RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIORGIO TALENTI

Osservazioni sopra un'equazione integrodifferenziale di Schrödinger

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 305-330

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__305_0>

OSSERVAZIONI SOPRA UN'EQUAZIONE INTEGRODIFFERENZIALE DI SCHRÖDINGER

GIORGIO TALENTI *)

Introduzione.

In alcune questioni di meccanica quantistica si considerano potenziali « non locali » ; per un potenziale non locale la equazione di Schrödinger assume la forma integrodifferenziale :

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} V(x, y)\, u(y)\, dy, \tag{1}$$

dove :

$$x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3), dy = dy_1\, dy_2\, dy_3, \Delta = \sum_{l=1}^{3} \partial^2/\partial x_l^2 ;$$

k^2 è l'energia complessa, $V(x, y)$ è il potenziale assegnato, u è la funzione d'onda. Per l'equazione (1) si pongono i seguenti problemi :

a) Stati legati. È un problema di autovalori, con k^2 parametro e la condizione :

$$\iiint_{-\infty}^{+\infty} |u(x)|^2\, dx = 1 ; \tag{2}$$

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 23 del Comitato Nazionale per la matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A : Istituto di Matematica, Università, Via L. B. Alberti 4 Genova.

si tratta cioè di trovare i valori di k^2 tali che esiste una soluzione di (1) a quadrato sommabile in tutto lo spazio.

b) Scattering. Il problema quantistico dello scattering consiste nel determinare le soluzioni u di (1), definite in tutto lo spazio, tali che

$$(3) \qquad \begin{aligned} & u(x) = \exp\left(ik \sum_{l=0}^{3} a_l x_l\right) + \Phi(x) \\ & \lim_{r \to +\infty} \Phi(x) = 0 \\ & \lim_{r \to +\infty} r \left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}(x) - ik\, \Phi(x)\right) = 0, \end{aligned}$$

dove a_1, a_2, a_3 sono le componenti di un versore assegnato ($a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$) e $r = |x| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{1}{2}}$. L'ultima delle (3) è la condizione di radiazione di Sommerfeld [1]).

Ha interesse studiare il problema *b*) in ipotesi tali sul potenziale V, che le soluzioni abbiano un andamento asintotico del tipo:

$$(4) \qquad u(x) \backsim \exp\left(ik \sum_{l=1}^{3} a_l x_l\right) + f\left(k\,; \frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ikr}}{r} \qquad (r \longrightarrow +\infty)$$

---

[1]) Sommerfeld [28] ha considerato il problema di determinare le soluzioni della equazione $\Delta u + k^2 u = \varrho$, che sono definite in un aperto illimitato D a frontiera limitata, assumono valori assegnati sulla frontiera di D e verificano la condizione $\lim_{|x| \to +\infty} |x| (\partial u / \partial |x| - iku) = 0$. Rellich [24] ha dimostrato un teorema di unicità per il problema di Sommerfeld; il teorema di Rellich è stato esteso da Atkinson [1], Wilcox [25], Levine [18]; cfr. anche Hellwing [14], Courant-Hilbert [6]. La condizione di radiazione di Sommerfeld è stata considerata, in una opportuna formulazione, anche per certe equazioni ellittiche e per equazioni ipoellittiche di ordine superiore; cfr. Parasjuk [23], Grošin [12]. La condizione di radiazione interviene anche nella teoria del decadimento delle soluzioni della equazione delle onde, in particolare nello studio del cosiddetto principio della « limiting amplitude »; cfr. in proposito Mihaĭlov [19], Eĭdus [9], Bazdyrev [2], Buchal [5], Morawetz [20]-[21], Wilcox [26], Lax-Morawetz-Phillips [17], Zachmanoglou [27], Isakova [16], Gehtmann [11].

con f funzione analitica di k: le proprietà della funzione f — « ampiezza di scattering » — sono l'oggetto della teoria quantistica dello scattering [2]). Nel caso di potenziali « locali », cioè nel caso che l'equazione di Schrödinger abbia forma differenziale: $\Delta u(x) + k^2 u(x) = V(x)\,u(x)$, i problemi degli stati legati e dello scattering sono oggetto di notissime teorie: cfr. in proposito De Alfaro-Regge [7], Newton [22], che contengono un'estesa bibliografia. Invece i problemi a) e b) per la equazione integrodifferenziale (1) non sono stati finora trattati esaurientemente.

In [3], [4] è intrapreso lo studio dei problemi suddetti. Per semplicità, si considera un caso tipico: quello di un potenziale non locale a simmetria sferica $V(|x|, |y|)$. In questa ipotesi lo studio della funzione d'onda può essere ricondotto a quello di « onde parziali », cioè di termini dello sviluppo in serie di armoniche sferiche; fra le onde parziali ha rilievo dominante, come si riconosce facilmente, la prima — la cosiddetta « onda S » — rappresentata dalla equazione:

$$y''(r) + k^2 y(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s)\, y(s)\, ds, \tag{5}$$

assieme alle condizioni:

$$y(0) = 0, \quad \int_0^{+\infty} |y(r)|^2\, dr = 1, \tag{6}$$

---

[2]) Il problema b) è lo schema di un fenomeno d'urto: un fascio di particelle viene accelerato e colpisce un ostacolo, l'urto provoca una diffusione di particelle; le misure sperimentali valutano il flusso delle onde diffuse. Matematicamente l'ostacolo è rappresentato dal potenziale $V(x, y)$; la funzione $Y(x) = \exp\left(ik \sum_{l=1}^{3} a_l x_l\right)$ rappresenta l'onda incidente (che si considera piana) cioè l'onda che non è disturbata dal potenziale: questo è in accordo con il fatto che $Y(x)$ è soluzione della equazione « libera » $\Delta Y(x) + k^2 Y(x) = 0$. La funzione $\Phi(x)$ è l'onda diffusa, la funzione f che compare in (4) è connessa con lo sfasamento fra l'onda incidente e l'onda diffusa, e con il flusso dell'onda diffusa (che sono i dati sperimentali).

oppure

$$(7)\qquad y(r) = \frac{\operatorname{sen} kr}{k} + \Phi(r),\ \Phi(0) = 0,\ \lim_{r\to+\infty} (\Phi'(r) - ik\,\Phi(r)) = 0.$$

In [3], [4] sono discussi i problemi (5) - (6) e (5) - (7) nella seguente ipotesi sul potenziale:

$$\int_0^{+\infty} e^{\alpha r}\,dr \int_0^{+\infty} s\,e^{\alpha s}\,|\,V(r,s)\,|\,ds < +\infty \qquad (\alpha > 0);$$

in particolare sono stabiliti questi risultati: (i) lo spettro (in k) del problema (5) - (6) è numerabile ed è contenuto in un cerchio; (ii) il problema (5) - (7) ha soluzione (unica, in una conveniente classe funzionale) per ogni k tale che $|\operatorname{Im} k| \leq \alpha$, fatta eccezione per quei valori di k tali che il problema (5) - (6) ha soluzione; (iii) la soluzione di (5) - (7) ha il comportamento asintotico:

$$y(r) \backsim \frac{\operatorname{sen} kr}{k} + T(k)\,e^{ikr} \qquad (r \to +\infty)$$

con $T(k)$ funzione analitica di k.

Nel presente lavoro si discutono i problemi (5) - (6) e (5) - (7) nella ipotesi:

$$\left[\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |\,V(r,s)\,|^p\,dr\right)^{\frac{q}{p}} ds\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty \left(1 < p < +\infty; 1 \leq q \leq \frac{p}{p-1}\right).$$

1. Enunciato dei risultati.

Sia $V(r,s)$ una funzione misurabile tale che:

$$(8)\qquad A = \left[\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} |\,V(r,s)\,|^p\,dr\right)^{\frac{q}{p}} ds\right]^{\frac{1}{q}} < +\infty$$

$$\left(1 < p < +\infty,\ 1, \leq q \leq p' = \frac{p}{p-1}\right);$$

sia k un numero complesso tale che $\operatorname{Im} k \neq 0$.

Consideriamo i seguenti problemi:

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} \Phi''(r) + k^2 \Phi(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s)\, \Phi(s)\, ds + f(r) & (r > 0) \\ \Phi(0) = 0, \lim_{r \to +\infty} (\Phi'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, \Phi(r)] = 0 \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} \chi''(r) + k^2 \chi(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s)\, \chi(s)\, ds & (r > 0) \\ \chi(0) = 0, \left(\int_0^{+\infty} |\chi(r)|^{q'} dr\right)^{\frac{1}{q'}} = 1 & \left(q' = \dfrac{q}{q-1}\right). \end{cases}$$

Le soluzioni del problema (a) o del problema (b) che si considerano in questo lavoro sono funzioni con derivata prima assolutamente continua. Il problema (a) coincide con il problema (5)-(7) enunciato nell'introduzione, nel caso che:

$$\operatorname{Im} k > 0, f(r) = \int_0^{+\infty} V(r, s) \frac{\operatorname{sen} ks}{k}\, ds.$$

Sussistono questi teoremi:

TEOREMA 1. *Una delle seguenti due possibilità si verifica necessariamente ed esclude l'altra*:

1) *qualunque sia* $f \in L^p(0, +\infty)$, *esiste una ed una sola soluzione del problema* (a) *tale che*:

$$\text{(a')} \qquad \left(\int_0^{+\infty} |\Phi(r)|^{q'} dr\right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty;$$

2) *esiste una soluzione del problema* (b).

Le soluzioni Φ e χ dei problemi (a) - (a′) *e* (b) *hanno inoltre questa proprietà :*

$$(9) \qquad \left.\begin{array}{l} \Phi, \dfrac{\Phi}{x}, \Phi' \\[2ex] \chi, \dfrac{\chi}{x}, \chi' \end{array}\right] \in L^m(0, +\infty) \text{ per ogni } m \geq p.$$

Se $|\operatorname{Im} k| > (2A)^{pq(3pq-p-q)^{-1}}$, *non esiste soluzione del problema* (b) (*dunque esiste soluzione del problema* (a) - (a′)).

Osservazione. A norma del teorema 1, se $p \leq 2$ le soluzioni del problema (b) hanno la proprietà :

$$0 < \int_0^{+\infty} |\chi(r)|^2 \, dr < +\infty ;$$

dunque tali soluzioni, moltiplicate per un conveniente fattore di normalizzazione, sono soluzioni del problema (5) - (6) enunciato nella introduzione. Osserviamo anche che, se $p \leq 2$ e $q' = 2$, il problema (b) coincide con (5) - (6) (la condizione $p \leq 2$ segue dall'ipotesi $q \leq p'$ e dalla condizione $q' = 2$, che implicano : $p \leq q' = 2$).

TEOREMA 2. *Sia Ω l'insieme dei numeri complessi k (con* $\operatorname{Im} k \neq 0$) *tali che il problema* (a) - (a′) *ammette soluzione per ogni* $f \in L^p(0, +\infty)$; *sia $k \longrightarrow f(k, \cdot)$ una funzione a valori in* $L^p(0, +\infty)$, *olomorfa in* Ω [3]) ; *sia, per ogni $k \in \Omega$, $\Phi(k, \cdot)$ la soluzione del problema :*

$$\frac{d^2}{dr^2} \Phi(k, r) + k^2 \Phi(k, r) = f(k, r) + \int_0^{+\infty} V(r, s) \Phi(k, s) \, ds,$$

---

[3]) Questo significa : per ogni $k \in \Omega$, esiste una funzione $f'(k, \cdot) \in L^p(0, +\infty)$ tale che

$$\left\| \frac{f(k+h, \cdot) - f(k, \cdot)}{h} - f'(k, \cdot) \right\|_{L^p(0, +\infty)} \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0);$$

cfr. Hille-Phillips [15].

$$\Phi(k, 0) = 0, \lim_{r \to +\infty} \left[\frac{d}{dr} \Phi(k, r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k) \; \Phi(k, r)\right] = 0,$$

$$\left(\int_0^{+\infty} |\Phi(k, r)|^{q'} dr\right)^{\frac{1}{q'}} < +\infty.$$

Si hanno queste proprietà:

1) Ω *è aperto*;

2) $k \longrightarrow \frac{d^2}{dr^2} \Phi(k, \cdot) + k^2 \Phi(k, \cdot)$ *è una funzione olomorfa in* Ω, *a valori in* $L^p(0, +\infty)$;

3) *per ogni fissato* $r > 0$, $\Phi(\cdot, r)$ *è olomorfa in* Ω;

4) $k \longrightarrow T(k) = -\int_0^{+\infty} \frac{\exp(ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k))}{2ki \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} (\Phi''(k, r) + k^2 \Phi(k, r)) \, dr$

è funzione olomorfa in Ω *e si ha*:

$$\Phi(k, r) \sim T(k) \; e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \qquad (r \longrightarrow +\infty).$$

2. Lemmi.

LEMMA 1. *Sia* $h > 0$, $f(r) \in L^\lambda(-\infty, +\infty)$ $(1 \leq \lambda \leq +\infty)$. *Sussistono le diseguaglianze*:

$$(1.1) \qquad \left.\begin{array}{l} \| Tf \|_{L^\mu(-\infty, +\infty)} \\ \\ \| T^* f \|_{L^\mu(-\infty, +\infty)} \end{array}\right] \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}} \| f \|_{L^\lambda(-\infty, +\infty)} \qquad (1 \leq \lambda \leq \mu \leq +\infty),$$

dove T, T^* *sono gli operatori definiti dalle equazioni*:

$$Tf(r) = e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht} f(t) \, dt, \; T^* f(r) = e^{hr} \int_r^{+\infty} e^{-ht} f(t) \, dt \; ^{4)}.$$

---

[4]) Si può osservare che T^* è l'operatore aggiunto di T, nel senso che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u(r) \, T^* v(r) \, dr = \int_{-\infty}^{+\infty} v(r) \, Tu(r) \, dr.$$

Inoltre se $\lambda < +\infty$:

$$\lim_{r \to \pm\infty} Tf(r) = \lim_{r \to \pm\infty} T^* f(r) = 0. \tag{1.3}$$

Dimostrazione. Per via della relazione:

$$(T^* f)(-r) = e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht} f(-t)\, dt$$

è sufficiente riferirsi all'operatore T. Supponiamo $\lambda < +\infty$, la diseguaglianza (1.1) essendo evidente nel caso $\lambda = +\infty$. Si ha:

$$|Tf(r)| \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}} \left(e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht} |f(t)|^{\lambda} dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}. \tag{1.4}$$

(1.4) è evidente se $\lambda = 1$; se $\lambda > 1$, si applica Hölder $\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda'} = 1\right)$:

$$|Tf(r)| \leq e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{\frac{1}{\lambda'} ht + \frac{1}{\lambda} ht} |f(t)|\, dt \leq$$

$$\leq e^{-hr} \left(\int_{-\infty}^{r} e^{ht}\, dt \right)^{\frac{1}{\lambda'}} \left(\int_{-\infty}^{r} e^{ht} |f(t)|^{\lambda}\, dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} =$$

$$= h^{-\frac{1}{\lambda'}} e^{-hr + \frac{1}{\lambda'} hr} \left(\int_{-\infty}^{r} e^{ht} |f(t)|^{\lambda}\, dt \right)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Segue subito da (1.4):

$$|Tf(r)| \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}} \left(\int_{-\infty}^{r} |f(t)|^{\lambda}\, dt \right)^{\frac{1}{\lambda}} \leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}} \|f\|_{L^{\lambda}(-\infty, +\infty)}, \tag{1.5}$$

che implica (1.1) per $\mu = +\infty$.

Segue da (1.4) integrando per parti:

$$(1.6)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} | Tf(r)|^{\lambda}\, dr \leq h^{1-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} dr\, e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht}\, |f(t)|^{\lambda}\, dt =$$

$$= - h^{-\lambda}\, e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht}\, |f(t)|^{\lambda}\, dt \,\Big|_{-\infty}^{+\infty} + h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^{\lambda}\, dr \leq$$

$$\leq h^{-\lambda} \lim_{r \to -\infty} e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht}\, |f(t)|^{\lambda}\, dt + h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^{\lambda}\, dr \leq$$

$$\leq h^{-\lambda} \lim_{r \to -\infty} \int_{-\infty}^{r} |f(t)|^{\lambda}\, dt + h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^{\lambda}\, dr = h^{-\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(r)|^{\lambda}\, dr,$$

che implica (1.1) per $\mu = \lambda$. Per (1.5) - (1.6), se $\lambda < \mu < +\infty$:

$$\| Tf \|_{L^{\mu}(-\infty,\, +\infty)} \leq \| Tf \|_{L^{\lambda}(-\infty,\, +\infty)}^{\frac{\lambda}{\mu}}\, \| Tf \|_{L^{\infty}(-\infty,\, +\infty)}^{1-\frac{\lambda}{\mu}} \leq$$

$$\leq h^{-\frac{\lambda}{\mu} - \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)\left(-\frac{1}{\lambda} + 1\right)} \| f \|_{L^{\lambda}(-\infty,\, +\infty)} = h^{-1 + \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\mu}} \| f \|_{L^{\lambda}(-\infty,\, +\infty)} .$$

Abbiamo così provato (1.1). Per provare (1.3) integriamo per parti l'integrale a secondo membro di (1.4):

$$(1.8)\qquad e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht}\, |f(t)|^{\lambda}\, dt = e^{-h(r-t)} \int_{-\infty}^{t} |f(s)|^{\lambda}\, ds \,\Big|_{-\infty}^{r} +$$

$$- h e^{-hr} \int_{-\infty}^{r} e^{ht} \left(\int_{-\infty}^{t} |f(s)|^{\lambda}\, ds \right) dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{r} |f(s)|^{\lambda}\, ds - h \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{r} e^{ht} \left(\int_{-\infty}^{t} |f(s)|^{\lambda}\, ds \right) dt}{e^{hr}} ;$$

nei passaggi precedenti abbiamo tenuto conto della relazione:

$$e^{-h(r-t)}\int_{-\infty}^{t}|f(s)|^{\lambda}\,ds\leq\int_{-\infty}^{t}|f(s)|^{\lambda}\,ds\longrightarrow 0\qquad(t\longrightarrow-\infty).$$

Per la regola dell'Hôpital:

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{r}e^{ht}\left(\int_{-\infty}^{t}|f(s)|^{\lambda}\,ds\right)dt}{e^{hr}}=\tag{1.9}$$

$$=\lim_{r\to+\infty}\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{r}|f(s)|^{\lambda}\,ds=\frac{1}{h}\int_{-\infty}^{+\infty}|f(s)|^{\lambda}\,ds.$$

Da (1.4) - (1.8) - (1.9) segue:

$$\lim_{r\to+\infty}Tf(r)=0\,;$$

si ha poi, per (1.4):

$$|Tf(r)|\leq h^{-1+\frac{1}{\lambda}}\left(\int_{-\infty}^{r}|f(t)|^{\lambda}\,dt\right)^{\frac{1}{\lambda}}\longrightarrow 0\qquad(r\longrightarrow-\infty),$$

dunque (1.3) è provata.

LEMMA 2. *Sia*: $h>0$; $f(r)\in L^{\lambda}(0,+\infty)\,(1\leq\lambda\leq+\infty)$;

$$g(r)=\int_{0}^{+\infty}e^{-h|r-t|}f(t)\,dt.$$

***Risulta*:**

$$\|g\|_{L^{\mu}(0,+\infty)}\leq 2h^{-1+\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}}\|f\|_{L^{\lambda}(0,+\infty)}\qquad(1\leq\lambda\leq\mu\leq+\infty)\,;$$

inoltre, se $\lambda<+\infty$:

$$\lim_{r\to+\infty}g(r)=0.$$

Dimostrazione. Segue immediatamente dal Lemma 1, perchè:

$$g(r) = e^{-hr} \int_0^r e^{ht} f(t)\, dt + e^{hr} \int_r^{+\infty} e^{-ht} f(t)\, dt. \text{ [5]}$$

LEMMA 3. *Sia* $v(r) \in L^p(0, +\infty)$ $(1 \leq p \leq +\infty)$; *sia* k *tale che* $\operatorname{Im} k \neq 0$. *Esiste una ed una sola soluzione (con derivata prima assolutamente continua) del problema:*

$$(3.1) \qquad \begin{gathered} y''(r) + k^2 y(r) + v(r) = 0 \qquad (r > 0) \\ y(0) = 0, \lim_{r \to +\infty} (y'(r) - ik \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, y(r)) = 0. \end{gathered}$$

La soluzione di (3.1) *ha la rappresentazione:*

$$(3.2) \qquad y(r) = \int_0^{+\infty} G(k; r, t)\, v(t)\, dt,$$

dove $G(k; r, t)$ *è la funzione di Green:*

$$(3.3) \qquad G(k; r, t) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} kr}{k}\, e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} & (r \leq t) \\ e^{ikr \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, \dfrac{\operatorname{sen} kt}{k} & (r > t); \end{cases}$$

si hanno inoltre queste proprietà;

$$\text{(i)} \qquad |k|\, \|y\|_{L^m(0, +\infty)}, \left\| \frac{1}{r} y \right\|_{L^m(0, +\infty)}, \frac{2}{3} \|y'\|_{L^m(0, +\infty)} \leq$$

$$\leq 2\, |\operatorname{Im} k|^{-1 + \frac{1}{p} - \frac{1}{m}} \|v\|_{L^p(0, +\infty)} \text{ per ogni } m \geq p;$$

---

[5]) Il Lemma 2 potrebbe facilmente dedursi dalla diseguaglianza di Young sul « faltung » e dalle proprietà del prodotto di composizione; cfr. [13], teor. 280; [10], pagg. 350-351.

$$\text{(ii)} \qquad y(r) \sim e^{ikr\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikt\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}}{2ki\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(t)\, dt \qquad (r \to +\infty).$$

Dimostrazione. Esistenza. Proviamo che:

$$z(r) = \int_0^{+\infty} G(k\,;\, r,\, t)\, v(t)\, dt$$

è una soluzione di (3.1). Si trovano facilmente le diseguaglianze:

$$|G(k\,;\, r,\, t)| \leq \frac{1}{|k|}\, e^{-|\operatorname{Im} k|\,|r-t|} \tag{3.4}$$

$$|G(k\,;\, r,\, t)| \leq r e^{-|\operatorname{Im} k|\,|r-t|}\ ^{6)}\,; \tag{3.5}$$

ne segue:

$$|z(r)| \leq \frac{1}{|k|} \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\,|r-t|}\, |v(t)|\, dt, \tag{3.6}$$

$$\frac{1}{r}\, |z(r)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\cdot|r-t|}\, |v(t)|\, dt,$$

dunque, per il Lemma 2, le prime due delle diseguaglianze (i) sono verificate. La condizione iniziale $z(0) = 0$ è evidentemente verificata; si ha poi:

$$z'(r) = \frac{d}{dr}\left(e^{ikr \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^{r} \frac{\operatorname{sen} kt}{k}\, v(t)\, dt + \right. \tag{3.7}$$

$$\left. + \frac{\operatorname{sen} kr}{k} \int_r^{+\infty} e^{ikt\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(t)\, dt\right) =$$

$$= ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, z(r) + e^{-ikr \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_r^{+\infty} e^{ikt\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(t)\, dt,$$

---

[6]) Ricordiamo che: $|\operatorname{sen}(\alpha + i\beta)| = (\operatorname{sen}^2 \alpha + sh^2 \beta)^{\frac{1}{2}} \leq (1 + sh^2 \beta)^{\frac{1}{2}} = ch\, \beta \leq$ $\leq e^{|\beta|}$; $\left|\frac{\operatorname{sen} z}{z}\right| = \frac{1}{2}\left|\int_{-1}^{+1} e^{izs}\, ds\right| \leq \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} e^{-s \operatorname{Im} z}\, ds \leq e^{|\operatorname{Im} z|}$.

dunque, per il Lemma 1:

$$|z'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, z(r)| \leq e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_r^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|}\, |v(t)|\, dt \longrightarrow 0 \qquad (r \longrightarrow +\infty)$$

inoltre, per (3.6) - (3.7):

$$|z'(r)| \leq |k|\, |z(r)| + e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_r^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|}\, |v(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-|\operatorname{Im} k|\,|r-t|}\, |v(t)|\, dt + e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_0^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|}\, |v(t)|\, dt,$$

quindi, per i Lemmi 1 e 2, anche la terza delle (i) è verificata. Da (3.7) segue che $z'(r)$ è assolutamente continua; derivando, si verifica facilmente che l'equazione differenziale è soddisfatta. Per dimostrare (ii), rappresentiamo $z(r)$ nella forma seguente, che si deduce con facili calcoli dall'espressione della funzione di Green:

$$z(r) = e^{ikr\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^{+\infty} \frac{e^{ikt\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}}{2ki\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(t)\, dt +$$

$$- \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}{2ki} \left(e^{ikr\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^{r} e^{-ikt\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(t)\, dt + \right.$$

$$\left. + e^{-ikr\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_r^{+\infty} e^{ikt\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(t)\, dt \right);$$

il termine entro ( ) non supera in modulo:

$$e^{-r|\operatorname{Im} k|} \int_0^{r} e^{t|\operatorname{Im} k|}\, |v(t)|\, dt + e^{r|\operatorname{Im} k|} \int_r^{+\infty} e^{-t|\operatorname{Im} k|}\, |v(t)|\, dt \longrightarrow 0 \qquad (r \longrightarrow +\infty)$$

per il Lemma 1.

Unicità. Se $y'' + k^2 y + v = 0$, $y(0) = 0$, si ha necessariamente:

$$y(r) = C\,\frac{\operatorname{sen} kr}{k} + z(r), \tag{3.9}$$

dove C è una costante arbitraria. Allora:

$$y'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, y(r) = C\, e^{-ikr\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} +$$
$$+ (z'(r) - ik \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, z(r));$$

pertanto, la eondizione per $r \to +\infty$ implica $C = 0$, quindi $y = z$.

LEMMA 4. *Medesime ipotesi del Lemma 3; fissiamo m, $p \leq m \leq$ $\leq +\infty$. Esiste una ed una sola soluzione del problema:*

$$\chi''(r) + k^2 \chi(r) + v(r) = 0$$

$$\chi(0) = 0, \left(\int_0^{+\infty} |\chi(r)|^m\, dr\right)^{\frac{1}{m}} < +\infty;$$

la soluzione di (4.1) *è uguale alla soluzione di* (3.1).

Dimostrazione. L'esistenza segue dal Lemma 3; l'unicità da (3.9).

LEMMA 5. *Sia*

$$U(r, t) = \int_0^{+\infty} e^{-h|s-t|}\, |V(r, s)|\, ds \qquad (h > 0).$$

Risulta (cfr. (8)):

$$\left[\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty} U(r, t)^p\, dr\right)^{\frac{p'}{p}} dt\right]^{\frac{1}{p'}} \leq 2Ah^{-1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}.$$

Dimostrazione. Per la diseguaglianza di Minkowski:

$$\| U(\cdot, t)\|_{L^p(0,+\infty)} \leq \int_0^{+\infty} e^{-h|s-t|}\, \| V(\cdot, s)\|_{L^p(0,+\infty)}\, ds;$$

allora, per il Lemma 2 (ricordiamo che per ipotesi $p' \geq q$):

$$\left(\int_0^{+\infty} \| U(\cdot, t) \|_{L^p(0,+\infty)}^{p'} dt\right)^{\frac{1}{p'}} \leq 2h^{-1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \| V(\cdot, s) \|_{L^p(0,+\infty)}^{q} ds\right)^{\frac{1}{q}} =$$

$$= 2Ah^{-1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}$$

che equivale all'asserto.

3. **Dimostrazione del teorema 1.**

1) Sia $\Phi(r)$ una soluzione del problema (a) - (a'). Osserviamo che:

$$\int_0^{+\infty} V(\cdot, s)\, \Phi(s)\, ds \in L^p(0, +\infty);$$

infatti per le diseguaglianze di Minkowski e Hölder:

$$\left\| \int_0^{+\infty} V(\cdot, s)\, \Phi(s)\, ds \right\|_{L^p(0,+\infty)} \leq \int_0^{+\infty} \| V\cdot, s) \|_{L^p(0,+\infty)} \,|\, \Phi(s) \,|\, ds \leq$$

$$\leq \left(\int_0^{+\infty} \| V(\cdot, s \|_{L^p(0,+\infty)}^{q} ds\right)^{\frac{1}{q}} \| \Phi \|_{L^{q'}(0,+\infty)} = A \| \Phi \|_{L^{q'}(0,+\infty)} .$$

Allora dall'equazione segue $v = \Phi'' + k^2 \Phi \in L^p(0, +\infty)$. Per il Lemma 3, Φ ha le proprietà (9) e risulta:

$$\Phi(r) = -\int_0^{+\infty} G(k; r, t)\, v(t)\, dt, \tag{12}$$

dove $G(k; r, t)$ è definito da (3.3). Per (12) e per l'equazione integrodifferenziale (a), v è soluzione della equazione integrale:

$$v(r) = f(r) - \int_0^{+\infty} V(r, s)\, ds \int_0^{+\infty} G(k; s, t)\, v(t)\, dt$$

che si può anche scrivere:

$$v(r) = f(r) - \int_0^{+\infty} N(k\,;r, t)\, v(t)\, dt, \tag{13}$$

dove:

$$N(k\,; r, t) = \int_0^{+\infty} G\,(k\,; s, t)\; V(r, s)\, ds = \tag{14}$$

$$= e^{ikt\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \int_0^t \frac{\operatorname{sen} ks}{k}\, V(r, s)\, ds + \frac{\operatorname{sen} kt}{k} \int_t^{+\infty} e^{iks\cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\; V(r, s)\, ds.$$

Inversamente, sia v una soluzione di classe $L^p(0, +\infty)$ della equazione integrale (13). Definiamo $\Phi(r)$ per mezzo di (12): si verifica immediatamente, in base al Lemma 3, che Φ è soluzione del problema (a) - (a′).

2) Sia $\chi(r)$ una soluzione del problema (b). Come precedentemente si osserva che $\int_0^{+\infty} V(\cdot, s)\, \chi(s)\, ds \in L^p(0, +\infty)$, dunque

$$w = \chi'' + k^2 \chi \in L^p(0, +\infty).$$

Allora per il Lemma 4, $\chi(r)$ ha le proprietà (9); inoltre, come precedentemente, si riconosce che $w(r)$ è soluzione dell'equazione integrale omogenea:

$$w(r) = -\int_0^{+\infty} N\,(k\,; r, t)\, w\,(t)\, dt. \tag{15}$$

Inversamente, sia $w(r)$ una soluzione di classe $L^p(0, +\infty)$, non nulla, della equazione (15); definiamo:

$$\chi(r) = \int_0^{+\infty} G\,(h\,; r, t)\, w\,(t)\, dt \left\| \int_0^{+\infty} G\,(k\,; \cdot, t)\, w\,(t)\, dt \right\|_{L^{q'}(0, +\infty)}^{-1};$$

per il Lemma 4, $\chi(r)$ così definita è soluzione di (b).

3) Per (14) - (3.4),

$$| N(k\,; r, t) | \leq \frac{1}{|k|} \int_0^{+\infty} e^{-|\mathrm{Im}\, k|\, |s-t|} \, | V(r, s) | \, ds\,;$$

allora per il Lemma 5:

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} | N(k\,; r, t) |^p dr \right)^{\frac{p'}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} \leq \frac{1}{|k|} \, 2A \, | \mathrm{Im}\, k |^{-1-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \leq \tag{18}$$

$$\leq 2A \, | \mathrm{Im}\, k |^{-2-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}.$$

Consideriamo l'operatore $L(k)$ che compare in (13) - (15), cioè l'operatore definito dalla equazione:

$$L(k)\, u(r) = \int_0^{+\infty} N(k\,; r, t)\, u(t)\, dt. \tag{19}$$

Per (18), $L(k)$ è un operatore compatto in $L^p(0, +\infty)$ e si ha [7]:

$$\| L(k) \| \leq 2A \, | \mathrm{Im}\, k |^{-2-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}. \tag{20}$$

Il teorema 1 segue pertanto da quanto osservato in 1)-2), dal teorema dell'alternativa di Riesz-Schauder, e dal principio di Banach Caccioppoli sulle contrazioni.

---

[7]) Ricordiamo la seguente proposizione: se $N(r, t)$ è una funzione misurabile tale che:

$$B = \left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} | N(r, t) |^p \, dr \right)^{\frac{p'}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} < +\infty,$$

l'operatore L definito dalla equazione

$$Lu(r) = \int_0^{+\infty} N(r, t)\, u(t)\, dt$$

è un operatore compatto in $L^p(0, +\infty)$, tale che:

$$\| L \| \leq B.$$

Cfr. [8], pagg. 517-518, es. nn. 51-52-53.

4. Dimostrazione del Teorema 2.

1) Proviamo che $k \longrightarrow L(k)$ [$L(k)$ è l'operatore definito da (19)] è funzione olomorfa nell'aperto $\{k : \operatorname{Im} k \neq 0\}$, a valori operatori limitati in $L^p(0, +\infty)$; inoltre:

$$\left\| \frac{dL}{dk}(k) \right\| \leq 2A \left(\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} . \tag{21}$$

A tale scopo, definiamo l'operatore $L_0(k)$ ponendo:

$$L_0(k)\, u(r) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial N}{\partial k}(k\,; r, t)\, u(t)\, dt,$$

dove:

$$\frac{\partial N}{\partial k}(k\,; r, t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial G}{\partial k}(k\,; s, t)\, V(r, s)\, ds\ ^{8)}.$$

In base a (3.4) e alla formula integrale di Cauchy:

$$\left| \frac{\partial G}{\partial k}(k\,; s, t) \right| = \left| \frac{1}{2\pi\varrho} \int_0^{2\pi} G(k + \varrho e^{i\vartheta}; s, t)\, e^{-i\vartheta}\, d\vartheta \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{\varrho} \max_{\vartheta} \frac{e^{-|\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta|\, |s-t|}}{|\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta|} =$$

$$= \frac{4}{|\operatorname{Im} k|^2}\, e^{-\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|} \qquad \left(\varrho = \frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \right);$$

quindi:

$$\left| \frac{\partial N}{\partial k}(k\,; r, t) \right| \leq \frac{4}{(\operatorname{Im} k)^2} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2} |\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|}\, |V(r, s)|\, ds.$$

---

[8]) Osserviamo che il nucleo $N(k\,; r, t)$, definito da (14), è funzione olomorfa di k nell'aperto $\{k : \operatorname{Im} k \neq 0\}$, per r e t fissati: questo segue dalla olomorfia di $G(k\,; r, t)$ e dalla maggiorazione (3.4).

Per il Lemma 5:

$$\left[\int_0^{+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial N}{\partial k}(k\,;\,r,t)\right|^p dr\right)^{\frac{p'}{p}} dt\right]^{\frac{1}{p'}} \leq 2A\left(\frac{1}{2}\,|\operatorname{Im} k\,|\right)^{-3-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}},$$

dunque (cfr. nota (7)) $L_0(k)$ è un operatore limitato in $L^p(0, +\infty)$ tale che:

$$\|L_0(k)\| \leq 2A\left(\frac{1}{2}\,|\operatorname{Im} k\,|\right)^{-3-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}}. \tag{24}$$

La differenza fra $L_0(k)$ e il rapporto incrementale di $L(k)$ è l'operatore rappresentato dalla equazione:

$$\left(\frac{L(k+h)-L(k)}{h}-L_0(k)\right)u(r)=\int_0^{+\infty}\left(\frac{N(k+h\,;\,r,t)-N(k\,;\,r,t)}{h}-\right.$$
$$\left.-\frac{\partial N}{\partial k}(k\,;\,r,t)\right)u(t)\,dt\,;$$

si ha:

$$\left|\frac{N(k+h\,;\,r,t)-N(k\,;\,r,t)}{h}-\frac{\partial N}{\partial k}(k\,;\,r,t)\right| \leq \tag{25}$$
$$\leq \int_0^{+\infty}\left|\frac{G(k+h\,;\,s,t)-G(k\,;\,s,t)}{h}-\frac{\partial G}{\partial k}(k\,;\,s,t)\right|\,|\,V(r,s)\,|\,ds \leq$$
$$\leq \frac{|\,h\,|}{\frac{1}{2}\,|\operatorname{Im} k\,|-|\,h\,|}\;\frac{4}{(\operatorname{Im} k)^2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k|\cdot|s-t|}\,|\,V(r,s)\,|\,ds$$
$$\left(|\,h\,|\leq\frac{1}{2}\,|\operatorname{Im} k\,|\right);$$

(25) si deduce dalla seguente maggiorazione, che discende da (3.4) e dalla formula integrale di Cauchy:

$$\left|\frac{G(k+h\,;\,s,t)-G(k\,;\,s,t)}{h}-\frac{\partial G}{\partial k}(k\,;\,s,t)\right| =$$

$$= \left| \frac{h}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{G(k+\varrho e^{i\vartheta}; s, t)}{e^{i\vartheta}(\varrho e^{i\vartheta} - h)} d\vartheta \right| \leq$$

$$\leq \frac{|h|}{\varrho} \max_{\vartheta} \frac{e^{-|\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta| \, |s-t|}}{|\varrho e^{i\vartheta} - h| \, |\operatorname{Im} k + \varrho \operatorname{sen} \vartheta|} \leq \frac{|h| e^{-\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k| \cdot |s-t|}}{\left(\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k| - |h|\right)\left(\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k|\right)^2}$$

$$\left(\varrho = \frac{1}{2}|\operatorname{Im} k|\right).$$

Per (25) e il Lemma 5 si ha:

$$\left[\int_0^{+\infty} \left(\int_0^{+\infty} \left| \frac{N(k+h; r, t) - N(k; r, t)}{h} - \frac{\partial N}{\partial k}(k; r, t) \right|^p dr \right)^{\frac{p'}{p}} dt \right]^{\frac{1}{p'}} \leq$$

$$\leq 2A \frac{|h|}{\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k| - |h|} \left(\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k|\right)^{-3-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \left(|h| \leq \frac{1}{2}|\operatorname{Im} k|\right);$$

ne segue (cfr. nota (7)):

$$\left\| \frac{L(k+h) - L(k)}{h} - L_0(k) \right\| \leq 2A \frac{|h|}{\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k| - |h|} \left(\frac{1}{2}|\operatorname{Im} k|\right)^{-3-\frac{1}{p'}+\frac{1}{q}} \rightarrow 0 \; (h \rightarrow 0).$$

Abbiamo così provato che $L(k)$ è derivabile e $\frac{dL(k)}{d} = L_0(k)$; (21) segue da (24).

2) A norma del teorema 1, l'insieme Ω è l'insieme dei k tali che $R(k) = (1 + L(k))^{-1}$ esiste (segue dalla teoria di Riesz-Schauder, che, per ogni $k \in \Omega$, $R(k)$ è limitato e il dominio di $R(k)$ coincide con $L^p(0, +\infty)$).

Proviamo che Ω è aperto. Questo segue da (21) e dal fatto che l'insieme degli operatori in $L^p(0, +\infty)$, lineari limitati ed invertibili, è aperto nell'algebra degli operatori lineari limitati in $L^p(0, +\infty)$. Più precisamente, procediamo così. Ricordiamo che se

A è un operatore (lineare limitato) invertibile, ogni operatore B, tale che $\| B - A \| < \dfrac{1}{\| A^{-1} \|}$, è invertibile e si ha:

$$B^{-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} [A^{-1}(A - B)]^n A^{-1} \qquad (\| B - A \| < 1/\| A^{-1} \|), \tag{27}$$

la serie convergendo nella norma degli operatori.

Fissiamo $k \in \Omega$ e applichiamo l'osservazione precedente all'operatore $A = 1 + L(k)$, al suo inverso $A^{-1} = R(k)$, e all'operatore $B = 1 + L(k + h)$. Per (21) si ha:

$$\| L(k+h) - L(k) \| \leq |h| \, 2A \left(\frac{|\operatorname{Im} k| - |h|}{2} \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} \qquad (|h| < |\operatorname{Im} k|);$$

se fissiamo $\delta \, (0 < \delta < |\operatorname{Im} k|)$ in modo che:

$$2A \left(\frac{|\operatorname{Im} k| - \delta}{2} \right)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}} = \frac{1}{\delta \, \| R(k) \|}$$ [9]),

risulta:

$$\| L(k + h) - L(k) \| \leq \frac{|h|}{\delta \, \| R(k) \|} \qquad (|h| \leq \delta), \tag{28}$$

quindi:

$$\| B - A \| = \| L(k + h) - L(k) \| < \frac{1}{\| R(k) \|} = \frac{1}{\| A^{-1} \|} \quad \text{per } |h| < \delta.$$

Vuol dire che $R\,(h + h) = B^{-1}$ esiste per ogni h tale che $|h| < \delta$: pertanto Ω è aperto.

Proviamo che $k \to R(k)$ è funzione olomorfa in Ω, a valori operatori limitati in $L^p(0, +\infty)$. Per (27)-(28), se $|h| < \delta$:

$$R(k + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} [R(k)(L(k) - L(k + h))]^n R(k),$$

---

[9]) La funzione di δ : $\delta \, (|\operatorname{Im} k| - \delta)^{-3 - \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}}$ è crescente per $0 \leq \delta < |\operatorname{Im} k|$, nulla per $\delta = 0$, tende a $+\infty$ per $\delta \to |\operatorname{Im} k|$.

$$\frac{R(k+h)-R(k)}{h}=-R(k)\frac{L(k+h)-L(k)}{h}R(k)+$$
$$+h\sum_{n=2}^{+\infty}h^{n-2}\left[R(k)\frac{L(k)-L(k+h)}{h}\right]^n R(k),$$

$$\left\|\sum_{n=2}^{+\infty}h^{n-2}\left(R(k)\frac{L(k)-L(k+h)}{h}\right)^n R(k)\right\|\leq$$
$$\leq\sum_{n=2}^{+\infty}|h|^{n-2}\,\|R(k)\|^{n+1}\left\|\frac{L(k+h)-L(k)}{h}\right\|^n\leq$$
$$\leq\frac{\|R(k)\|}{\delta^2}\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{|h|}{\delta}\right)^{n-2}=\frac{\|R(k)\|}{\delta^2}\;\frac{1}{1-|h|/\delta};$$

ne segue:

$$\left\|\frac{R(k+h)-R(k)}{h}+R(k)\frac{dL(k)}{dk}R(k)\right\|\to 0 \qquad (h\to 0).$$

3) Poniamo: $v(k,r)=\Phi''(k,r)+k^2\,\Phi(k,r)$. Per quanto è provato nella dimostrazione del teorema 1, $v(k,\cdot)$ è, per ogni $k\in\Omega$, la soluzione di classe $L^p(0,+\infty)$ della equazione integrale:

$$v(k,r)=f(k,r)-L(k)\,v(k,r);$$

pertanto:

$$v(k,\cdot)=R(k)\,f(k,\cdot).$$

Di qui segue, per la dimostrata olomorfia di $R(k)$, che

$$\Omega\ni k\to v(k,\cdot)\in L^p(0,+\infty)$$

è funzione olomorfa.

L'andamento asintotico di $\Phi(k,r)$ è provato nel Lemma 3; per completare la dimostrazione del punto 4) dell'enunciato basta provare che:

$$T_0(k)=\int_0^{+\infty}e^{ikt\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}k)}\,v(k,t)\,dt$$

è funzione olomorfa in Ω. Allo scopo definiamo:

$$T_0'(k)=\int_0^{+\infty}e^{ikt\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}k)}\,v'(k,t)\,dt+i\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}k)\int_0^{+\infty}te^{ikt\cdot\operatorname{sgn}(\operatorname{Im}k)}\,v(k,t)\,dt,$$

dove v' è la derivata della funzione $k \longrightarrow v(k, \cdot)$; se $|h| < |\operatorname{Im} k|$ si ha:

$$\left| \frac{T_0(k+h) - T_0(k)}{h} - T_0'(k) \right| =$$

$$= \left| \int_0^{+\infty} e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \left(\frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} \right) - v'(k, t) \right) dt +$$

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{iht \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1}{iht \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1 \right) it \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)}\, v(k, t)\, dt +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{iht \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1}{ih \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} - 1 \right) it \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)\, e^{ikt \cdot \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} k)} \left[\frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} - \right.$$

$$\left. - v'(k, t) \right] dt \Bigg| \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-t |\operatorname{Im} k|} \left| \frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} - v'(k, t) \right| dt +$$

$$+ \frac{1}{2} |h| \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(|\operatorname{Im} k| - |h|) t} |v(k, t)| \, dt + \text{[10]}$$

$$+ \frac{1}{2} |h| \int_0^{+\infty} t^2 e^{-(|\operatorname{Im} k| - |h|) t} \left| \frac{v(k+h, t) - v(k, t)}{h} - v'(k, t) \right| dt \leq$$

$$\leq \left\| \frac{v(k+h, \cdot) - v(k, \cdot)}{h} - v'(k, \cdot) \right\|_{L^p(0, +\infty)} \left[\left(\int_0^{+\infty} e^{-p' t |\operatorname{Im} k|} dt \right)^{\frac{1}{p'}} + \right.$$

[10] $\left| \dfrac{e^z - 1}{z} - 1 \right| = \left| z \displaystyle\int_0^1 (1 - s) e^{sz} ds \right| \leq |z| \displaystyle\int_0^1 (1 - s) e^{s \operatorname{Re} z} ds \leq \dfrac{1}{2} |z| e^{|\operatorname{Re} z|}$.

$$+\frac{1}{2}|h|\left(\int_0^{+\infty} t^{2p'}\, e^{-p'(|\operatorname{Im} k|-|h|)t}\, dt\right)^{\frac{1}{p'}}\Bigg]+$$

$$+\frac{1}{2}|h|\,\|v(k,\cdot)\|_{L^p(0,+\infty)}\left(\int_0^{+\infty} t^{2p'}\, e^{-p'(|\operatorname{Im} k|-|h|)t}\, dt\right)^{\frac{1}{p'}} \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0).$$

Pertanto, $T_0(k)$ è derivabile e $T_0'(k)$ è la sua derivata. Il punto 3) dell'enunciato, e cioè l'olomorfia di $\Phi(\cdot, r)$ per ogni r fissato, segue (con un ragionamento analogo a quello fatto a proposito di $T_0(k)$) dalla rappresentazione:

$$\Phi(k, r) = -\int_0^{+\infty} G(k; r, t)\, v(k, t)\, dt.$$

BIBLIOGRAFIA

[1] F. V. Atkinson: *On Sommerfeld's « radiation condition »* (The philosophical Magazine 40, 1949).

[2] V. D. Bazdyrev: *Equivalenza dei principi della « Limiting amplitude » e « limiting input »* (in russo) (Izv. Vyšs. Učebn. Zaved. Matematika, 1 (32) (1963).

[3] M. Bertero - G. Talenti - G. A. Viano: *The Born series for nonlocal potentials (S-wave)* (Nuovo Cimento 46, 1966).

[4] M. Bertero - G. Talenti - G. A. Viano: *Scattering and bound-states solutions for a class of nonlocal potentials (S-wave)*. (In corso di stampa).

[5] R. N. Buchal: *The approach to steady state of solutions of exterior boundary value problems for the wave equation* (J. Math. Mech. 12, 1963).

[6] Courant - Hilbert: *Methods of mathematical physics* (Interscience, New York, 1962), vol. 2, pagg. 312-320.

[7] V. de Alfaro - T. Regge: *Potential scattering* (Amsterdam, 1965).

[8] N. Dunford - J. Schwartz: *Linear operators* (Interscience, New York, 1958).

[9] D. M. Eidus: *Sul principio della « limiting amplitude »* (in russo) (Dokl. Akad. Nauk SSS R 158, 1964).

[10] H. G. Garnir: *Fonctions de variables réelles*, vol. 2 (Louvain - Paris, 1965).

[11] M. M. Gehtmann: « *Sul principio della « limiting amplitude »* (Dokl. Akad. Nauk SSSR 153, 1963).

[12] V. V. Grošin: *Condizioni del tipo di Sommerfeld per una classe di equazioni alle derivate parziali* (in russo) (Mat. Sb. (N. S.) 61 (103), (1963).

[13] Hardy-Littlewood-Pólya: *Inequalities* (Cambridge, 1964).

[14] G. Hellwig: *Eine Bemerkung zum Ausstrahlungsproblem* (Math. Z. 78, 1962).

[15] Hille-Phillips: *Functional analysis and semi-groups* (Amer. Math. Soc. Coll. Publ. XXXI).

[16] E. K. Isakova: *Sul principio della « limiting amplitude » per certi problemi al contorno nel piano* (trad. in: Soviet. Math. Dokl. 6, 1965).

[17] P. D. Lax-C. Morawetz-R. S. Phillips: *The exponential decay of the solutions of the wave equation in the exterior of a star-shaped obstacle* (Bull. Amer. Math. Soc. 68. 1962).

[18] L. Levine: *A uniqueness theorem for the reduced wave equation* (Comm. Pure Appl. Math. 17, 1964).

[19] V. P. Mihailov: *Sul principio della « limiting amplitude »* (in russo) (Dokl. Akad. Nauk. SSSR 159, 1964).

[20] C. Morawetz: *The limiting amplitude principle* (Comm. Pure Appl. Math. 15, 1962).

[21] C. MORAWETZ : *The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation* (Comm. pure Appl. Math. 14, 1961).

[22] R. NEWTON : *Scattering theory of waves and particles* (Mc Graw-Hill Company, New York, 1966).

[23] L. S. PARASJUK : *Condizioni di radiazione per certe equazioni ellittiche che degenerano alla frontiera* (in ucraino) (Dopovidi Akad. Nauk Ukraïn RSR, 1963).

[24] F. RELLICH : *Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + ku = 0$ in unendlichen Gebieten* (Jber. Deutschen Mat. Verein 53, 1943).

[25] C. H. WILCOX : *A Generalisation of theorems of Rellich and Atkinson* (Proc. Amer. Math. Soc. 7, 1956).

[26] C. H. WILCOX : *The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary* (Amer. Math. Soc. Not. Abstract 564-20, vol. 6, 1959).

[27] E. C. ZACHMANOGLOU : *The decay of solutions of the initial-boudary value problem for hyperbolic equations* (J. Math. Anal. Appl. 13, 1966).

[28] A. SOMMERFELD : *Partial Differential Equations in Physics* (Academic Press, 1964), pagg. 188-200.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 aprile 1967.