Homomorphismen richtig und sei $G\sigma$ auflösbar. Ist $K \triangleleft G$, so ist $G/K$ nach einem Satz von Suzuki [10, Th. 10, S. 46] auflösbar. Ist $K \overline{\triangleleft} G$, so existiert nach dem Lemma von Ito und Szép ein Normalteiler $N \supseteq K$ von $G$ von Primzahlindex. Da $N\sigma_N$ auflösbar und $N \subset G$ ist, ist $N/K_2$ auflösbar, wenn $K_2$ das $N$-Herz von $K$ ist. Da $K_1 \triangleleft N$ ist, folgt $K \supseteq K_2 \supseteq K_1$ und, da $K/K_1$ nach Lemma 2.1 nilpotent ist, ist $K_2/K_1$ auflösbar. Es ist also $G/N$, $N/K_2$ und $K_2/K_1$ und somit schliesslich auch $G/K_1$ auflösbar. Damit ist Satz 2.5 bewiesen.

# LITERATUR

[1] R. BAER, *The significance of the system of subgroups for the structure of the group,* Amer. Journal of Math., 61 (1939), 1-44.

[2] W. BURNSIDE, *Theory of groups of finite order,* New York, 1911.

[3] H. HEINEKEN, *Kriterien für Vertauschbarkeit von Untergruppen,* (Staatsexamensarbeit, Frankfurt), 1960.

[4] H. HERMES, *Einführung in die Verbandstheorie,* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1955.

[5] D. G. HIGMAN, *Lattice homomorphisms induced by group homomorphisms,* Proc. Amer. Math. Soc., 2 (1951), 467-78.

[6] A. HOSTINSKY, *Endomorphisms of lattices,* Duke Math. Journal, 18 (1951), 331-42.

[7] N. ITO und J. SZÉP, *Über die Quasinormalteiler von endlichen Gruppen,* Acta Sci. Math. Szeged, 23 (1962), 168-70.

[8] O. H. KEGEL, *Sylowgruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen,* Math. Zeitschrift, 78 (1962), 205-21.

[9] O. ORE, *Contributions to the theory of groups of finite order,* Duke Math. Journal, 5 (1939), 431-60.

[10] M. SUZUKI, *Structure of a group and the structure of its lattice of subgroups,* Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1956.

[11] M. SUZUKI, *On the lattice of subgroups of finite groups,* Trans. Amer. Math. Soc., 70 (1951), 345-71.

[12] G. ZAPPA, *Sulla condizione perchè un omomorfismo ordinario sia anche un omomorfismo strutturale,* Giornale di Mat. Battaglini (4), 78 (1949), 182-92.

[13] H. ZASSENHAUS, *The theory of groups,* Göttingen, 1958.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 settembre 1966.