RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

MARCO GRANDIS

Spazi con operatori e applicazioni al problema di Knaster

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 258-286

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__258_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SPAZI CON OPERATORI E APPLICAZIONI AL PROBLEMA DI KNASTER

di MARCO GRANDIS *)

Knaster [14] [1]) pose nel 1947 il seguente problema: *dati n punti distinti di* S_{m+n-2} (*sfera unitaria in* $\mathbb{R}^{m+n-1}$), *è vero che ogni applicazione continua di* S_{m+n-2} *in* $\mathbb{R}^m$ *è costante su almeno una n-upla di punti* (*di* S_{m+n-2}) *congruente alla data ?*

Il problema è stato risolto affermativamente in alcuni casi particolari (cfr. § 2). La via qui seguita per affrontarlo è quella di ricondursi a questioni di mappe equivarianti tra spazi con operatori e trattare poi queste con metodi omologici.

A tal fine si studiano (§ 1) la sequenza spettrale di uno spazio con operatori, le trasgressioni generalizzate nella sequenza stessa e le loro condizioni di esistenza; l'indagine è condotta su una rappresentazione della sequenza spettrale mediante un unico diagramma, ottenuto sovrapponendo parzialmente e opportunamente quelli di Zeeman [21].

Si considera poi (§ 3) il problema di Knaster, con la condizione supplementare che i punti assegnati sulla sfera siano equidistanti:

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R., riprendente in parte la tesi di laurea dell'A. (Genova, Novembre 1966).

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico dell'Università, Via L. B. Alberti, Genova.

[1]) I numeri in parentesi quadra rimandano alla bibliografia in fine; i testi sono spesso citati con i soli nomi degli autori. Per i riferimenti interni la PROPOSIZIONE 2 del § 1 è indicata come Prop. 2 nel corso del paragrafo stesso, come Prop. 1 2 in ogni altro.

si prova che una risposta negativa al problema porta all'esistenza di mappe equivarianti (Prop. 3.2), o equivarianti ed inessenziali (Prop. 3.3), di varietà di Stiefel in sfere su cui opera il gruppo ciclico di ordine n, senza punti fissi se n è primo.

Il problema sarà quindi risolto affermativamente per quei valori di m e n per cui si provi l'assurdità di tale risultato, ciò che per la Prop. 1.1 è sostanzialmente ricondotto all'esistenza di certe trasgressioni generalizzate nella sequenza spettrale della varietà di Stiefel corrispondente.

Ciò è stato sinora possibile (§ 4) per i casi particolari $n = 2, 3$; si ritrovano così per altra via i teoremi di Hopf [12] e Yang [20] che affermano la validità della congettura di Knaster sotto le condizioni: $n = 2$ e, rispettivamente, $n = 3$ *e punti assegnati equidistanti.*

Quanto alle possibilità future, la generalità dell'impostazione al § 3 mira a porre una base per ulteriori ricerche, vertenti sui casi sinora non risolti di $n = 5, 7...$ (n primo perché il gruppo operi senza punti fissi). Uno studio più approfondito della sequenza spettrale potrebbe forse portare a risultati anche per interi n non primi.

Convenzioni. $\mathfrak{S}_n$ indica il gruppo delle permutazioni di n oggetti, $\mathbf{T}_n$ il sottogruppo ciclico di ordine n generato dalla permutazione circolare $[1, 2 ... n]$; $\mathbf{S}_n$ è la sfera unitaria in $\mathbb{R}^{n+1}$. Se X è uno spazio topologico e G un gruppo abeliano, $C(X; G)$ indica il complesso delle catene singolari di X a coefficienti in G, $H(X; G)$ l'omologia singolare; per coefficienti interi scriveremo $C(X)$ e $H(X)$.

§ 1. — Sequenza spettrale di uno spazio con operatori.

1. Rappresentazione diagrammatica di una sequenza spettrale [2])

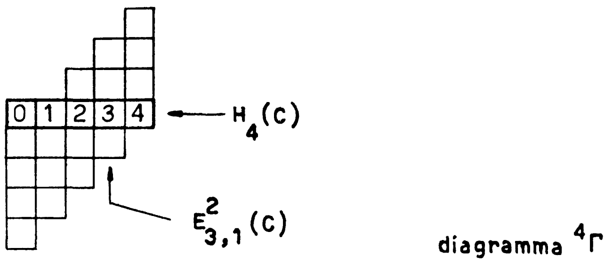
Viene qui esposta uua rappresentazione diagrammatica del tipo Zeeman, utile per quanto segue.

---

[2]) Questo numero ha carattere informativo e non dimostrativo. La rappresentazione esposta mi è stata suggerita dal Prof. G. Darbo.

Sia A un anello, $B_{p,q} \underset{p}{\Longrightarrow} D_n$ la sequenza spettrale di un A-complesso filtrato C, con filtrazione positiva limitata dal grado. Essa viene rappresentata da Zeeman [21] mediante una successione di diagrammi $({}^n\Gamma)_{n \in \mathbf{N}}$. Ad esempio ${}^4\Gamma$:

(1)



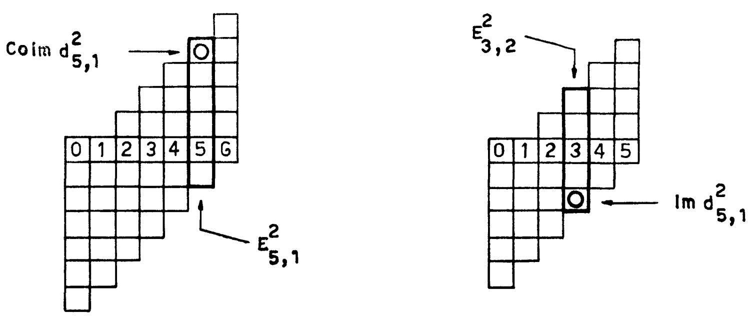
dove la striscia rappresentante il limite reca scritti i gradi filtranti. In effetti ${}^n\Gamma$ è la *zona invariante* ([21], § 5) del diagramma completo ${}^n\Delta$, che non è lecito considerare quando, come generalmente avviene, C, è definito a meno di equivalenze omotopiche tra complessi.

Consideriamo ora uno degli omomorfismi:

$$d^r_{p,q} : E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,\,q+r-1} \qquad (r \geq 2)$$

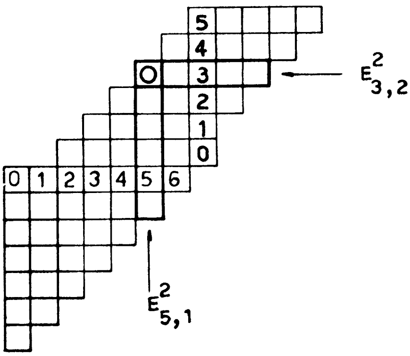
ad esempio $d^2_{5,1} : E^2_{5,1} \longrightarrow E^2_{3,2}$; i diagrammi (2)

(2)

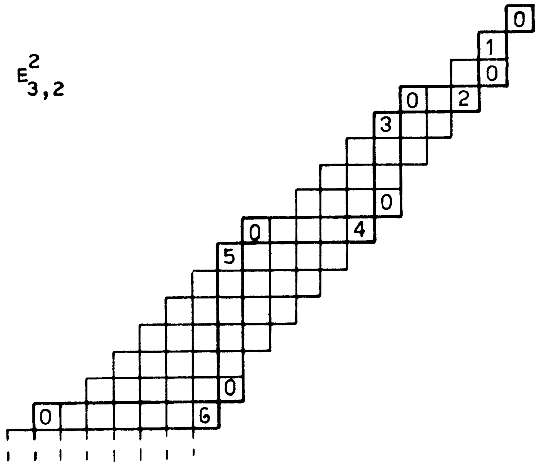


${}^6\Gamma$ ${}^5\Gamma$

mostrano i termini $E^2_{5,1}$, $E^2_{3,2}$ e, contrassegnati da un circolo, *Coim* $d^2_{5,1}$ e $Im^2_{5,1}$: questi ultimi sono canonicamente isomorfi, con isomorfismo indotto dal differenziale. Ribaltando ${}^5\Gamma$ e sovrapponendolo a ${}^6\Gamma$ come in (3′):



(3′)



(3″)

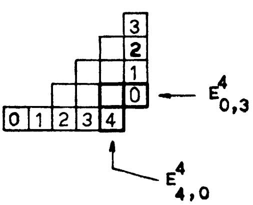
Coim $d^2_{5,1}$ e *Im* $d^2_{5,1}$ vengono identificati, e così pure tutte le coppie *Coim* $d^r_{p,q}$, *Im* $d^r_{p,q}$ con $r \geq 2$ e $p + q = 6$. Ripetendo ciò per $p + q = n$ generico si ottiene infine la rappresentazione della sequenza spettrale mediante l'unico diagramma (3″).

Una delle possibilità di tale diagramma è la visualizzazione delle trasgressioni e sospensioni generalizzate, che ora introdurremo, e delle loro condizioni di esistenza.

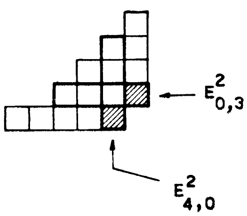
Si dicono comunemente *trasgressioni* (Hu, p. 256) i differenziali:

$$d^p_{p,0} : \quad E^p_{p,0} \longrightarrow E^p_{0,p-1} \,.$$

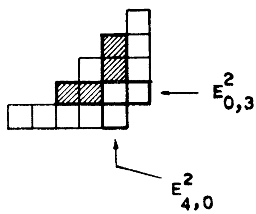
ad es. nel diagramma (4′) è posto in rilievo $d^4_{4,0} : E^4_{4,0} \longrightarrow E^4_{0,3}$



(4′)



(4″)



(4‴)

Se $d^p_{p,0}$ è un isomorfismo il diagramma (4″) (in cui le zone rappresentanti *Ker* $d^4_{4,0}$ e *Coker* $d^4_{4,0}$ sono tratteggiate, ciò che significa annullamento) mostra che esiste un omomorfismo $E^2_{0,p-1} \to E^2_{p,0}$ dato dalla composizione:

$$E^2_{0,p-1} \xrightarrow{\text{proiez.}} E^p_{0,p-1} \xrightarrow{\left(d^p_{p,0}\right)^{-1}} E^p_{p,0} \xrightarrow{\text{incl.}} E^2_{p,0} .$$

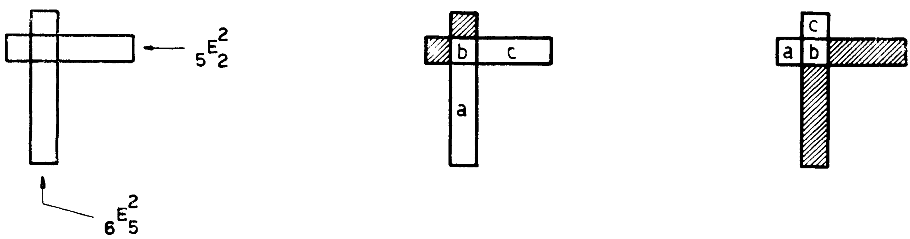
Gli omomorfismi di questo tipo sono detti ***sospensioni*** (Hu, p. 256).

Osserviamo infine che nella situazione esemplificata in (4‴) la trasgressione $d^p_{p,0}$ può essere pensata come omomorfismo di $E^2_{p,0}$ in $E^2_{0,p-1}$ ciò che è importante perché solo i termini $B_{p,q} = E^2_{p,q}$ sono direttamente noti.

Per generalizzare tali concetti (*limitandoci però sempre ad omomorfismi tra gli* $E^2_{p,q}$) consideriamo un «incrocio» del diagramma (3″), cioè una coppia:

$$({}_{n+1}E^2_p\,,\ {}_nE^2_{p'}) \qquad p - p' \geq 2$$

come ad es. in (5):



(5) (5′) (5″)

Due situazioni hanno interesse, e cioè l'esistenza di un *omomorfismo canonico* ${}_{n+1}E^2_p \to {}_nE^2_{p'}$ indotto dal differenziale, oppure di un *omomorfismo canonico* ${}_nE^2_{p'} \to {}_{n+1}E^2_p$ indotto dalla relazione additiva reciproca del grafico del differenziale stesso (Mac Lane, p. 51); situazioni che sono esemplificate in (5′) e (5″) rispettivamente. Nel primo caso parleremo di *omomorfismo trasgressivo,* o *trasgressione;* nel secondo di *omomorfismo sospensivo,* o *sospensione.* Se tali omomorfismi esistono entrambi sono isomorfismi reciproci, e viceversa se uno di essi esiste ed è isomorfismo, esiste anche l'altro ed è il suo reciproco.

È utile per quanto segue notare esplicitamente che in (5′) e in (5″) la zona rappresentativa del nucleo dell'omomorfismo detto è a, quella dell'immagine e coimmagine è b, quella del conucleo è c.

Infine, ovviamente, trasgressioni e sospensioni sono naturali per omomorfismi di complessi filtrati con filtrazione positiva limitata dal grado (purché esistano per entrambi i complessi).

2. T-spazi trasgressivi e sospensivi.

In questo numero G indica un gruppo abeliano, T un gruppo in notazione moltiplicativa.

Diremo *T-spazio* uno spazio topologico su cui operi il gruppo T; T opera *propriamente* su X (o, equivalentemente: X è un T-spazio *proprio*) se ogni punto $x \in X$ ha un intorno U tale che $tU \cap U = \Phi$, per ogni operatore t di T diverso dall'identità. Se T opera sugli spazi topologici X e Y, una *mappa di T-spazi* $f \colon X \to Y$ è un'applicazione continua equivariante rispetto a T.

Sia X un T-spazio proprio connesso per archi; c'è allora una sequenza spettrale di gruppi:

$$H_p(T, H_q(X; G)) \underset{p}{\Longrightarrow} H_n(X/T; G)$$

detta *sequenza spettrale del T-spazio X a coefficienti in G* (Cartan-Eilenberg, p. 355; Mac Lane, p. 342); essa proviene da un complesso filtrato con filtrazione positiva limitata dal grado, definito a meno di omotopia, ed è quindi suscettibile di rappresentazione diagrammatica alla Zeeman.

DEFINIZIONE 1. *Diremo che un T-spazio proprio X è (n, p)-trasgressivo rispetto a G, con $0 \leq p < n$, se nella sequenza spettrale di X a coefficienti in G esiste la trasgressione:*

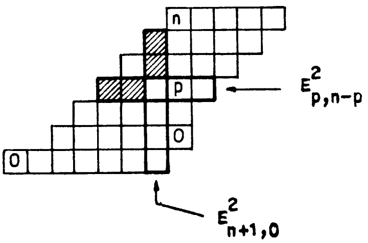
$$\tau_{n,p} \colon \quad E^2_{n+1,0} \longrightarrow E^2_{p,n-p} .$$

Che è (n, p)-sospensivo rispetto a G $(0 \leq p < n)$ se esiste la sospensione:

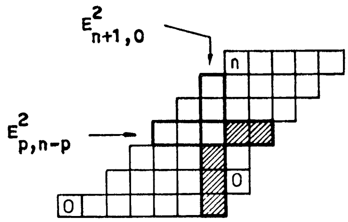
$$\sigma_{n,p} \colon \quad E^2_{p,n-p} \longrightarrow E^2_{n+1,0} .$$

Si scriverà $\tau_{n,p}(X;\ G)$, $\sigma_{n,p}(X;\ G)$ quando vi sia possibilità di equivoco. La locuzione « *esiste* $\tau_{n,p}(X;\ G)$ » sarà anche usata in luogo di « X *è* (n,p)-*trasgressivo rispetto a* G », e analogamente si farà per spazi sospensivi.

Nei due casi considerati la sequenza spettrale di X a coefficienti in G si presenta così [3]:



(6′)



(6″)

Per quanto detto nel numero 1, se X è un T-spazio proprio (n,p)-trasgressivo e sospensivo $\tau_{n,p}$ e $\sigma_{n,p}$ sono isomorfismi reciproci; viceversa se uno tra essi esiste ed è isomorfismo, esiste anche l'altro ed è il suo reciproco. Inoltre $\tau_{n,p}$ (risp. $\sigma_{n,p}$) è naturale per mappe di T-spazi propri (n,p)-trasgressivi (risp. sospensivi); ciò ha applicazione immediata nella seguente

Proposizione 1. *Sia* $f\colon X \longrightarrow Y$ *una mappa di T-spazi propri connessi per archi:*

(i) *se* X *e* Y *sono* (n,p)-*sospensivi rispetto a* G *e* $\sigma_{n,p}(X;\ G) \neq 0$, *anche* $\sigma_{n,p}(Y;\ G)$ *e* $f_*\colon H_{n-p}(X;\ G) \longrightarrow H_{n-p}(Y;\ G)$ *sono non nulli.*

(ii) *se* X *e* Y *sono* (n,p)-*trasgressivi rispetto a* G *e* $\tau_{n,p}(Y;\ G) \neq 0$ *anche* $\tau_{n,p}(X;\ G)$ *e* $f_*\colon H_{n-p}(X;\ G) \longrightarrow H_{n-p}(Y;\ G)$ *sono non nulli.*

(iii) *se* $H_{n+1}(T,\ G) \neq 0$ *e* X (*risp.* Y) *è* (n,p)-*sospensivo e trasgressivo, mentre* Y (*risp.* X) *è* (n,p)-*sospensivo* (*risp. trasgressivo*) *rispetto a* G, *allora* $f_*\colon H_{n-p}(X;\ G) \longrightarrow H_{n-p}(Y;\ G)$ *è non nullo.*

---

[3]) Come già detto nel n. 1, le zone tratteggiate rappresentano subquozienti nulli. I diagrammi (6′) e (6″) sono tracciati per il caso particolare $n = 5$, $p = 2$; d'ora in avanti tali precisioni saranno omesse.

In tutti e tre i casi, in particolare, $H_{n-p}(X;\ G)$ *e* $H_{n-p}(Y;\ G)$ *sono non nulli.*

DIM. Per (i) e (ii) basta considerare i diagrammi commutativi:

$$
\begin{array}{ccc}
H_p(T, H_{n-p}(X;\ G)) & \xrightarrow{\sigma_{n,p}} & H_{n+1}(T, H_0(X;\ G)) \\
\Big\downarrow H_p(T, f_{*n-p}) & & \Big\downarrow H_{n+1}(T, f_{*0}) \\
H_p(T, H_{n-p}(Y;\ G)) & \xrightarrow{\sigma_{n,p}} & H_{n+1}(T, H_0(Y;\ G))
\end{array}
\tag{7'}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
H_{n+1}(T, H_0(X;\ G)) & \xrightarrow{\tau_{n,p}} & H_p(T, H_{n-p}(X;\ G)) \\
\Big\downarrow H_{n+1}(T, f_{*0}) & & \Big\downarrow H_p(T, f_{*n-p}) \\
H_{n+1}(T, H_0(Y;\ G)) & \xrightarrow{\tau_{n,p}} & H_p(T, H_{n-p}(Y;\ G))
\end{array}
\tag{7''}
$$

dovuti nei rispettivi casi all'esistenza e naturalezza delle sospensioni o delle trasgressioni. Essendo X e Y connessi per archi f_{*0}, e quindi anche $H_{n+1}(T, f_{*0})$, è isomorfismo; gli asserti sono allora ovvi.

Dimostriamo ora il punto (iii). Se X è (n, p)-trasgressivo e sospensivo rispetto a G, $\sigma_{n,p}(X;\ G) \neq 0$ come isomorfismo su $H_{n+1}(T, H_0(X;\ G)) = H_{n+1}(T,\ G)$, non nullo per ipotesi. La tesi è quindi vera per (i). Analogamente si dimostra l'affermazione in parentesi. c.v.d.

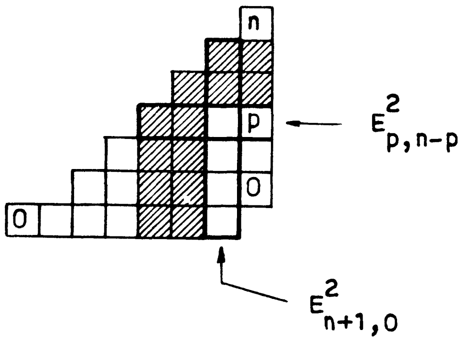
Nel resto di questo numero si danno condizioni sufficienti perché un T-spazio proprio abbia trasgressioni, e queste siano non nulle. La definizione di T-spazio sospensivo è stata data per simmetria rispetto a quella di trasgressivo, ma non pare utile come quest'ultima; le uniche sospensioni che si riscontrano nelle proposizioni seguenti sono dovute a trasgressioni che risultano, in casi particolari, isomorfismi.

LEMMA 1. *Se X è un T-spazio proprio (n, p)- e (n, p')-trasgressivo relativamente a G, e $p < p'$,* $\tau_{n,p} = 0$.

Condizione sufficiente perché un T-spazio proprio X sia (n, p)-trasgressivo è: $H_r(T, H_s(X; G)) = 0$ *per* $0 < s < n - p$, $r + s = n$ *o* $r + s = n + 1$.

DIM. La prima affermazione segue dal diagramma (6′): l'esistenza di $\tau_{n,p'}$ mostra che $Im\, \tau_{n,p} = 0$. La seconda segue dal diagramma (8):

(8)



in cui sono riportate le condizioni di annullamento date per ipotesi, chiaramente più forti di quelle richieste in (6′). c.v.d.

PROPOSIZIONE 2. *Sia X un T-spazio proprio connesso per archi, con*

$$H_q(X; G) = 0 \qquad per \qquad 0 < q < m.$$

Allora X è (n, p)-trasgressivo rispetto a G per $0,\ n - m \leq p < n$, *e*

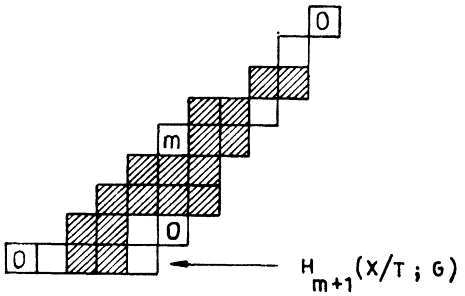
$$H_q(X/T; G) = H_q(T, G) \qquad per \qquad 0 \leq q < m.$$

Se inoltre $H_{m+1}(X/T; G) = 0$ *e* $H_{m+1}(T, G) \neq 0$, $\tau_{m,0} \neq 0$; *se infine è ancora noto che* $H_m(X; G)$ *è un gruppo ciclico di ordine primo, allora* $\tau_{m,0}$ *è isomorfismo e* $H_m(X/T; G) = H_m(T, G)$.

DIM. Per ipotesi $H_r(T, H_s(X; G)) = 0$ per $0 < s < m$ e per ogni r; quindi, qualunque sia $p \geq n - m$: $H_r(T, H_s(X; G)) = 0$ per $0 < s < n - p$, e per il Lemma 1 X è (n, p)-trasgressivo per $0,\ n - m \leq p < n$.

Per quanto rimane consideriamo il diagramma (9):

(9)



Se $0 \leq q < m$, $H_q(X/T\,;\,G) = E^2_{q,0} = H_q(T, H_0(X\,;\,G)) =$ $= H_q(T, G)$.

Supponiamo ora $H_{m+1}(X/T\,;\,G) = 0$ e $H_{m+1}(T, G) \neq 0$, e consideriamo $\tau_{m,0} : E^2_{m+1,0} \rightarrow E^2_{0,m}$; *Ker* $\tau_{m,0}$ è un quoziente di $H_{m+1}(X/T\,;\,G)$, quindi è nullo per ipotesi; inoltre $E^2_{m+1,0} =$ $= H_{m+1}(T, H_0(X\,;\,G)) = H_{m+1}(T, G) \neq 0$: $\tau_{m,0}$ è quindi un monomorfismo non nullo.

Se inoltre $H_m(X\,;\,G)$ è ciclico di ordine primo, anche:

$$E^2_{0,m} = H_0(T, H_m(X\,;\,G)) = H_m(X\,;\,G)$$

è tale, onde il monomorfismo non nullo $\tau_{m,0}$ è un isomorfismo; di conseguenza *Coker* $\tau_{m,0} = 0$, e per (9):

$$H_m(X/T\,;\,G) = E^2_{m,0} = H_m(T, G).$$

c.v.d.

DEFINIZIONE 2. *Diremo varietà m-sferica* ($m > 0$) *rispetto a G ogni varietà topologica compatta connessa di dimensione m, che sia una m-sfera omologica rispetto a G* (*cioè:* $H_q(X\,;\,G) = H_q(\mathbf{S}_m\,;\,G)$ *per ogni intero q*).

Si noti che $\mathbf{P}_2 \times \mathbf{S}_1$, $\mathbf{P}_2$ essendo il piano proietttivo reale, è una varietà topologica compatta connessa di dimensione 3, e una 1-sfera omologica a coefficienti razionali. La compattezza è invece, insieme all'orientabilità, conseguenza delle altre condizioni (come si potrebbe vedere facilmente mediante il teorema di dualità di Poincaré). Infine, per il teorema dei coefficienti universali, una varietà m-sferica rispetto a $\mathbb{Z}$ è anche tale rispetto ad un qualunque gruppo abeliano.

Con la definizione data si hanno i seguenti corollari della Prop. 2 :

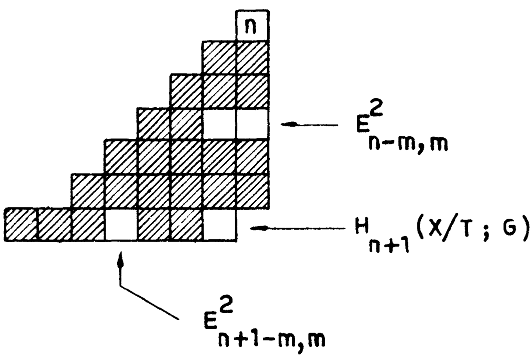
COROLLARIO 1. *Se T opera propriamente su X, varietà m-sferica rispetto a G, X è (n, p)-trasgressivo relativamente a G per : $0, n - m \leq \leq p < n$, e si ha:*

$$H_q(X/T\,;\,G) = \begin{cases} H_q(T, G) & \text{per } 0 \leq q < m \\ 0 & \text{per } q > m. \end{cases}$$

Inoltre se $n \geq m$ e $H_{n+1}(T, G) \neq 0$, $\tau_{n,\,n-m} \neq 0$; è anche un isomorfismo nei casi $n > m$.

DIM. X/T è ancora una varietà topologica di dimensione m (essendo localmente omeomorfa a X), compatta e connessa, quindi $H_q(X/T\,;\,G) = 0$ per $q > m$; la Prop. 2 prova allora l'enunciato, escluso l'ultimo punto. La sequenza spettrale della varietà m-sferica X, a coefficienti in G, è parzialmente rappresentata in (10), dove $n \geq m$:

(10)



Sia $n \geq m$: per il diagramma (10) $Ker\ \tau_{n,\,n-m}$ è quoziente di $H_{n+1}(X/T; G)$; supposto questo uguale a zero, $\tau_{n,\,n-m} : E^2_{n+1,\,0} \to E^2_{n-m,\,m}$ è un monomorfismo, non nullo se $E^2_{n+1,\,0} = H_{n+1}(T, G)$ non lo è ; se ciò avviene per un $n > m$, $\tau_{n,\,n-m}$ è anche isomorfismo perché *Coker* $\tau_{n,\,n-m}$ è sottogruppo di $H_n(X/T;\,G)$, nullo per $n > m$ come detto. c.v.d.

COROLLARIO 2. *Se* $\mathbf{T}_k$, *k primo, opera propriamente su X, varietà m-sferica rispetto a* $\mathbb{Z}_k$:

$$H_q(X/\mathbf{T}_k\,;\,\mathbb{Z}_k) = \begin{cases} \mathbb{Z}_k & per\ 0 \leq q \leq m \\ 0 & per\ q > m. \end{cases}$$

Inoltre $\tau_{n,\,n-m}(X;\,\mathbb{Z}_k)$ *esiste ed è isomorfismo non nullo per* $n \geq m$.

DIM. Poiché $H_{n+1}(X/\mathbf{T}_k\,;\,\mathbb{Z}_k) = 0$ (Cor. 1), $H_{m+1}(\mathbf{T}_k,\,\mathbb{Z}_k) \neq 0$ [4]) e $H_m(X\,;\,\mathbb{Z}_k) = \mathbb{Z}_k$ è un gruppo ciclico di ordine primo, l'ultimo punto della Prop. 2 dice $\tau_{m,\,0}$ è isomorfismo e $H_m(X/\mathbf{T}_k\,;\,\mathbb{Z}_k) = H_m(\mathbf{T}_k\,,\,\mathbb{Z}_k) = \mathbb{Z}_k$. Aggiungendo i risultati del Cor. 1 si ha la tesi. c.v.d.

COROLLARIO 3. *Se* $\mathbf{T}_k$, *k primo, opera propriamente su X, varietà m-sferica rispetto a* $\mathbb{Z}$:

$$H_q(X/T_k\,;\,\mathbb{Z}) = \begin{cases} \mathbb{Z}_k & per\ q\ dispari\ e\ 0 < q < m \\ 0 & per\ (q\ pari\ e\ 0 < q < m)\ o\ per\ q > m \end{cases}$$

mentre $H_m(X/\mathbf{T}_k\,;\,\mathbb{Z})$ *è* 0 *o* $\mathbb{Z}$ *a seconda che m sia pari o dispari* [5]).

Inoltre $\tau_{n,\,n-m}(X\,;\,\mathbb{Z})$ *esiste ed è non nullo per n pari* $\geq m$; *è anche isomorfismo per n pari* $> m$.

---

[4]) Si ricorda che l'omologia del gruppo ciclico $\mathbf{T}_n$ a coefficienti in G è (cfr. Hilton-Wylie p. 465):

$H_0(\mathbf{T}_n\,,\,G) = G$

$H_q(\mathbf{T}_n\,,\,G) = G_q = Coker\ (G \xrightarrow{q} G)$ *per q dispari* ≥ 1.

$H_q(\mathbf{T}_n\,,\,G) = {}_qG = Ker\ (G \xrightarrow{q} G)$ *per q pari* ≥ 2

[5]) Il corollario fornisce in particolare l'omologia degli spazi reticolati (Hilton-Wylie, p. 223 : *lens spaces*).

Dim. Tenendo presente [4]) che $H_q(\mathbf{T}_k, \mathbf{Z})$ è 0 per q pari ≥ 2, e $\mathbf{Z}_k$ per q dispari positivo, il Cor. 1 prova l'asserto, eccettuato quanto concerne $H_m(X/\mathbf{T}_k; \mathbf{Z})$.

Posto $H_q = H_q(X/\mathbf{T}_k; \mathbf{Z})$, per il teorema dei cofficienti universali si ha:

$$H_m(X/\mathbf{T}_k; \mathbf{Z}_k) = (H_m \otimes \mathbf{Z}_k) \oplus (H_{m-1} * \mathbf{Z}_k). \tag{11}$$

Ora: X è anche una varietà m-sferica relativamente a $\mathbf{Z}_k$, quindi per il Cor. 2: $H_m(X/\mathbf{T}_k; \mathbf{Z}_k) = \mathbf{Z}_k$; inoltre si è già visto che H_{m-1} è 0 per m dispari, $\mathbf{Z}_k$ per m pari (essendo $m > 0$, per Def. 2); infine H_m può essere solo 0 o $\mathbf{Z}$, perché $X/\mathbf{T}_k$ è una varietà topologica compatta connessa di dimensione m; la relazione (11) determina allora H_m come detto nell'enunciato. c.v.d.

Proposizione 3. *Siano X e Y varietà m- e m'-sferiche rispetto a G, ed esista un intero $q > m, m'$ tale che $H_q(T, G) \neq 0$. Se T opera propriamente su X e Y ed esiste una mappa equivariante $f: X \to Y$, allora $m \leq m'$ e se $m = m'$ $f_{*m}: H_m(X; G) \to H_m(Y; G)$ è non nullo.*

Dim. Supponiamo $m > m'$; per il Cor. 1 Prop. 2 gli spazi X e Y sono $(n, n-m')$-trasgressivi per ogni $n \geq m$, e fissato un $n \geq m$ tale che $H_{n+1}(T, G) \neq 0$ si ha $\tau_{n,n-m'}(Y; G) \neq 0$. Allora $H_{m'}(X; G) \neq 0$ per la Prop. 1 (ii), e ciò è in constrasto con l'ipotesi $m > m'$ (anche perché $m' > 0$).

Sia ora $m = m'$: X e Y sono allora $(n, n-m)$-trasgressivi per ogni $n \geq m$, e fissato $n \geq m$ per cui $H_{n+1}(T, G) \neq 0$ la trasgressione $\tau_{n,n-m}(Y; G)$ è non nulla; quindi $f_{*m} \neq 0$ (Prop. 1 (ii)). c.v.d.

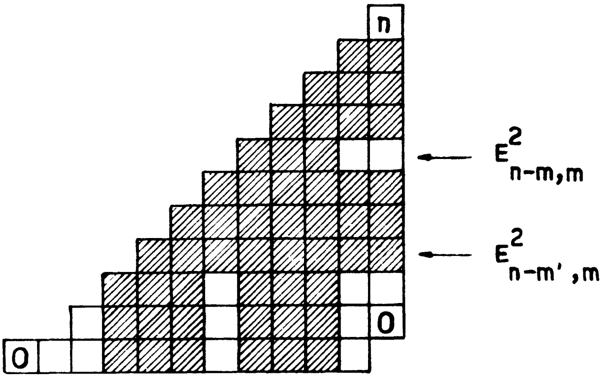
Proposizione 4. *Sia X un T-spazio proprio connesso per archi: se*

$$H_q(X, G) = 0 \quad per \quad 0 < q < m \quad o \quad m < q \leq m'$$

e per un intero $n \geq m$ la trasgressione $\tau_{n,n-m}$ (esistente per Prop. 2) è nulla, allora X è (n, p)-trasgressivo per n e p tali che: $0, n - m' \leq$ $\leq p < n$, e tali trasgressioni sono tutte nulle.

DIM. Le ipotesi su $H_q(X, G)$ forniscono un diagramma:

(12)



dove $Im\ \tau_{n,n-m} = 0$ implica chiaramente la tesi. c.v.d.

§ 2. — I PROBLEMI DI KNASTER E DI YANG.

1. Risultati noti.

Sono state trovate varie risposte particolari alla domanda:

(1) Se $y_1, \dots, y_n$ sono punti distinti di S_k è vero che ogni applicazione continua di S_k in $\mathbb{R}^m$ è costante su almeno una n-upla di punti di S_k congruente alla data?

I risultati sono spesso noti come *frame theorems*, e si possono inquadrare sotto le due domande più particolari seguenti (ottenibili ponendo nella (1) rispettivamente $k = m + n - 2$, oppure $n = 2\nu$, $k = m\nu$ e $y_1, \dots, y_{2\nu}$ a due a due diametralmente opposti).

PROBLEMA I. (Proposto da Knaster [14]). *Siano $y_1, \dots, y_n$ punti distinti di S_{m+n-2}; è vero che per ogni applicazione continua di S_{m+n-2} in $\mathbb{R}^m$ esiste una n-upla di punti della sfera congruente alla data sui quali l'applicazione assume lo stesso valore?*

Il problema è stato risolto affermativamente nei seguenti casi particolari:

Borsuk [6], 1933	$n = 2$; y_1 e y_2 antipodali.
Kakutani [13], 1942	$n = 3$; y_1, y_2, y_3, ortogonali ; $m = 1$.
Hopf [12], 1944	$n = 2$.
Yamabe-Yujobô [16], 1950	$m = 1$; $y_1, \dots, y_n$ ortogonali.
Floyd [11], 1955	$n = 3$; $m = 1$.
Yang [20], 1957	$n = 3$; y_1, y_2, y_3 equidistanti.

Problema II. (Proposto da Yang [19]). *Siano $d_1, \dots, d_\nu$ diametri distinti di $S_{m\nu}$; è vero che per ogni applicazione continua di $S_{m\nu}$ in $\mathbb{R}^m$ esistono ν diametri della sfera congruenti ai dati sui cui punti terminali l'applicazione sia costante?*

Risultati noti (in senso affermativo):

Borsuk [6], 1933	$\nu = 1$.
Dyson [10], 1951	$\nu = 2$; $m = 1$; d_1 e d_2 ortogonali.
Livesay [15], 1954	$\nu = 2$; $m = 1$.
Yang [17], 1954	$m = 1$; $d_1, \dots, d_\nu$ ortogonali.
Bourgin [7], 1955	$m = 1$; $d_1, \dots, d_\nu$ ortogonali.
Yang [18], 1955	$\nu = 2$.
Yang [19], 1955	$d_1, \dots, d_\nu$ ortogonali.

I teoremi detti sono spesso enunciati in ipotesi più larghe (le sfere sono sostituite da varietà con condizioni di regolarità, o da sottospazi di spazi cartesiani separanti 0 da ∞, etc.). Inoltre Bourgin ha provato in [9] e in altri lavori alcuni risultati sulla molteplicità delle soluzioni. Qui, come detto, ci si limita al problema di Knaster.

2. Considerazioni generali sul problema di Knaster.

Le considerazioni che seguono danno una motivazione della assunzione $k = m + n - 2$ nel problema di Knaster.

Proposizione 1. *Siano $n > 1$, $k \geq 1$, $m \geq 1$ e $y_1, \dots, y_n$ punti distinti di S_k; se la domanda* (1) *ha per tali dati risposta affermativa,* *allora* $m \leq k - r + 1$, *dove* r *è la dimensione affine del sottoinsieme di* $\mathbb{R}^{k+1}$ *costituito dai punti* $y_1, \dots, y_n$. *In particolare se* $y_1, \dots, y_n$ *sono affinemente indipendenti in* $\mathbb{R}^{k+1}: m \leq k - n + 2$.

DIM. Anzitutto $m \leq k$, perché per $m > k$ l'immersione di S_k in $\mathbb{R}^m$ non è costante su alcuna n-upla di punti di S_k $(n > 1)$; è allora lecito considerare la proiezione $p: \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^m$ che ad ogni punto associa le sue prime m coordinate, e la sua restrizione p' ad S_k. I luoghi $p =$ *costante* sono $(k - m + 1)$-piani di $\mathbb{R}^{k+1}$, e dovendo p' essere costante su una n-upla di punti di S_k congruente alla $(y_1, \dots, y_n)$, i punti di questa sono contenuti in un $(k - m + 1)$-piano, in altre parole $r \leq k - m + 1$, come affermato. Se infine $y_1, \dots, y_n$ sono affinemente indipendenti, $r = n - 1$ e la tesi è provata. c.v.d.

Quindi se $y_1, \dots, y_n$ sono affinemente indipendenti il problema di Knaster è una traduzione adeguata della domanda (1): questa non ammette risposta affermativa per $m > k - n + 2$, come provato; e del resto se la ammette per $m = k - n + 2$, l'ammette anche ovviamente per ogni dimensione m' dello spazio cartesiano intervenente tale che $1 \leq m' \leq m$.

Se invece i punti $y_1, \dots, y_n$ sono affinemente dipendenti si può trovare confermata la (1) in casi non rientranti nel Problema I: ne sono esempi tutti i risultati citati sotto il Problema II, per cui $\nu > 1$ e $m = 1$ (se $n = 2\nu$ e $k = m\nu$, la relazione $m > k - n + 2$ equivale alla $(\nu - 1)(m - 2) < 0$). Per contro tutti i risultati inquadrati sotto il Problema I concernono n-uple di punti $y_1, \dots, y_n$ affinemente indipendenti.

§ 3. — IMPOSTAZIONE GEOMETRICA NEL CASO DELL'EQUIDISTANZA

In questo paragrafo $\times$ e d indicano rispettivamente il prodotto scalare usuale e la distanza euclidea negli spazi numerici $\mathbb{R}^m$; se $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ è una famiglia finita di punti di $\mathbb{R}^m$, il loro baricentro è scritto $c(x_1, \dots, x_n)$.

1. Gli spazi $X(k, n, \lambda)$.

Siano $y_1, \dots, y_n$ punti distinti ed equidistanti di $\mathbf{S}_k$ $(n > 1, k \geq 1)$: essi sono quindi affinemente indipendenti in $\mathbb{R}^{k+1}$ e $n \leq k+2$. Detta:

$$\lambda = d(y_i, y_j) \qquad (i \neq j)$$

la distanza comune, anche:

$$\alpha = y_i \times y_j = 1 - \lambda^2/2 \qquad (i \neq j) \tag{1}$$

non dipende da i e j, purché diversi; inoltre, posto $c = c(y_1, \dots, y_n) = = \frac{1}{n} \Sigma y_i$, si ha;

$$c \times y_i = c \times c = (1 + (n-1)\alpha)/n. \tag{2}$$

Poichè $c \times c = \|c\|^2 \epsilon [0, 1[$, α può variare nell'intervallo $[-1/(n-1), 1[$ e $\alpha = -1/(n-1)$ se e solo se $c(y_1, \dots, y_n) = 0$; $\alpha = 0$ corrisponde al caso ortogonale.

Ritornando alla distanza λ a mezzo della (1), si ha che questa può variare in un intervallo:

$$]0, \lambda_n] \qquad \lambda_n = \sqrt{2n/(n-1)}$$

e $\lambda = \lambda_n$ equivale a $c(y_1, \dots, y_n) = 0$; i punti $y_1 \dots, y_n$ sono ortogonali se e solo se $\lambda = \sqrt{2}$; infine $\lambda_n > \lambda_{n+1}$ per ogni n.

Il sottospazio di $(\mathbf{S}_k)^n$ costituito dalle n-uple congrue a $y_1, \dots, y_n$ è individuato da $n, k, \lambda = d(y_i, y_j)$ per $i \neq j$: lo indicheremo con $X(k, n, \lambda)$; tale spazio è quindi definito per $1 < n \leq k+2$ e $0 < \lambda \leq \lambda_n$.

Su $X(k, n, \lambda)$ opera propriamente il gruppo $\mathfrak{S}_n$ delle permutazioni di n oggettti, e quindi il gruppo ciclico $\mathbf{T}_n$; in particolare $\mathfrak{S}_n$ opera sulla varietà di Stiefel $\mathbf{V}_{r,n} = X(r-1, n, \sqrt{2})$ costituita dalle n-uple ortonormali di punti di $\mathbb{R}^r$.

Consideriamo ora il problema di Knaster (§ 2) per n-uple $y_1, \dots, y_n$ di punti equidistanti di $\mathbf{S}_k$; per quanto detto esso equivale a chiedere se, per $m \geq 1$, $n > 1$, $0 < \lambda \leq \lambda_n$, è vera la proposizione:

(K) *Ogni applicazione continua di* $\mathbf{S}_{m+n-2}$ *in* $\mathbb{R}^m$ *assume lo stesso valore su almeno* n *punti* $x_1, \dots, x_n$ *della sfera tali che*:

$$(x_1, \dots, x_n) \in X(m+n-2, n, \lambda).$$

Questa proposizione verrà citata come $K(m, n, \lambda)$ quando necessario.

Il seguito di questo numero prova che il negare la proposizione (K) porta all'esistenza di mappe equivarianti (Prop. 2) o equivarianti ed inessenziali (Prop. 3) di varietà di Stiefel in sfere con operatori. Il problema di Knaster *nel caso equidistante* sarà allora risolto in quei casi (cioè per quei valori di m, n e λ) per cui si riesca a dimostrare l'assurdità di tale risultato; di ciò al paragrafo seguente.

PROPOSIZIONE 1. *Sia* $1 < n \leq k-2$:

(i) *Se* $0 < \lambda < \lambda_n$, $X(k, n, \lambda)$ *è* $\mathfrak{S}_n$*-omeomorfo a* $\mathbf{V}_{k+1,\,n}$.

(ii) $X(k, n, \lambda_n)$ *è omeomorfo a* $\mathbf{V}_{k+1,\,n-1}$.

DIM. (i). Costruiamo un omeomorfismo equivariante

$$\varphi : X(k, n, \lambda) \longrightarrow \mathbf{V}_{k+1,\,n}$$

nell'ipotesi $\lambda < \lambda_n$, cioè $c(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ per tutte le n-uple di $X(k, n, \lambda)$; intuitivamente: si tratta di dilatare in senso angolare una n-upla sino a ridurla ortogonale.

Poniamo:

$$\alpha = (1 - \lambda^2/2) \in \left]-1/(n-1), 1\right[$$

$$\beta = (1 + (n-1)\alpha)/n.$$

Poichè $\beta > \alpha$, $\beta > 0$, l'equazione in t:

$$(\beta - \alpha)t^2 + 2(\beta - \alpha)t - \alpha = 0 \tag{3}$$

ammette sempre due soluzioni reali di modulo diverso; infatti è risolubile perché $\beta - \alpha \neq 0$ e il descriminante è $\Delta = 4(\beta - \alpha)\beta > 0$, e le soluzioni hanno diverso valore assoluto perché sia Δ che il secondo coefficiente della (3) sono strettamente positivi.

Sia t la soluzione della (3) di modulo minore; poniamo, per ogni $(x_1, \ldots, x_n) \in X(k, n, \lambda)$:

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = (x'_1, \ldots, x'_n), \qquad x'_i = \frac{x_i + t(x_i - c(x_1, \ldots, x_n))}{\| x_i + t(x_i - c(x_1, \ldots, x_n)) \|}.$$

Ciò è possibile perché se per un $(x_1, \ldots, x_n) \in X(k, n, \lambda)$ e per un intero $i, 1 \leq i \leq n$, si avesse:

$$x_i + t(x_i - c(x_1, \ldots, x_n)) = 0$$

moltiplicando scalarmente per $c(x_1, \ldots, x_n)$ e sfruttando le (1), (2), si otterrebbe:

$$\beta + t(\beta - \beta) = 0$$

cioè $\beta = 0$, assurdo.

Inoltre $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in V_{k+1, n}$ perché i punti x'_i hanno norma unitaria e sono a due a due ortogonali: se $i \neq j$ e $c = c(x_1, \ldots, x_n)$

$$(x_i + t(x_i - c)) \times (x_j + t(x_j - c)) = (\alpha - \beta) t^2 + (\alpha - \beta) 2t + \alpha = 0$$

perché t è soluzione della (3).

La φ è ovviamente equivariante per $\mathfrak{S}_n$; tralascio di dimostrare che è un omeomorfismo.

(ii). Poiché $\lambda_n < \lambda_{n-1}$ è lecito considerare $X(k, n-1, \lambda_n)$, se $n > 2$; per $n = 2$ porremo, per comodità di questa dimostrazione, $X(k, 1, 2) = \mathbf{S}_{k-1}$.

Dimostriamo che:

$$\varphi: X(k, n, \lambda_n) \to X(k, n-1, \lambda_n),$$

$$(x_1, \ldots, x_n) \to (x_1, \ldots, x_{n-1})$$

è un omeomorfismo. Infatti φ è iniettiva perché se $(x_1, \ldots, x_n) \in X(k, n, \lambda_n)$ allora

$$x_n = nc(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{i=1}^{n-1} x_i = - \sum_{i=1}^{n-1} x_i$$

è individuato da $x_1, \dots, x_{n-1}$, essendo $c(x_1, \dots, x_n) = 0$ per ipotesi; φ è ovviamente suriettiva e continua, quindi — trattandosi di spazi separati e compatti — è un omeomorfismo.

Poiché poi, essendo $\lambda_n < \lambda_{n-1}$, $X(k, n-1, \lambda_n)$ è omeomorfo a $\mathbf{V}_{k+1, n-1}$ per (i), la tesi è provata. c.v.d.

OSSERVAZIONE 1. Per la Prop. 1 (ii) il gruppo $\mathfrak{S}_n$ opera propriamente su $\mathbf{V}_{r, n-1}$ $(r \geq n > 1)$ a mezzo dell'omeomorfismo canonico provato. Ogni volta che si parlerà di $\mathbf{V}_{r, n-1}$ come di un $\mathfrak{S}_n$-spazio (o $\mathbf{T}_n$-spazio) ci si riferirà a tale modo di operare. L'immersione canonica di $\mathbf{V}_{r, n-1}$ in $\mathbf{V}_{r+1, n-1}$ è $\mathfrak{S}_n$-equivariante, essendo tale l'immersione di $X(r-1, n, \lambda_n)$ in $X(r, n, \lambda_n)$.

2. Costruzioni ausiliarie.

Per quanto segue identificheremo $(\mathbb{R}^m)^n$ a $\mathbb{R}^{mn}$ nel modo usuale:

$$((z_{11}, \dots, z_{1m}), (z_{21}, \dots, z_{2m}), \dots, (z_{n1}, \dots, z_{nm})) \longrightarrow (z_{11}, \dots, z_{nm}).$$

$\mathfrak{S}_n$ opera quindi su $\mathbb{R}^{mn} = (\mathbb{R}^m)^n$ in modo ovvio, e posto:

$$\Delta = \{(\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in (\mathbb{R}^m)^n \mid \zeta_1 = \zeta_2 = \dots = \zeta_n\}$$

$\mathbb{R}^{mn} - \Delta$ è stabile per $\mathfrak{S}_n$.

Sia sempre $m \geq 1$, $n > 1$: vogliamo far operare $\mathfrak{S}_n$ su $\mathbf{S}_{m(n-1)-1}$ in modo che $\mathbf{T}_n$ operi propriamente se n è primo, e costruire una mappa equivariante per $\mathfrak{S}_n$ di $\mathbb{R}^{mn} - \Delta$ in $\mathbf{S}_{m(n-1)-1}$.

Sia P il sottospazio affine di $\mathbb{R}^{mn}$ di dimensione $m(n-1)$, ortogonale a Δ nell'origine; esplicitamente:

$$((z_{11}, \dots, z_{1m}), \dots, (z_{n1}, \dots, z_{nm})) \in P$$

se e solo se

$$\sum_{i=1}^{n} z_{ij} = 0, \text{ per } 1 \leq j \leq m.$$

P è stabile per $\mathfrak{S}_n$ e così pure il sottospazio S dei suoi punti di norma unitaria; scelto un determinato omeomorfismo $\psi : S \longrightarrow \mathbf{S}_{m(n-1)-1}$, quest'ultimo acquista una struttura di $\mathfrak{S}_n$-spazio.

Consideriamo ora $\mathbf{T}_n$: la permutazione ciclica:

$$t : (\zeta_1 \dots , \zeta_n) \longrightarrow (\zeta_2 \cdot \dots , \zeta_n , \zeta_1)$$

non ha punti fissi in $\mathbb{R}^{mn} - \Delta$, per cui se n è primo $\mathbf{T}_n$ opera propriamente su tale spazio, come si vede facilmente; di conseguenza opera ancora propriamente su S, sottospazio stabile di $\mathbb{R}^{mn} - \Delta$, e su $\mathbf{S}_{m(n-1)-1}$.

Infine una mappa equivariante $h : \mathbb{R}^{mn} - \Delta \longrightarrow \mathbf{S}_{m(n-1)-1}$ è data dalla composizione:

(4)
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^{mn} - \Delta \arrow[r, "p"] \arrow[rrr, bend right, "h"'] & P - \{0\} \arrow[r, "q"] & S \arrow[r, "\psi"] & \mathbf{S}_{m(n-1)-1} \end{tikzcd}$$

dove p e q sono le mappe di $\mathfrak{S}_n$-spazi:

$$p : ((z_{11}, \dots, z_{1m}), \dots, (z_{n1}, \dots, z_{nm})) \longrightarrow \left(z_{11} - \sum_{i=1}^{n} z_{i1} , z_{12} - \sum_{i=1}^{n} z_{i2}, \dots, z_{21} - \sum_{i=1}^{n} z_{i1} , \dots \right)$$

$$q : \zeta \longrightarrow \zeta / \| \zeta \| .$$

Osservazione 2. Fissato un intero $n > 1$ l'applicazione di $\mathbb{N}$ in sé data da: $m \longrightarrow m(n-1) - 1$ è iniettiva; quanto detto consente allora di porre su $\mathbf{S}_{m(n-1)-1}$ una determinata struttura di $\mathfrak{S}_n$-spazio, che sarà sfruttata d'ora in avanti senza riferimento.

3. Riduzione del problema di Knaster a questioni di mappe equivarianti.

Proposizione 2. *Sia* $m \geq 1$, $n > 1$, $k = m + n - 2$.

(i) *Se* $0 < \lambda < \lambda_n$ *e la proposizione* $K(m, n, \lambda)$ *è falsa, esiste una mappa* $\mathbf{V}_{k+1,\, n} \longrightarrow \mathbf{S}_{m(n-1)-1}$ *equivariante rispetto a* $\mathfrak{S}_n$.

(ii) *Se la proposizione* $K(m, n, \lambda_n)$ *è falsa esiste una mappa* $\mathfrak{S}_n$*-equivariante* $\mathbf{V}_{k+1,\, n-1} \longrightarrow \mathbf{S}_{m(n-1)-1}$.

In entrambi i casi le applicazioni dette — esistendo — sono mappe di $\mathbf{T}_n$-spazi propri se n è primo.

Dim. Sia $0 < \lambda \leq \lambda_n$; se $K(m, n, \lambda)$ è falsa esiste una mappa $f: \mathbf{S}_k \to \mathbb{R}^m$ che non assume mai lo stesso valore su n punti $x_1, \ldots, x_n$ di $\mathbf{S}_k$ tali che $(x_1, \ldots, x_n) \in X(k, n, \lambda)$; in altre parole se f^n è l'applicazione prodotto $(f^n : (\mathbf{S}_k)^n \to \mathbb{R}^{mn})$, si ha: $f^n(X(k, n, \lambda)) \subset \mathbb{R}^{mn} - \Delta$.

Abbiamo così una mappa $\mathfrak{S}_n$-equivariante g:

$$\begin{tikzcd} X(k, n, \lambda) \arrow[r, "F"] \arrow[rr, bend right, "g"'] & \mathbb{R}^{mn} - \Delta \arrow[r, "h"] & \mathbf{S}_{m(n-1)-1} \end{tikzcd}$$

dove F è definita per restrizione da f^n, e h è data dalla (4).

Componendo infine g con l'omeomorfismo equivariante $\mathbf{V}_{k+1, n} \to$ $\to X(k, n, \lambda)$ della Prop. 1 (i) se $\lambda < \lambda_n$, o con l'omeomorfismo $\mathbf{V}_{k+1, n-1} \to X(k, n, \lambda_n)$ della Prop. 1 (ii) se $\lambda = \lambda_n$ (equivariante per la definizione stessa di $\mathbf{V}_{k+1, n-1}$ come $\mathfrak{S}_n$-spazio: Oss. 1) si ha la tesi. c.v.d.

Proposizione 3. *Siano $m \geq 1$, $n > 1$, $k = m + n - 2$, $0 < \lambda \leq \lambda_n$; se la proposizione $K(m, n, \lambda)$ è falsa esiste una mappa $\mathbf{V}_{k, n-1} \to \mathbf{S}_{m(n-1)-1}$ equivariante rispetto a $\mathfrak{S}_n$ ed inessenziale. Se n è primo T_n opera propriamente su entrambi gli spazi.*

Dim. Costruiamo anzitutto un sottospazio di $X(k, n, \lambda)$ stabile per $\mathfrak{S}_n$ e omeomorfo a $\mathbf{V}_{k, n-1}$. Sia $\varrho = \lambda/\lambda_n \leq 1$, e preso $x \in \mathbf{S}_k$ sia S_x la $(k - 1)$-sfera contenuta in $\mathbf{S}_k$, di raggio ϱ e centro sul segmento di estremi 0 e x; sia A_x il sottospazio di $X(k, n, \lambda)$ costituito dalle n-uple i cui punti stanno in S_x. A_x è stabile per $\mathfrak{S}_n$, e si può stabilire un omeomorfismo equivariante di A_x su $X(k-1, n, \lambda_n)$ mediante una similitudine di $\mathbb{R}^{k+1}$ di rapporto $1/\varrho$ (infatti $\lambda \cdot 1/\varrho = \lambda_n$) che porti S_x su $\mathbf{S}_{k-1}$. Per la Prop. 1 (ii) abbiamo allora un $\mathfrak{S}_n$-omeomorfismo: $\mathbf{V}_{k, n-1} \to A_x$.

Supponiamo ora che $K(m, n, \lambda)$ sia falsa: come nella dimostrazione della Prop. 2 si può costruire una mappa equivariante:

$$g : X(k, n, \lambda) \to S_{m(n-1)-1}.$$

La tesi è allora provata se si dimostra che, detta g_x la restrizione ad A_x della g, esiste un punto x di $\mathbf{S}_k$ tale che g_x sia inessenziale (infatti è equivariante per restrizione, essendo A_x stabile per $\mathfrak{S}_n$).

Costruiamo un'immersione $h : A_x \times I \longrightarrow X(k, n, \lambda)$, I essendo l'intervallo $[0,1]$ di $\mathbb{R}$; se $x' \in S_x$ e $t \in I$, sia $\sigma_t^{x'}$ la rotazione di $\mathbf{S}_k$ intorno al $(k-1)$-piano ortogonale in 0 al 2-piano generato da $0, x, x'$, tale che $\sigma_t^{x'}(x)$ sia quel punto dell'arco minore della geodetica per x e x' per cui: $d(x', \sigma_t^{x'}(x)) = t \cdot d(x', x)$. Si pone allora:

$$h : A_x \times I \longrightarrow X(k, n, \lambda),\ ((x_1, \dots, x_n), t) \longrightarrow (\sigma_t^{x_1}(x_1), \dots, \sigma_t^{x_1}(x_n)).$$

Evidentemente $h((x_1, \dots, x_n), 0) = (x_1, \dots, x_n)$, qualunque sia $(x_1, \dots, x_n) \in A_x$; posto:

$$B_x = h(A_x \times \{1\}) \qquad g'_x = g|B_x \qquad h_1 = h(\cdot, 1) : A_x \longrightarrow B_x$$

$g \circ h : A_x \times I \longrightarrow S_{m(n-1)-1}$ risulta un'omotopia di g_x in $g'_x \circ h_1$ ed è quindi sufficiente provare che esiste un punto x di $\mathbf{S}_k$ per cui g'_x è inessenziale. Scriviamo esplicitamente g'_x (ricordando la definizione di g nella dimostrazione della Prop. 2):

$$B_x \xrightarrow{incl.} X(k, n, \lambda) \xrightarrow{F} \mathbb{R}^{mn} - \Delta \xrightarrow{p} P - \{0\} \xrightarrow{q} S \xrightarrow{\psi} S_{m(n-1)-1}$$

dove F è indotta per restrizione da f^n, p e q sono date dalla (4), e ψ è un omeomorfismo. Indicheremo inoltre con $f_i : \mathbf{S}_k \longrightarrow \mathbb{R}$ la coordinata i-esima di f, $1 \leq i \leq m$.

Sia x un punto di $\mathbf{S}_k$ in cui f_1 ha un massimo: dimostriamo che l'immagine di $\psi^{-1} \circ g'_x = q \circ p \circ F \mid B_x$ è propriamente contenuta in S, il che prova quanto affermato.

Se $(x_1, \dots, x_n) \in B_x$ si vede facilmente che $x_1 = x$, e quindi:

$$f_1 x_1 = f_1 x \geq f_1 x_i \quad \text{per} \quad 1 \leq i \leq m.$$

Ma $\quad f^n(x_1, \dots, x_n) = (fx_1, fx_2, \dots, fx_n) =$

$$= (f_1 x_1, \dots, f_m x_1, f_1 x_2, \dots, f_m x_2, \dots, f_1 x_n, \dots, f_m x_n)$$

quindi la prima coordinata in $\mathbb{R}^{mn}$ di $pf^n(x_1, \dots, x_n)$ è :

$$f_1 x_1 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f_1 x_i\right)$$

non negativa per le diseguaglianze viste ; ciò vale ancora ovviamente per $(\psi^{-1} \circ g'_k)(x_1, \dots, x_n) = qpf^n(x_1, \dots, x_n)$. Poichè S contiene punti di $\mathbb{R}^{mn}$ con prima coordinata negativa la tesi è vera. c.v.d.

OSSERVAZIONE 3. Esistono immersioni $\mathfrak{S}_n$-equivarianti :

$$\mathbf{V}_{r-1, n-1} \longrightarrow \mathbf{V}_{r, n} \qquad \mathbf{V}_{r-1, n-1} \longrightarrow \mathbf{V}_{r, n-1} \qquad (r \geq n > 1)$$

che verranno sfruttate al paragrafo seguente. Infatti nella dimostrazione della Prop. 3 si è considerato un $\mathfrak{S}_n$-omeomorfismo di $\mathbf{V}_{k, n-1}$ su un sottospazio di $X(k, n, \lambda)$, per $k \geq n-1 > 0$ e $0 < \lambda \leq \lambda_n$; ponendo $r = k+1$ e sfruttando i due omeomorfismi equivarianti della Prop. 1 si ha quanto affermato.

4. Omologia delle varietà di Stiefel reali.

La varietà di Stiefel reale $\mathbf{V}_{m,n}$ $1 \leq n \leq m$, è compatta ed ha dimensione :

$$(m-1) + (m-2) + \dots + (m-n) = mn - n(n+1)/2.$$

Se $n < m$, $\mathbf{V}_{m,n}$ è connessa, mentre $\mathbf{V}_{m,m}$ ha due componenti omeomorfe a $\mathbf{V}_{m, m-1}$.

La coomologia intera delle varietà di Stiefel è stata colcolata da Borel ([5], Prop. 10.1 e 10.4). In particolare se $1 \leq n < m$, e r è la dimensione di $\mathbf{V}_{m,n}$ si ha $H^r(\mathbf{V}_{m,n}) = \mathbb{Z}$; poiché le $\mathbf{V}_{m,n}$ sono compatte e connesse per $1 \leq n < m$, ne risulta che sono anche orientabili e vale la dualità di Poincaré tra omologia e coomologia :

$$H_q(\mathbf{V}_{m,n}) = H^{r-q}(\mathbf{V}_{m,n}), \text{ per ogni intero } q$$

(r essendo sempre la dimensione di $\mathbf{V}_{m,n}$).

Dai risultati di Borel ricavo, mediante la detta dualità, l'omologia delle varietà $\mathbf{V}_{m,2})$ $(m > 2)$ e $\mathbf{V}_{m,3}(m > 3)$, la cui conoscenza verrà sfruttata nel paragrafo seguente [6]).

$$H(\mathbf{V}_{m,2}) = \mathbb{Z} + t^{m-2}\,\mathbb{Z}_2 + t^{2m-3}\,\mathbb{Z},\ \textit{per } m \textit{ dispari} \geq 3.$$

$$H(\mathbf{V}_{m,2}) = \mathbb{Z} + t^{m-2}\,\mathbb{Z} + t^{m-1}\,\mathbb{Z} + t^{2m-3}\,\mathbb{Z},\ \textit{per } m \textit{ pari} \geq 4.$$

$$H(\mathbf{V}_{4,3}) = \mathbb{Z} + t\,\mathbb{Z}_2 + t^3\,\mathbb{Z}^2 + t\ \mathbb{Z}_2 + t^6\,\mathbb{Z}.$$

$$H(\mathbf{V}_{m,3}) = \mathbb{Z} + t^{m-3}\,\mathbb{Z}_2 + t^{m-1}\,\mathbb{Z} + t^{2m-5}\,\mathbb{Z} + t^{2m-4}\,\mathbb{Z}_2 + t^{3m-6}\,\mathbb{Z},$$
$$\textit{per } m \textit{ pari} \geq\ .$$

$$H(\mathbf{V}_{m,3}) = \mathbb{Z} + t^{m-3}\,\mathbb{Z} + t^{m\ \ 2}\,\mathbb{Z}_2 + t^{2m-5}\,\mathbb{Z}_2 + t^{2m-3}\,\mathbb{Z} + t^{3m-6}\,\mathbb{Z},$$
$$\textit{per } m \textit{ dispari} \geq 5.$$

§ 4. — Dimostrazione di due teoremi di H. Hopf e C. T. Yang.

Hopf [12] e Yang [20] hanno risolto affermativamente il Problema di Knaster nei casi particolari $n = 2$ e, rispettivamente, $n = 3$, y_1, y_2, y_3 *equidistanti*; il teorema di Hopf è una generalizzazione del teorema di Borsuk-Ulam (Borsuk [6]) riferito come i primi due al § 2.

Questi risultati sono qui riottenuti mostrando la non esistenza dell'una o dell'altra delle mappe equivarianti di cui alle Prop. 3.2, 3.3; ciò viene fatto mediante i metodi esposti al § 1.

Si mantengono in questo paragrafo i modi di operare di $\mathbf{T}_n$ sulle varietà di Stiefel e sulle sfere descritti al paragrafo precedente, in particolare in Oss. 1, 2. Poiché i valori di n qui considerati ($n = 2, 3$) sono numeri primi, $\mathbf{T}_n$ opererà propriamente anche sulle sfere.

---

[6]) Per brevità si scrive il gruppo graduato d'omologia di uno spazio X nella « forma polinomiale » $H(X) = \sum_{q \in \mathbb{Z}} t^q H_q(X)$.

PROPOSIONE 1. (Hopf) *Sia* $m \geq 1$, $0 < \lambda \leq 2$; *per ogni applicazione continua* $f : \mathbf{S}_m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *esistono due punti di* $\mathbf{S}_m$ *distanti* λ *tra loro su cui* f *assume lo stesso valore. In altre parole : il Problema di Knaster ha risposta affermativa per* $n = 2$.

DIM. Per la Prop. 3.3 è sufficiente provare che ogni mappa di $\mathbf{V}_{m,1} = \mathbf{S}_{m-1}$ in $\mathbf{S}_{m-1}$, equivariante per $\mathbf{T}_2$ è essenziale. Poiché $\mathbf{T}_2$ opera propriamente su entrambi gli spazi, ciò è vero per Prop. 1.3 (prendere ad es. $G = \mathbb{Z}$ o $G = \mathbb{Z}_2$). c.v.d.

PROPOSIZIONE 2. (Yang) *Sia* $m \geq 1$, $0 < \lambda \leq \sqrt{3}$; *per ogni applicazione continua* $f : \mathbf{S}_{m+1} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *c'è un triangolo equilatero inscritto in* $\mathbf{S}_{m+1}$, *di lato* λ, *sui cui vertici la* f *assume lo stesso valore. Cioè : il Problema di Knaster ha risposta affermativa per* $n = 3$ *e* y_1, y_2, y_3 *equidistanti.*

DIM. Sia *m pari*. Per la Prop. 3.3 basta provare che ogni mappa di $\mathbf{V}_{m+1,2}$ in $\mathbf{S}_{2m-1}$, equivariante per $\mathbf{T}_3$ (che opera propriamente sugli spazi detti) è essenziale. Ora, essendo m pari ≥ 2, abbiamo (cfr. § 3, n. 4) :

$$H_q(\mathbf{V}_{m+1,2}; \mathbb{Z}_3) = H_q(\mathbf{S}_{2m-1}; \mathbb{Z}_3) \quad \text{per ogni } q.$$

Quindi $\mathbf{V}_{m+1,2}$ è una varietà $(2m-1)$-sferica rispetto a $\mathbb{Z}_3$ (Def. 1.2) come $\mathbf{S}_{2m-1}$; si conclude ancora mediante la Prop. 1.3.

Per m dispari sfrutteremo la Prop. 3.2 anziché la 3.3, e quindi è necessario distinguere il caso diametrale ($\lambda = \lambda_3 = \sqrt{3}$) e quello non diametrale ($\lambda < \lambda_3$).

Sia *m dispari*, $\lambda = \sqrt{3}$. Per la Prop. 3.2 (ii) è sufficiente dimostrare che non esistono mappe $\mathbf{T}_3$-equivarianti di $\mathbf{V}_{m+2,2}$ in $\mathbf{S}_{2m-1}$ ($\mathbf{T}_3$ operando propriamente su entrambi gli spazi). Essendo m dispari :

$$H_q(\mathbf{V}_{m+2,2}; \mathbb{Z}_3) = H_q(\mathbf{S}_{2m+1}; \mathbb{Z}_3) \quad \text{per ogni } q.$$

Quindi $\mathbf{V}_{m+2,2}$ è una varietà $(2m+1)$-sferica rispetto a $\mathbb{Z}_3$, mentre $\mathbf{S}_{2m-1}$ è varietà sferica di dimensione minore. La Prop. 1.3 prova allora l'asserto.

Sia infine m *dispari*, $\lambda < \sqrt{3}$. Per la Prop. 3.2 (i) è sufficiente provare che non esistono mappe $\mathbf{T}_3$-equivarianti $\mathbf{V}_{m+2,3} \to \mathbf{S}_{2m-1}$; supponiamo per assurdo che ne esista una.

Se $m = 1$, $\mathbf{V}_{3,3}$ non è connesso ma l'immersione di $\mathbf{V}_{3,2}$ in quello (come una delle due componenti connesse, cfr. § 3) fornisce una mappa di $\mathbf{T}_3$-spazi propri $\mathbf{V}_{3,2} \to \mathbf{S}_1$, il che è assurdo come visto in particolare al punto precedente.

Sia allora $m > 1$ (m *dispari*, $\lambda < \sqrt{3}$); si ha:

$$H_q(\mathbf{V}_{m+2,3}; \mathbb{Z}_3) = \mathbb{Z}_3 + t^{m-1}\mathbb{Z}_3 + t^{2m+1}\mathbb{Z}_3 + t^{3m}\mathbb{Z}_3$$

(cfr. § 3). Dimostriamo che non esistono mappe $\mathbf{T}_3$-equivarianti di $\mathbf{V}_{m+2,3}$ in $\mathbf{S}_{2m-1}$.

Poiché $H_q(\mathbf{V}_{m+2,3}; \mathbb{Z}_3) = 0$ per $0 < q < m - 1$, $\mathbf{V}_{m+2,3}$ è $(2m - 1, m)$-trasgressivo rispetto a $\mathbb{Z}_3$ (Prop. 1.2); consideriamo la immersione $\mathbf{T}_3$-equivariante $j: \mathbf{V}_{m,2} \to \mathbf{V}_{m+2,3}$ ottenuta componendo la $\mathbf{V}_{m,2} \to \mathbf{V}_{m+1,3}$ di Oss. 3.3 con l'immersione canonica di $\mathbf{V}_{m+1,3}$ in $\mathbf{V}_{m+2,3}$. Essendo m dispari ≥ 3 per ipotesi:

$$H_q(\mathbf{V}_{m,2}; \mathbb{Z}_3) = H_q(\mathbf{S}_{2m-3}; \mathbb{Z}_3) \text{ per ogni } q$$

ciò mostra che $\mathbf{V}_{m,2}$ è $(2m - 1, p)$-trasgressivo rispetto a $\mathbb{Z}_3$ per $2 \leq p < 2m - 1$ (Prop. 1.2): in particolare esiste $\tau_{2m-1,m}(\mathbf{V}_{m,2}; \mathbb{Z}_3)$ e per il Lemma 1.1 è nullo (esistendo anche $\tau_{2m-1,2m-2}$ ed essendo $2m - 2 > m$ perché $m \geq 3$). La Prop. 1.1 prova allora che:

$$\tau_{2m-1,m}(\mathbf{V}_{m+2,3}; \mathbb{Z}_3) = 0.$$

Sappiamo inoltre che $H_q(\mathbf{V}_{m+2,3}; \mathbb{Z}_3) = 0$ per $0 < q < m - 1$, o per $m - 1 < q \leq 2m - 1$: $\mathbf{V}_{m+2,3}$ è quindi $(2m - 1, 0)$-trasgressivo rispetto a $\mathbb{Z}_3$ per Prop. 1.4; poiché $\tau_{2m-1,0}(\mathbf{S}_{2m-1}; \mathbb{Z}_3)$ esiste ed è non nullo (Cor. 2 Prop. 1.2) l'esistenza di una mappa equivariante di $\mathbf{V}_{m+2,3}$ in $\mathbf{S}_{2m-1}$ porterebbe a $H_{2m-1}(\mathbf{V}_{m+2,3}; \mathbb{Z}_3) \neq 0$ (Prop. 1.1), il che è falso. c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

Testi :

[1] H. CARTAN-S. EILENBERG. Homological Algebra. Princeton U. P., 1956.

[2] P. J. HILTON-S. WYLIE. Homology Theory. Cambridge U. P., 1962.

[3] S. T. HU. Homotopy Theory. Academic Press (New York), 1959.

[4] S. MAC LANE. Homology. Springer (Berlin), 1963.

I testi sono spesso citati con i soli nomi degli autori.

Articoli :

[5] A. BOREL. *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes des groupes de Lie compacts.* Ann. of Math. 57 (1953), p. 115-207.

[6] K. BORSUK. *Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre.* Fund. Math. 20 (1933), p. 177-190.

[7] D. G. BOURGIN. *On some separation and mapping theorems.* Comm. Math. Helv. 29 (1955), p. 199-214.

[8] D. G. BOURGIN. *Deformation and mapping theorems.* Fund. Math. 46 (1959), p. 285-303.

[9] D. G. BOURGIN. *Multiplicity of solutions in frame mappings.* Illinois J. of Math. 9. (1965), p. 169-177.

[10] F. J. DYSON. *Continuous functions defined on spheres.* Ann. of Math. 54 (1951), p. 534-536.

[11] E. E. FLOYD. *Real valued mappings of spheres.* Proc. A.M.S. 6 (1955), p. 957-959.

[12] H. HOPF. *Eine Verallgemeinerung bekannter Abbildungs- und Überdeckungssätze.* Portug. Math. 4 (1944), p. 129-139.

[13] S. KAKUTANI. *A proof that there exists a circumscribing cube around any bounded closed convex set in* $\mathbb{R}^3$. Ann. of Math. 43 (1942), p. 739-741.

[14] B. KNASTER. Colloquium Mathematicum, 1 (1947), p. 30-31.

[15] G. R. LIVESAY. *On a theorem of Dyson.* Ann. of Math. 59 (1954), p. 227-229.

[16] H. YAMABE-Z. YUJOBO. *On the continuous functions defined on a sphere.* Osaka Math. J. 2 (1950), p. 19-22.

[17] C. T. YANG. *On theorems of Borsuk-Ulam, Kakutani-Yamabe-Yujobô and Dyson.* Ann. of Math. 60 (1954), p. 262-282.

[18] C. T. YANG. *Idem,* II. Ann. of Math. 62 (1955), p. 271-283.

[19] C. T. YANG. *Continuous functions from spheres to euclidean spaces.* Ann. of Math. 62 (1955), p. 284-291.

[20] C. T. YANG. *On maps from spheres to euclidean spaces.* Amer. J. of Math. 79 (1957), p. 725-732.

[21] E. C. ZEEMAN. *On the filtered differential group.* Ann. of Math. 66 (1957), p. 557-585.

Manoscritto pervenuto in redazione il 28 febbraio 1967.