RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

FRANCO NAPOLITANI

Proprietà reticolari dell'insieme dei sottogruppi subnormali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 293-304
<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__293_0>

PROPRIETÀ RETICOLARI DELL' INSIEME DEI SOTTOGRUPPI SUBNORMALI

Franco Napolitani *)

Sia G un gruppo. Un sottogruppo K di G dicesi subnormale in G se esiste una catena di sottogruppi, ciascuno normale nel successivo,

$$K = K_0 \lhd K_1 \lhd \dots \lhd K_n = G$$

con n finito; se K è subnormale in G si scrive $K \lhd\lhd G$.

Indichiamo con $S(G)$ l'insieme dei sottogruppi subnormali di G. È noto che, in generale, $S(G)$ non è un reticolo rispetto alle operazioni di intersezione ed unione gruppale: l'unione di due elementi di $S(G)$ non sempre è un sottogruppo subnormale di G.

Dati due sottogruppi K ed H subnormali in G, si dice che (K, H) forma una coppia modulare di $S(G)$ se, per ogni $C \in S(G)$, $C \supseteq K$, si ha

$$(K \cup H) \cap C = K \cup (H \cap C).$$

In questa nota si prova che (K, H) è una coppia modulare di $S(G)$ se, e solo se, K ed H sono sottogruppi permutabili; da ciò segue in particolare che l'unione di due sottogruppi subnormali che formano una coppia modulare di $S(G)$ è ancora un sottogruppo subnormale di G.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matem. del C. N. R..

Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università Padova.

Nel reticolo $\mathcal{L}(G)$ di tutti i sottogruppi di G si considera poi il sottoreticolo $\overline{S(G)}$ generato da $S(G)$; si determinano i gruppi G risolubili con $\overline{S(G)}$ distributivo. La risoluzione di questa questione consente anche di completare alcuni risultati di M. Curzio e R. Permutti [1] relativi ai T-gruppi risolubili (brevemente ST-gruppi) con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo.

Infine, considerata la classe $\mathfrak{M}$ di tutti i gruppi che verificano la condizione minimale per i sottogruppi subnormali, si dà una condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo $G \in \mathfrak{M}$ abbia $S(G)$ distributivo; questo risultato deve ritenersi una parziale estensione di un teorema di G. Zacher relativo ai gruppi finiti [5].

Le notazioni saranno quelle usuali della teoria dei gruppi.

In particolare, se H e K sono sottogruppi di un gruppo G, con $\mathfrak{N}_H(K)$ e $C_H(K)$ denoteremo rispettivamente il normalizzante ed il centralizzante di K in H; il simbolo $\langle a, b, \ldots \rangle$ indicherà il sottogruppo generato dalla parte $\{a, b, \ldots\}$ di G e $\pi(G)$ l'insieme di tutti i numeri primi p tali che G contenga un elemento di ordine p.

1. Si ha subito:

LEMMA I. *Siano K e H due sottogruppi subnormali di G: (K, H) è una coppia modulare di $S(G)$ se, e solo se, $KH = HK$.*

DIM: È sufficiente provare che (K, H) coppia modulare di $S(G)$ implica $KH = HK$, il viceversa essendo evidente.

Sia

$$K = K_i \lhd K_{i-1} \lhd \ldots \lhd K_0 = G$$

la serie normale discendente [1]) di K in G. Se l'indice di subnormalità $i = i(K, G)$ di K in G è 0 oppure 1, la proposizione è vera; si procederà allora per induzione su i.

---

[1]) Sia K un sottogruppo subnormale di G. La serie normale discendente di K in G viene definita ponendo $K_0 = G$ e, supposto definito K_j come un sottogruppo contenente K, K_{j+1} si ottiene come intersezione di tutti i sottogruppi normali di K_j contenenti K. La lunghezza $i(K, G)$ della serie normale discendente è minore o tutt'al più uguale alla lunghezza di ogni altra catena normale tra K e G: $i(K, G)$ si chiama indice di subnormalità di K in G.

Per ogni fissato $C \in S(K_1)$, $C \supseteq K$, si ha

$$[K \cup (H \cap K_1)] \cap C = [(K \cup H) \cap K_1] \cap C =$$

$$= (K \cup H) \cap C = K \cup [H \cap C] = K \cup [(H \cap K_1) \cap C]$$

e quindi $(K, H \cap K_1)$ forma una coppia modulare di $S(K_1)$.

Ora $i(K, K_1)$ è minore di $i(K, G)$; sicchè per l'ipotesi di induzione si ha

$$K \cup (H \cap K_1) = K(H \cap K_1).$$

Quindi, poichè (K, H) è una coppia modulare di $S(G)$,

$$(K \cup H) \cap K_1 = K(H \cap K_1)$$

ed, essendo $K_1 \lhd G$, $K(H \cap K_1)$ è normale in $K \cup H$.

L'asserto segue allora dalla relazione

$$K \cup H = K(H \cap K_1) H = KH.$$

Osservazione 1: Nella dimostrazione del lemma I non si è fatto uso della ipotesi che H fosse un sottogruppo subnormale di G. Pertanto si può affermare che un sottogruppo subnormale K di G è permutabile con un sottogruppo H di G se, e solamente se, per ogni $C \in S(G)$, $C \supseteq K$, si ha $(K \cup H) \cap C = K \cup (H \cap C)$.

D. S. Robinson ha osservato [3] che in un gruppo l'unione di una coppia di sottogruppi subnormali permutabili è ancora un sottogruppo subnormale; si ha quindi:

Corollario I. *Se $K \lhd\lhd G$, $H \lhd\lhd G$ formano una coppia modulare di $S(G)$, allora $K \cup H$ è subnormale in G.*

2. Sia G un gruppo con $\overline{S(G)}$ distributivo. Poichè due qualunque sottogruppi subnormali di G formano una coppia modulare di $S(G)$, segue dal corollario I che $\overline{S(G)}$ coincide con $S(G)$. Inoltre ogni sottogruppo subnormale ed ogni immagine omomorfa di G ha ancora il reticolo generato dai suoi sottogruppi subnormali distributivo; e, poichè in un gruppo abeliano $\overline{S(G)} = \mathcal{L}(G)$, G quando

è abeliano, risulta localmente ciclico [2]). Segue da ciò che ogni fattore abeliano di un sottogruppo subnormale di G è localmente ciclico: in particolare i sottogruppi subnormali abeliani di G sono localmente ciclici.

Si consideri l'unione A_G di tutti i sottogruppi subnormali abeliani di G: sempre nell'ipotesi che $\overline{S(G)}$ sia distributivo, A_G è localmente ciclico. Infatti se A_1 e A_2 sono due sottogruppi subnormali abeliani di G, dalla distributività di $\overline{S(G)}$ segue che $1 \subseteq A_1 \cap A_2 \subseteq A_1 \cup A_2$ è una catena centrale di $A_1 \cup A_2$. Allora $A_1 \cup A_2$ è nilpotente, sicchè $\overline{S(A_1 \cup A_2)}$ coincide con $\mathcal{L}(A_1 \cup A_2)$ ed $A_1 \cup A_2$ è localmente ciclico.

Sono adesso evidenti le considerazioni da fare per concludere che A_G è localmente ciclico.

LEMMA 2. *Se nella serie derivata*

$$G \supseteq G' \supseteq \ldots \supseteq G^{(i-1)} \supseteq G^{(i)} \supseteq G^{(i+1)} \supseteq \ldots$$

di un gruppo G due successivi quozienti $G^{(i-1)} / G^{(i)}$ e $G^{(i)} / G^{(i+1)}$, *sono localmente ciclici, si ha* $G^{(i+1)} = 1$.

Il lemma 2, dimostrato in [7] nell'ipotesi che i quozienti siano ciclici, si estende con analoghe argomentazioni.

LEMMA 3. *In un gruppo G con $\overline{S(G)}$ distributivo ogni sottogruppo subnormale risolubile o fattore risolubile ha serie derivata di lunghezza al più* 2.

DIM: Evidente a partire dalle considerazioni precedenti.

LEMMA 4. *Sia G un gruppo non abeliano, libero da torsione e risolubile. $\overline{S(G)}$ è distributivo se, e solo se, si ha simultaneamente:*

α) $G = H \rtimes \langle a \rangle$ (prodotto semi-diretto di $H \lhd G$ per $\langle a \rangle$) *con H localmente ciclico*

β) *ogni sottogruppo subnormale di G è confrontabile con H.*

---

[2]) È noto che un gruppo G è localmente ciclico se, e solo se, $\mathcal{L}(G)$ è distributivo.

DIM: Sia G un gruppo risolubile, non abeliano e libero da torsione; inoltre $\overline{S(G)}$ sia distributivo. Per il lemma 3 A_G contiene il derivato G' di G, sicchè $C_G(A_G)/A_G$ è localmente ciclico. Ne segue che $C_G(A_G)$ è abeliano e quindi, poichè A_G è il più grande sottogruppo subnormale abeliano di G, $C_G(A_G) = A_G \cdot G/A_G$ è allora isomorfo ad un gruppo di N di automorfismi di A_G.

Se G/A_G fosse di torsione, N avrebbe ordine 2 (si tenga presente che A_G è localmente ciclico e libero da torsione) e sarebbe generato dall' automorfismo involutorio di A_G; esisterebbe pertanto un elemento a tale che $G = \langle a, A_G \rangle$ ed $aba^{-1} = b^{-1}$ per ogni $b \in A_G$. In particolare $a\,a^2\,a^{-1} = a^2 = a^{-2}$, ossia $a^4 = 1$ ed a sarebbe periodico: assurdo. G/A_G è dunque libero da torsione. Ora A_G, quale gruppo abeliano libero da torsione e di rango 1, è isomorfo ad un sottogruppo di Q^+ (gruppo additivo dei numeri razionali); quindi G/A_G, dovendo essere isomorfo ad un sottogruppo libero da torsione e di rango 1 del gruppo moltiplicativo $Q - \{0\}$ dei razionali, è ciclico [3]). Ricordando che ogni estensione di un gruppo B mediante un gruppo libero si spezza su B, si può scrivere $G = A_G \rtimes \langle a \rangle$ con a aperiodico e la α) è provata.

Resta da provare la β); a tal fine, supponiamo per assurdo che esista un $T \lhd\lhd G$ non confrontabile con A_G.

Allora

$$T \cup A_G / T \cap A_G = T/T \cap A_G \times A_G/T \cap A_G$$

e $T \cup A_G/T \cap A_G$ è abeliano, essendo sia $T/T \cap A_G$ che $A_G/T \cap A_G$ abeliani, e quindi localmente ciclico. Ma ciò è assurdo, osservato che $T/T \cap A_G \simeq A_G \cup T/A_G$ è libero da torsione ed, essendo $T \cap A_G \neq 1$, $A_G/T \cap A_G$ è di torsione e non identico.

Viceversa è chiaro che un gruppo G che verifica la α) e la β) ha $\overline{S(G)}$ distributivo.

Il teorema che segue consente di determinare i gruppi risolubili e senza torsione con $\overline{S(G)}$ distributivo.

---

3) È sufficiente osservare che si ha $Q - \{0\} = Z(2) \times L$ con L gruppo abeliano libero; dunque gli unici sottogruppi localmente ciclici di $Q - \{0\}$ sono monogeni.

Teorema I. *Sia G un gruppo libero da torsione risolubile e non abeliano. Sono equivalenti le proposizioni:*

α) G è l'estensione di Q^+ mediante $\langle a \rangle$, dove a è un elemento che induce su Q^+ un automorfismo aperiodico.

β) $\overline{S(G)}$ è distributivo.

Dim: $\alpha) \Longrightarrow \beta)$.

Sia G l'estensione di Q^+ mediante $\langle a \rangle$, con a elemento che induce su Q^+ un automorfismo aperiodico. Si può scrivere $G = Q^+ \leftthreetimes \langle a \rangle$.

Poichè l'anello degli endomorfismi $E(Q^+)$ di Q^+ è Q, esiste un razionale t tale che per ogni $m \in Q^+$ l'elemento ama^{-1} è uguale all'ordinario prodotto tm dei razionali t ed m: $ama^{-1} = tm$.

Il commutatore $[a, m] = ama^{-1} m^{-1}$ di a ed m è quindi $(t - 1)m$; ora t è diverso da 1, per cui $t - 1$ è un elemento invertibile di Q. Segue che il derivato di G è Q^+.

Indicato con A un sottogruppo contenente propriamente Q^+, A è uguale a $Q^+ \leftthreetimes \langle a^n \rangle$ con n intero non nullo e, pertanto, rimanendo valido per A il precedente ragionamento, il derivato di A è ancora Q^+.

Ciò premesso, supponiamo per assurdo esista un sottogruppo $T \lhd\lhd G$ non confrontabile con Q^+. È lecito supporre $Q^+ \subset \mathcal{N}_G(T)$. Si ha

$$T \cup Q^+/T \cap Q^+ = T/T \cap Q^+ \times Q^+/T \cap Q^+,$$

sicchè, essendo $T/T \cap Q^+$ e $Q^+/T \cap Q^+$ abeliani, anche $T \cup Q^+/T \cap Q^+$ è abeliano. Dunque $T \cap Q^+$ contiene il derivato di $T \cup Q^+$; osservato che $T \cup Q^+ \supset Q^+$ e che $T \cap Q^+$ è contenuto propriamente in Q^+ si è pervenuti ad una contraddizione.

Il lemma 4 assicura allora che $\overline{S(G)}$ è distributivo.

$\beta) \Longrightarrow \alpha)$.

È sufficiente a tal fine provare che ogni estensione G di un gruppo H localmente ciclico, libero da torsione e non isomorfo a Q^+ mediante un gruppo ciclico infinito $\langle a \rangle$ non può avere $\overline{S(G)}$ distributivo. Poichè H non è un gruppo divisibile esiste un numero primo p tale che $H^p \neq H$; H^p è caratteristico in H, dunque normale in G e, tenuto conto del fatto che H è localmente ciclico, si ha che $|H/H^p| = p$.

Il centralizzante $C_{G/H^p}(H/H^p)$ di H/H^p in G/H^p ha quindi indice finito in G/H^p. Segue che $C_{G/H^p}(H/H^p)$ contiene propriamente H/H^p.

Osservato che $C_{G/H^p}(H/H^p)$ è abeliano e di tipo misto, è chiaro che $\overline{S(G)}$ non può essere distributivo.

LEMMA 5. *Sia G un gruppo risolubile con almeno un elemento periodico non identico. Se $\overline{S(G)}$ è distributivo, G è un T-gruppo* [4].

DIM: Distinguiamo i casi seguenti:

a) A_G è di torsione.

A_G è allora un gruppo a componenti primarie del tipo $z(p^k)$, $0 \leq k \leq \infty$. Essendo ogni sottogruppo di A_G caratteristico in G e $A_G \supseteq G'$, i sottogruppi confrontabili con A_G sono normali in G.

Se G contiene un sottogruppo $T \lhd\lhd G$ non confrontabile con A_G, si ha

$$TA_G/T \cap A_G = T/T \cap A_G \times A_G/T \cap A_G;$$

sicchè $TA_G/T \cap A_G$ è abeliano, essendo sia $(T/T \cap A_G)$ che $A_G/T \cup A_G$ abeliani, e quindi localmente ciclico. Poichè $A_G/T \cap A_G$ è di torsione, anche $T/A_G \cap T$ è di torsione e conseguentemente anche G. Dopodicchè con semplici considerazioni si ha $T \lhd G$ e G è un T-gruppo.

b) A_G è libero da torsione.

L'esistenza di un elemento di ordine finito non identico implica $[G : A_G] = 2$ e quindi $G = \langle A_G, a \rangle$ con $a^2 = 1$, $axa = x^{-1} (\forall x \in A_G)$. Ora $A_G^2 = A_G$, altrimenti G/A_G^2 sarebbe un gruppo abeliano elementare di ordine 2^2 ed $S(G/A_G^2) = \mathcal{L}(G/A_G^2)$ non sarebbe distributivo. Allora i soli sottogruppi normali propri di G sono i sottogruppi di A_G, ed anche in questo caso G è un T-gruppo.

In base al lemma precedente è dunque necessario, se si vuole conoscere la struttura dei gruppi risolubili G con $\overline{S(G)}$ distributivo, determinare i T-gruppi risolubili G con $N(G)$ distributivo. A tal

---

[4]) Un T-gruppo è un gruppo in cui la normalità è una relazione transitiva.

fine riportiamo la classificazione dei T-gruppi risolubili, così come è stata data da D. S. Robinson [2]:

a) gruppi abeliani;

b) ST-gruppi di tipo 1 : un ST-gruppo G si dice di tipo 1 se non è abeliano e $C_G(G')$ non è periodico;

c) ST-gruppi di tipo 2: un ST-gruppo G non periodico si dice di tipo 2 se non è abeliano e $C_G(G')$ è periodico;

d) ST-gruppi periodici non abeliani.

TEOREMA 2. (cfr. M. Curzio - R. Permutti [1]) *Un gruppo G è un T-gruppo risolubile di tipo* 1 *con $N(G)$ disttibutivo se, e solo se, $G = \langle A, z \rangle$ con A gruppo localmente ciclico senza torsione ed $A = A^2$, $z^2 = 1$, $zaz^{-1} = a^{-1}$ ($\forall a \in A$).*

TEOREMA 3. *Un ST-gruppo di tipo* 2 *ha $N(G)$ distributivo se, e solo se, si ha contemporaneamente*:

i) *G' ha componenti primarie quasi-cicliche;*

ii) *G/G' è localmente ciclico e libero da torsione.*

DIM: Sia G un ST-gruppo di tipo 2 che verifica la i) e la ii); $N(G)$ sarà evidentemente distributivo se ogni sottogruppo normale H di G risulterà confrontabile con G'. Infatti supponiamo (un assurdo) che esista un $H \lhd G$ non confrontabile con G'; essendo $G' \neq H \cap G'$, $G/H \cap G'$ è un ST-gruppo con un elemento di ordine infinito che centralizza il derivato. Ora un ST-gruppo con questa proprietà è o di tipo 1 oppure abeliano [2]: la prima eventualità è però da escludere in quanto in un ST-gruppo di tipo 1 gli elementi di ordine finito non costituiscono un sottogruppo. Pertanto $G/H \cap G'$ è abeliano: un risultato che contrasta con l'assunzione che G' sia il derivato di G.

Viceversa, sia G un ST-gruppo di tipo 2 con $N(G)$ distributivo. Il derivato G' di G è un gruppo abeliano divisibile e di torsione [2], quindi vale la i). La ii) è conseguenza del fatto che $N(G/G') = \mathcal{L}(G/G')$ è distributivo e G/G' non è periodico.

TFOREMA 4. *Sia G un gruppo. Sono equivalenti le proposizioni*:

a) *G è un ST-gruppo periodico con $N(G)$ distributivo.*

b) $G = A \ltimes (B \ltimes C)$, *dove* A *e* B *sono gruppi abeliani a componenti primarie cicliche o quasi cicliche e* C *è un* 2*-gruppo di uno dei tipi seguenti*: i) $Z(2^k)$ con $0 \leq k \leq \infty$; ii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ con $z^2 = 1$, $zaz = a^{-1}$ *per ogni* $a \in Z(2^\infty)$; iii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ *con* $z^2 = a_1$ (elemento di ordine 2 di $Z(2^\infty)$) e $zaz^{-1} = a^{-1}$ *per ogni* $a \in Z(2^\infty)$. *Inoltre* $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(B) \cap \pi(C) = \pi(A) \cap \pi(C) = \emptyset$.

c) G *è un* ST*-gruppo periodico ed ogni sottogruppo di Sylow di* G *è un* T*-gruppo con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo.*

DIM: $a) \Longrightarrow b)$.

Sia G un ST-gruppo periodico con $N(G)$ distributivo. $G/C_G(G')$, essendo localmente ciclico, ha (al più) la potenza del numerabile e quindi G ha la « splitting property » [2] (si spezza, cioè, sulla componente dispari del terzo termine della sua serie centrale discendente). G ha pertanto la seguente struttura [2]: $G = A \ltimes (B \ltimes C)$, dove A e B sono gruppi abeliani, C è un T_2-gruppo (2-gruppo che è T-gruppo) risolubile ed inoltre

$$\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(B) \cap \pi(C) = \pi(A) \cap \pi(C) = \emptyset.$$

Dall'ipotesi che il reticolo dei sottogruppi normali di G è distributivo segue che $\mathcal{L}(A) = N(A)$, $\mathcal{L}(B) = N(B)$ ed $N(C)$ sono distributivi, e quindi A e B sono gruppi abeliani a componenti primarie cicliche o quasi-cicliche, mentre C è un T_2-gruppo risolubile con $N(C)$ distributivo.

Osservato che, a norma di un teorema di M. Curzio - R. Permutti [1], tutti e soli i T_2-gruppi risolubili con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo sono i 2-gruppi i), ii) e iii) di cui all'enunciato della $b)$, la proposizione $b)$ rimane provata.

$b) \Longrightarrow c)$.

Sia $G = A \ltimes (B \ltimes C)$ con A, B e C gruppi che soddisfano alle condizioni enunciate nella $b)$. Per un lemma di D. S. Robinson (cfr. [2] pag. 35) G è un T-gruppo. Inoltre i sottogruppi di Sylow di A, B e C sono T-gruppi con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo. Per concludere che vale la $c)$ basta osservare che ogni sottogruppo di Sylow di G è isomorfo ad un sottogruppo di Sylow di uno dei tre gruppi A, B, C.

$c) \Longrightarrow a)$.

Supposta valida la $c)$, siano X e Y, $X \supset Y$, due sottogruppi normali di G tali che $|X/Y| = p^2$ (p numero primo). G essendo periodico e risolubile, è localmente finito; allora (ragionando localmente) si vede che esiste un p-sottogruppo di Sylow S di G tale che $YS \supseteq X$. Ora $X \cap S$ e $Y \cap S$, $X \cap S \supset Y \cap S$, sono sottogruppi normali di S ed $X \cap S/Y \cap S \simeq X/Y$ ha ordine p^2. Poichè $N(S)$ è distributivo, $X \cap S/Y \cap S$ è ciclico e quindi anche X/Y è ciclico. Un teorema di M. Curzio e R. Permutti [1] assicura allora che $N(G)$ è distributivo.

Raccogliendo i risultati a cui si è pervenuti, si ha che *i gruppi risolubili G con il reticolo $\overline{S(G)}$ distributivo sono*:

a) i gruppi localmente ciclici liberi da torsione.

b) le estensioni del gruppo additivo Q^+ dei razionali del tipo $Q^+ \rtimes \langle a \rangle$, con a elemento che induce su Q^+ un automorfismo aperiodico.

c) i gruppi G tali che $G = \langle A, z \rangle$ con A gruppo localmente ciclico senza torsione ed $A^2 = A$, $z^2 = 1$, $zaz = a^{-1}$ per ogni $a \in A$.

d) i T-gruppi risolubili di tipo 2 nei quali il derivato G' è un gruppo a componenti primarie cicliche o qnasi cicliche ed il quoziente G/G' è un gruppo libero da torsione localmente ciclico.

e) i gruppi con la seguente struttura : $G = A \rtimes (B \rtimes C)$, *con A e B gruppi abeliani a componenti primarie cicliche o quasi cicliche, C 2-gruppo di uno dei seguenti tipi*: i) $Z(2^k)$ *con* $0 \leq k \leq \infty$,

ii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ *con* $z^2 = 1$, $zaz = a^{-1}$ *per ogni* $a \in Z(2^\infty)$, iii) $\langle Z(2^\infty), z \rangle$ *con* $z^2 = a_1$ *(elemento di ordine 2 di $Z(2^\infty)$) e* $zaz^{-1} = a^{-1}$ *per ogni* $a \in Z(2^\infty)$; *ed inoltre* $\pi(A) \cap \pi(B) = \pi(B) \cap \pi(C) = \pi(A) \cap \pi(C) = \emptyset$.

OSSERVAZIONE 2. I gruppi dei tipi $a)$, $c)$, $d)$, ed $e)$ sono T-gruppi; essi sono tutti e soli i T-gruppi risolubili con il reticolo dei sottogruppi normali distributivo.

3. In questo numero vengono caratterizzati gll $\mathcal{M}$-gruppi G con il reticolo $S(G)$ dei sottogruppi subnormali distributivo [5].

---

[5]) J. E. Roseblade ha dimostrato che in un M-gruppo l'insieme dei sottogruppi subnormali è un reticolo [4].

LEMMA 5: *Sia G un $\mathfrak{M}$-gruppo. Se ogni catena normale di G ha ciclici i fattoriali di ordine quadrato di un numero primo, $S(G)$ è modulare.*

DIM: È sufficiente provare che le precedenti ipotesi implicano che i sottogruppi subnormali di G sono a due a due permutabili. Se neghiamo che $S(G)$ sia un reticolo di sottogruppi permutabili, $S(G)$ conterrà un elemento H minimale rispetto alla proprietà « esiste $B \triangleleft\triangleleft G$ tale che $HB \neq H \cup B$ ». Indicato con K il sottogruppo generato da tutti i sottogruppi subnormali propri di H, non può aversi $K = H$, altrimenti da $T \cup B = TB$ per ogni $T \triangleleft\triangleleft H (T \subset H)$ discenderebbe anche $B \cup H = BH$. Pertanto $K \subset H$ ed H/K è semplice. Se $[H:K] \neq p$ (p numero primo), H sarebbe perfetto ed a norma di un teorema [6]) di H. Wielandt [4] $H \cup B = HB$. Deve quindi essere $[H:K] = p$; poichè H non è normale in G, la serie normale discendente di H in G

$$H = H_n \triangleleft H_{n-1} \triangleleft \dots \triangleleft H_0 = G$$

ha lunghezza $n > 1$. Esiste allora $x \in H_{n-2} - H_{n-1}$ tale che $H^x = x_{-1} Hx \neq H$; essendo $H \triangleleft H_{n-1} \triangleleft H_{n-2}$, H e H^x sono entrambi normali in $H \cup H^x \subseteq H_{n-1}$, e, poichè G è un M-gruppo, $H \cap H^x$ è un sottogruppo proprio sia di H che di H^x. Segue

$$H \cup H^x / H \cap H^x = H / H \cap H^x \times H^x / H \cap H^x$$

ed, osservato che i gruppi $H / H \cap H^x$ ed $H^x / H \cap H^x$ contengono rispettivamente $K / H \cap H^x$ e $K^x / H \cap H^x$ come sottogruppi di indice p, si ha che $H \cup H^x / K \cup K^x$ è un gruppo di ordine p^2 non ciclico. Ma ciò è assurdo, onde l'asserto.

TEOREMA 5: *Sia G un $\mathfrak{M}$-gruppo. Sono equivalenti le proposizioni:*

a) ogni catena normale di G ha ciclici i fattoriali di ordine quadrato di un numero primo.

---

[6]) Precisamente: Siano G un M-gruppo, H e K sottogruppi subnormali di G; se H è perfetto, allora $J = H \cup K$ è uguale a MK con $M = \bigcap_{x \in J} H^x$.

b) $S(G)$ *è distributivo.*

DIM: $a) \Longrightarrow b)$.

Valendo la a), il lemma 5 assicura che $S(G)$ è modulare. Supposto per assurdo $S(G)$ non distributivo, la condizione di catena assicura l'esistenza di un sottoreticolo $\langle A, B, C \rangle$, in cui A, B, C coprono $A \cap B = B \cap C = A \cap C$ e sono coperti da $A \cup B = A \cup C = B \cup C$.

Allora

$$A \cup B/A \cap B = A/A \cap B \times B/A \cap B = A/A \cap B \times C/A \cap B = B/A \cap B \times C/A \cap B$$

è abeliano. Ma $A/A \cap B \simeq B/A \cap B \simeq C/A \cap B$ sono gruppi semplici, quindi $A \cup B/A \cap B$ è un gruppo di ordine p^2 non ciclico; una contraddizione che prova la validità della b).

$b) \Longrightarrow a)$ Evidente.

BIBLIOGRAFIA

[1] M. CURZIO-R. PERMUTTI - *Distributività nel reticolo dei sottogruppi normali di un T-gruppo,* Le Matematiche, Catania Vol. XX, fasc. 1 (1965) pp. 46-63.

[2] D. S. ROBINSON - *Groups in which normality is a transitive relation,* Pro. Camb. Phil. Soc., 60 (1964), pp. 21-38.

[3] D. S. ROBINSON - *Joins of subnormal subgroups,* Illinois Journal of Mat., Vol. 9 No. 1 (1965).

[4] J. E. ROSEBLADE - *On certain subnormal coalition,* Journal of Algebra, Vol I, No 2, pp. 132-138.

[5] G. ZACHER - *Sui gruppi finiti per cui il retticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo,* Rend. del Sem. Mat. Univ. Padova, 27 (1957) pp. 75-79.

[6] G. ZAPPA - *Sui gruppi finiti risolubili per cui il reticolo dei sottogruppi di composizione è distributivo,* Boll. Un. Mat. Ital., II (1956) pp. 150-157.

[7] H. ZASSENHAUS - *The theory of groups,* Chelsea Pub., New York (1949).

N. B. - A lavoro ultimato ho appreso dal dottor R. Schmidt che il lemma 1 è contenuto nella dissertazione di H. Heineken.

Manoscritto pervenuto in redazione il 24 giugno 1966.