RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. MIRANDA

Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 238-257

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__238_0>

COMPORTAMENTO DELLE SUCCESSIONI CONVERGENTI DI FRONTIERE MINIMALI

M. MIRANDA *)

Per le definizioni e le notazioni rinviamo a [6].

Questo lavoro è costituito di due parti. Nella prima si considera il comportamento delle successioni di funzioni aventi gradiente minimale e convergenti in L^1_{loc}. Nella seconda si considera il caso delle funzioni caratteristiche d'insieme, ovvero delle frontiere minimali. Per queste viene considerato l'integrale della somma dei quadrati delle curvature principali e si dimostra che tale integrale è semicontinuo inferiormente.

Ringrazio Ennio De Giorgi con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. È noto che se $g \in L^1_{\text{loc}}(E)$, dove $E \subset R^n$ è un insieme misurabile, allora per quasi tutti i punti $x \in E$ vale la relazione

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-n} \int_{E \cap \{y;\, |y-x| < \varepsilon\}} |g(x) - g(y)|\, dy = 0. \tag{1.1}$$

Nel caso delle funzioni aventi derivate prime misure si può dire qualcosa di più sull'insieme dei punti per i quali vale la (1.1).

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

Cominciamo col provare un lemma riguardante le misure.

LEMMA, 1 *Sia* $A \subset R^n$ *aperto e* $w : A \to R$ *lipschitziana con* $\inf w(A) > 0$. *Sia* μ *una misura positiva definita su* $\Omega = \{(x, y) ; x \in A, 0 < y < w(x)\}$ *e sia* $\mu(\Omega) < \infty$. *Allora per quasi tutti i punti* $x \in A$ *si ha*

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-n} \mu(\{(\xi, \eta); \xi \in A, \ |\xi - x| < \varepsilon, \ -\varepsilon < \eta - w(\xi) < 0\}) = 0. \tag{1.2}$$

DIM. Indichiamo con $\{\varepsilon_j\}$ una successione decrescente infinitesima di numeri reali tale che

$$\varepsilon_1 < \inf w(A).$$

Per ogni j consideriamo la misura positiva μ_j definita su A da

$$\mu_j(B) = \mu(\{(\xi, \eta) ; \xi \in B, -\varepsilon_j < \eta - w(\xi) < 0\}), \tag{1.3}$$

per $B \subset A$ di Borel.

Avremo allora, poiché $\lim_{j \to \infty} \{(\xi, \eta) ; \xi \in A, -\varepsilon_j < \eta - w(\xi) < 0\} = \emptyset$ e $\mu(\Omega) < \infty$,

$$\lim_{j \to \infty} \mu_j(A) = 0. \tag{1.4}$$

Ad ogni μ_j possiamo d'altra parte associare (v. Teorema di Radon-Nikodym-Besicovitch) una funzione $g_j \in L^1(A)$ in modo che valgano le

$$\int_B g_j(\xi)\, d\xi \leq \mu_j(B), \ \forall\, B \subset A \text{ di Borel,} \tag{1.5}$$

$$\omega_n g_j(x) = \lim_{\varrho \to 0+} \varrho^{-n} \mu_j(\{\xi ; |\xi - x| < \varrho\}), \text{ per quasi tutti gli } x \in A, \tag{1.6}$$

$(\omega_n = \text{mis}\{x ; x \in R^n, |x| < 1\})$.

Dalle (1.3) e (1.6) si ha che la $\{g_j\}$ è una successione non crescente di funzioni non negative e per essa vale, grazie alle (1.4) e (1.5).

$$\lim_{j \to \infty} \int_A g_j(\xi)\, d\xi = 0. \tag{1.7}$$

Dal Teorema di Lebesgue si ha allora che deve essere

(1.8) $$\lim_{j\to\infty} g_j(x) = 0, \text{ per quasi tutti gli } x \in A.$$

Ma dalle (1.3) e (1.6) si ha anche, per quasi tutti gli $x \in A$,

(1.9) $$\max \lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-n} \mu(\{(\xi, \eta) ; |\xi - x| < \varepsilon, -\varepsilon < \eta - w(\xi) < 0\}) \leq \omega_n g_j(x), \forall j$$

e quindi dalle (1.8) e (1.9) si ha che la (1.2) vale per quasi tutti gli $x \in A$.

c.v.d.

Dal Lemma 1 si ricava il seguente risultato riguardante le funzioni aventi derivate prime misure.

TEOREMA, 1. *Sia $A \subset R^n$ aperto e $w : A \to R$ lipschitziana con* $\inf w(A) > 0$.

Allora per ogni $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, dove $\Omega = \{(x, y) ; x \in A, 0 < y < w(x)\}$, con $\int_\Omega |Df| < \infty$ esiste $\varphi \in L^1(S)$ dove $S = \{(x, w(x)) ; x \in A\}$, tale che per quasi tutti gli $x \in A$ vale

(1.10) $$\lim_{\varepsilon\to 0+} \varepsilon^{-n-1} \int_{\Omega\cap\{(\xi,\eta);\, |\xi - x|^2 + |\eta - w(x)|^2 < \varepsilon^2\}} |\varphi(x, w(x)) - f(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta = 0,$$

e per ogni $g = (g_1, \dots, g_{n+1})$, con le g_i di classe C^1 e a supporto compatto contenuto in $A \times R_+$ [1]*, vale*

(1.11) $$\sum_{i=1}^{n+1} \int_\Omega f D_i g_i + \sum_{i=1}^{n+1} \int_\Omega g_i D_i f = \int_S \varphi \sum_{i=1}^{n+1} g_i \nu_i \, dH_n$$

(ν *normale est. su* S).

DIM. Dalle formule di Green classiche e dal fatto che f può essere approssimata in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con funzioni di classe C^1 si ha che

---

[1]) $R_+ = \{\eta ; \eta \in R, \eta > 0\}$.

esiste

$$E \subset (0, \inf w(A)) \text{ con } \operatorname{mis}_1 E = \inf w(A),$$

e tale che per ogni $g = (g_1, \dots, g_{n+1})$ con le g_i di classe C^1 e $\operatorname{supp} g \subset A \times R_+$, si ha

$$(1.12) \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega_\varepsilon} f D_i g_i + \sum_{i=1}^{n+1} \int_{\Omega_\varepsilon} g_i D_i f = \int_{S_\varepsilon} f \sum_{i=1}^{n+1} \nu_i g_i \, dH_n, \ \forall \varepsilon \in E,$$

dove si deve intendere $\Omega_\varepsilon = \{(\xi, \eta);\ \xi \in A,\ 0 < \eta < w(\xi) - \varepsilon\}$ e $S_\varepsilon = \{(\xi, w(\xi) - \varepsilon);\ \xi \in A\}$, e, per ogni insieme di Borel $B \subset A$,

$$(1.13) \qquad \int_{(B \times R) \cap S} |f_\varepsilon - f_{\varepsilon'}| \, dH_n \leq \int_{(B \times R) \cap (\Omega_{\varepsilon'} - \Omega_\varepsilon)} |Df|, \ \forall \varepsilon, \varepsilon' \in E, \varepsilon' < \varepsilon,$$

dove si deve intendere $f_\varepsilon(x, w(x)) = f(x, w(x) - \varepsilon)$.

Dalla (1.13) si ha che esiste il

$$\lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ \varepsilon \in E}} f_\varepsilon \quad \text{in} \quad L^1(S),$$

e detto φ tale limite, tenuto conto della (1.12), si ha che φ verifica la (1.11), d'altra parte, tenuto conto della (1.13) si ha anche

$$(1.14) \qquad \int_{(B \times R) \cap S} |\varphi - f_\varepsilon| \, dH_n \leq \int_{(B \times R) \cap (\Omega - \Omega_\varepsilon)} |Df|, \ \forall \varepsilon \in E.$$

Per verificare la (1.10) cominciamo coll'osservare che si ha

$$(1.15) \qquad \int_{\Omega \cap \{(\xi, \eta);\ |\xi - x|^2 + |\eta - w(x)|^2 < \varepsilon^2\}} \varphi \, |(x, w(x)) - f(\xi, \eta)| \, d\xi \, d\eta \leq$$

$$\leq \int_{|\xi - x| < \varepsilon} d\xi \int_{w(\xi) - \varepsilon}^{w(\xi)} |\varphi(x, w(x)) - f(\xi, \eta)| \, d\eta,$$

ed è ovviamente

$$(1.16)\qquad \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} d\xi \int\limits_{w(\xi)-\varepsilon}^{w(\xi)} |\varphi(x, w(x)) - f(\xi, \eta)|\, d\eta \leq$$

$$\leq \varepsilon \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} |\varphi(x, w(x)) - \varphi(\xi, w(\xi))|\, d\xi + \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} d\xi \int\limits_{w(\xi)-\varepsilon}^{w(\xi)} |\varphi(\xi, w(\xi)) - f(\xi, \eta)|\, d\eta .$$

D'altra parte essendo $\varphi \in L^1(S)$ si ha che $\varphi(x, w(x)) \in L^1(A)$ e quindi vale

$$(1.17)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-n} \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} |\varphi(x, w(x)) - \varphi(\xi, w(\xi))|\, d\xi = 0,$$

per quasi tutti gli $x \in A$.

Mentre per quanto riguarda l'altro termine si ha

$$(1.18)\qquad \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} d\xi \int\limits_{w(\xi)-\varepsilon}^{w(\xi)} |\varphi(\xi, w(\xi)) - f(\xi, \eta)|\, d\eta \leq \int\limits_{(0,\varepsilon)\cap E} dt \int\limits_{S} |\varphi - f_t|\, dH_n ,$$

per cui, tenuto conto della (1.14), vale

$$(1.19)\qquad \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} d\xi \int\limits_{w(\xi)-\varepsilon}^{w(\xi)} |\varphi(\xi, w(\xi)) - f(\xi, \eta)|\, d\eta \leq \varepsilon \int\limits_{\{(\xi,\eta);\, |\xi - x| < \varepsilon,\, -\varepsilon < \eta - w(\xi) < 0\}} |Df| .$$

Dalla (1.19) e dal lemma 1 si ricava allora

$$(1.20)\qquad \lim_{\varepsilon \to 0+} \varepsilon^{-n} \int\limits_{|\xi - x| < \varepsilon} d\xi \int\limits_{w(\xi)-\varepsilon}^{w(\xi)} |\varphi(\xi, w(\xi)) - f(\xi, \eta)|\, d\eta = 0,$$

per quasi tutti gli $x \in A$.

Dalle (1.15), (1.16), (1.17) e (1.20) segue allora la (1.10).

c.v.d.

Osservazione, 1. Nella situazione del Teorema 1 la funzione φ verrà detta *traccia di f su S.*

Dal Teorema 1 si ricava il segnente

Teorema, 2. *Sia $A \subset R^n$ aperto, $(a, b) \subset R$ un intervallo aperto e $w : A \longrightarrow (a, b)$ lipschitziana con*

$$a < \inf w(A) \leq \sup w(A) < b.$$

Siano $f_1 \in BV_{\text{loc}}(\Omega_1)$, dove $\Omega_1 = \{(x, y)\,;\; x \in A,\, a < y < w(x)\}$, con $\int_{\Omega_1} |Df_1| < \infty$ e $f_2 \in BV_{\text{loc}}(\Omega_2)$, dove $\Omega_2 = \{(x, y)\,;\; x \in A,\, w(x) < y < b\}$, con $\int_{\Omega_2} |Df_2| < \infty$. Indicata con f la funzione di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, dove $\Omega = A \times (a, b)$, che verifica

$$f|_{\Omega_1} = f_1\,,\; f|_{\Omega_2} = f_2\,,$$

si ha:

i) $$f \in BV_{\text{loc}}(\Omega),$$

ii) $$\int_S |Df| = \int_S |\varphi_1 - \varphi_2|\, dH_n\,,$$

dove $S = \{(x, w(x))\,;\; x \in A\}$ e φ_1, φ_2 sono le tracce su S di f_1 e f_2.

Dim. Dalla (1.11) si ha, se $g = (g_1, \dots, g_{n+1})$, con $g_i \in C^1_0(\Omega)$,

$$\sum_{i=1}^{n+1}\int_\Omega f\, D_i g_i = -\sum_{i=1}^{n+1}\int_{\Omega_1} g_i\, D_i f_1 - \sum_{i=1}^{n+1}\int_{\Omega_2} g_i\, D_i f_2 + \int_S (\varphi_1 - \varphi_2)\sum_{i=1}^{n+1} \nu_i\, g_i\, dH_n\,. \tag{1.21}$$

Dalla (1.21) segue allora evidentemente l'asserto.

c.v.d.

A proposito della validità della (1.1) per le funzioni aventi derivate prime misure possiamo allora fare la seguente osservazione

OSSERVAZIONE, 2. Se $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $\Omega \subset R^n$ aperto e $S \subset \Omega$ è una ipersuperficie lipschitziana tale che

$$\int_S |Df| = 0,$$

allora i valori di f nei punti di S possono essere scelti in modo che valga, per quasi tutti i punti $x \in S$,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-n} \int_{\{y\,;\,|y-x|<\varepsilon\}} |f(x) - f(y)|\, dy = 0. \tag{1.22}$$

Nel seguito per valore di una funzione $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ in un punto $x \in \Omega$ intenderemo il numero $f(x)$ per cui vale la (1.22), ogni volta che tale numero esista.

2. Ricordiamo che per funzione avente gradiente minimale in un aperto $\Omega \subset R^n$ intendiamo una $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ per la quale valga, per ogni compatto $K \subset \Omega$,

$$\int_K |Df| = \inf \left\{ \int_K |Dg|\,;\; g \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega),\; g = f \text{ in } \Omega - K \right\}. \tag{2.1}$$

Utilizzando quanto è stato visto nel n. 1 possiamo allora provare il seguente

TEOREMA, 3. *Se $\Omega \subset R^n$ è aperto e $\{f_h\}$ è una successione di funzioni aventi gradiente minimale in Ω e convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ verso f, allora anche f ha gradiente minimale in Ω.*

DIM. Possiamo supporre che valga, per ogni compatto $K \subset \Omega$,

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_K |f_{h+1} - f_h|\, dx < \infty. \tag{2.2}$$

Infatti da una qualunque successione convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ se ne può estrarre una per cui valga la (2.2).

Cominciamo col provare che $f \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Per questo basta, grazie alla Proposizione 0.3 di [5], mostrare che per ogni compatto $K \subset \Omega$ si ha

$$\sup_h \int_K |Df_h| < \infty . \tag{2.3}$$

Per verificare la (2.3), fissato K, indichiamo con A un aperto relativamente compatto in Ω, con frontiera localmente lipschitziana e tale che

$$A \supset K, \tag{2.4}$$

$$\int_{\partial A} |Df_h| = 0, \ \forall\, h, \tag{2.5}$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \int_{\partial A} |f_{h+1} - f_h| \, dH_{n-1} < \infty . \tag{2.6}$$

Se, per ogni h, indichiamo con g_h la funzione che vale zero in A ed è eguale a f_h in $\Omega - A$, dal Teorema 2 dalla (2.5) e dall'Osservazione 2 si ricava

$$\int_{\bar{A}} |Dg_h| = \int_{\partial A} |f_h| \, dH_{n-1} , \ \forall\, h, \tag{2.7}$$

da cui, tenuto conto della proprietà di minimo del gradiente di f_h si ha

$$\int_A |Df_h| \leq \int_{\partial A} |f_h| \, dH_{n-1} , \ \forall\, h. \tag{2.8}$$

Dalle (2.8), (2.6) e (2.4) si ha allora che vale la (2.3).

Per verificare che f ha gradiente minimale in Ω resta da far vedere che per ogni compatto $K \subset \Omega$ e per ogni $g \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ tale che

$g = f$ in $\Omega - K$ risulta

$$\int_K |Df| \leq \int_K |Dg| . \tag{2.9}$$

Per provare la (2.9), fissati K e g, indichiamo con A un aperto relativamente compatto in Ω, con frontiera localmente lipschitziana, per il quale valgano le (2.4), (2.5) e in in più le

$$\int_{\partial A} |Df| = 0, \tag{2.10}$$

$$\lim_{h \to \infty} \int_{\partial A} |f - f_h| \, dH_{n-1} = 0. \tag{2.11}$$

Se indichiamo, per ogni h, con g_h la funzione eguale a g in A ed a f_h in $\Omega - A$, avremo, tenuto conto del Teorema 2, dell'Osservazione 2, delle (2.5), (2.10) e del fatto che $g = f$ in $\Omega - K$

$$\int_{\bar{A}} |Dg_h| = \int_A |Dg| + \int_{\partial A} |f - f_h| \, dH_{n-1}, \ \forall \ h. \tag{2.12}$$

Poichè f ha gradiente minimale si ha

$$\int_{\bar{A}} |Df_h| \leq \int_A |Dg| + \int_{\partial A} |f - f_h| \, dH_{n-1}, \quad \forall \ h, \tag{2.13}$$

da cui a fortiori

$$\int_A |Df_h| \leq \int_A |Dg| + \int_{\partial A} |f - f_h| \, dH_{n-1}, \quad \forall \ h. \tag{2.14}$$

Dalle (2.14), tenuto conto della (2.11) e della semicontinuità, rispetto alla convergenza in L^1_{loc}, della variazione totale del gradiente su un aperto (cfr. Prop. 0.3 di [5]) si ricava

$$\int_A |Df| \leq \int_A |Dg|. \tag{2.15}$$

La (2.9) è allora conseguenza immediata della (2.15), della (2.4) e del fatto che $g = f$ in $\Omega - K$.

c. v. d.

OSSERVAZIONE, 3. Se $\{f_h\}$ è una successione di funzioni aventi gradiente minimale nell'aperto $\Omega \subset R^n$ e convergente verso f in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, e se E è un insieme relativamente compatto in Ω tale che

$$\int_{\partial E} |Df| = 0,$$

allora si ha

$$\lim_{h \to \infty} \int_{E} |Df_h| = \int_{\dot{E}} |Df|. \tag{2.16}$$

Infatti se $A \supset \overline{E}$ è un aperto relativamente compatto in Ω scelto come nella seconda parte della dimostrazione del Teorema 3 si ha, ragionando come è stato lì fatto,

$$\lim_{h \to \infty} \int_A |Df_h| = \int_A |Df|. \tag{2.17}$$

Essendo $A - \overline{E}$ aperto si ha d'altra parte, per la semicontinuità sugli aperti della variazione totale del gradiente,

$$\min\lim_{h \to \infty} \int_{A - \overline{E}} |Df_h| \geq \int_{A - \overline{E}} |Df|. \tag{2.18}$$

ovvero, tenuto conto della (2.17),

$$\max\lim_{h \to \infty} \int_{\overline{E}} |Df_h| \leq \int_{\overline{E}} |Df|. \tag{2.19}$$

Ma essendo $E - \partial E$ aperto deve essere

$$\min_{h \to \infty} \lim \int_{E - \partial E} | Df_h | \geq \int_{E - \partial E} | Df | . \tag{2.20}$$

Dalle (2.19) e (2.20), essendo $\int_{\partial E} | Df | = 0$, segue che deve valere la (2.16).

3. In questo paragrafo diamo alcuni complementi riguardanti le frontiere minimali, ovvero le funzioni caratteristiche d'insieme aventi gradiente minimale, che sono state già considerate in [3] e [6].

Per gli insiemi misurabili $E \subset R^n$ sottintenderemo sempre che la loro frontiera, che indicheremo con $\mathcal{F}E$, verifichi

$$x \in \mathcal{F}E \Longleftrightarrow 0 < \operatorname{mis} \{y\,;\, y \in E, | y - x | < \varrho\} < \operatorname{mis}\{y\,;\, | y - x | < \varrho\}, \quad \forall\, \varrho > 0. \tag{3.1}$$

Per tali frontiere può farsi la seguente

OSSERVAZIONE, 4. Se $\{E_h\}$ è una successione di insiemi convergente verso un insieme E in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ (si intenda che le funzioni caratteristiche convergono verso la funzione caratteristica) dove $\Omega \subset R^n$ è aperto, e se $x \in \mathcal{F}E \cap \Omega$, allora per ogni $\varrho > 0$ esiste h_ϱ tale che

$$\mathcal{F}E_h \cap \{y\,;\, | y - x | < \varrho\} \neq \emptyset, \qquad \forall\, h > h_\varrho . \tag{3.2}$$

Infatti, supposto $\varrho < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, dalla (3.1) e dalla convergenza degli E_h verso E si ha che esiste h_ϱ per cui

$$0 < \operatorname{mis} \{y\,;\, | y - x | < \varrho, y \in E_h\} < \operatorname{mis} \{y\,;\, | y - x | < \varrho\}, \ \forall\, h > h_\varrho , \tag{3.3}$$

e la (3.3) implica ovviamente la (3.2).

Considerazioni più precise possono farsi quando si tratti di frontiere minimali. A proposito di queste ricordiamo che se $\mathcal{F}E$ è minimale in $\Omega \subset R^n$ allora $\mathcal{F}E \cap \Omega$ è costituita di una parte singolare N, chiusa in Ω, e di misura $(n-1)$-dimensionale nulla e di una parte regolare che è una ipersuperficie analitica. La parte regolare è formata dai punti x per i quali esiste il

$$(3.4)\qquad \lim_{\varrho \to 0+} \frac{\int_{\{y\,;\,|y-x|<\varrho\}} D\varphi_E}{\int_{\{y\,;\,|y-x|<\varrho\}} |D\varphi_E|} = \frac{D\varphi_E}{|D\varphi_E|}(x)$$

(φ_E funzione caratteristica di E)

e tale limite è un n-vettore di modulo 1. Ovvero la parte regolare di $\mathcal{F}E \cap \Omega$ è, con le notazioni introdotte da De Giorgi in [2], la *frontiera ridotta* di E in Ω, cioè $\mathcal{F}^*E \cap \Omega$. Per questi risultati si veda il Teorema 6.5 di [6] oppure [3].

OSSERVAZIONE, 5. $\{E_h\}$ sia una successione di insiemi aventi frontiera minimale nell'aperto $\Omega \subset R^n$, $\{x_h\}$ sia una successione di punti con $x_h \in \mathcal{F}E_h$, $\forall\, h$. Se $E_h \to E$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $x_h \to x \in \Omega$ allora si ha $x \in \mathcal{F}E$.

Infatti: se $x \notin \mathcal{F}E$, tenuto conto di (3.1) e di un eventuale passaggio ai complementari di tutti gli insiemi considerati, si può determinare ϱ: $0 < \varrho < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$, tale che

$$(3.5)\qquad \operatorname{mis}\{y\,;\, |y-x| < \varrho,\ y \in E\} = 0.$$

Dalla (3.5), poiché $E_h \to E$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e poiché $\varrho < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ si ricava

$$(3.6)\qquad \lim_{h\to\infty} \operatorname{mis}\{y\,;\, |y-x| < \varrho,\ y \in E_h\} = 0.$$

D'altra parte, se h_0 è tale che

$$(3.7)\qquad |x_h - x| < \frac{\varrho}{2}, \qquad \forall\, h > h_0,$$

per il fatto che $x_h \in \mathcal{F}E$ si ha (cfr. Teor. IX pag. 21 di [3] oppure il Teor. 3.8 di [6])

$$(3.8) \quad \text{mis}\,\{y\,;\ |y-x|<\varrho,\ y\in E_h\} \geq \frac{1}{n}\,\omega_{n-1}\left(\frac{\varrho}{2}\right)^n, \qquad \forall\, h>h_0,$$

$$(\omega_{n-1}=\text{mis}\,\{\xi\,;\ \xi\in R^{n-1},\ |\xi|<1\}).$$

Le (3.8) e (3.6) essendo incompatibili si deve dedurre che $x \in \mathcal{F}E$.

Per il caso di frontiere minimali si può fare qualche precisazione riguardo ai punti regolari. Vale al proposito il seguente

TEOREMA, 4. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto ed $\{E_h\}$ una successione di insiemi aventi frontiera minimale in Ω, e sia $\{x_h\}$ una successione di punti verificante $x_h \in \mathcal{F}E_h$, $\forall\, h$. Se $E_h \longrightarrow E$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ e $x_h \longrightarrow x$ e se $x \in \mathcal{F}^* E \cap \Omega$, allora esiste h_0 tale che*

$$\text{i)} \qquad x_h \in \mathcal{F}^* E_h \cap \Omega, \quad \forall\, h > h_0,$$

$$\text{ii)} \qquad \lim_{h\to\infty} \frac{D\varphi_{E_h}}{|D\varphi_{E_h}|}(x_h) = \frac{D\varphi_E}{|D\varphi_E|}(x).$$

DIM. Dal Teorema 3 si ha che $\mathcal{F}E$ è minimale in Ω e quindi, se $\varrho < \text{dist}\,(x, \partial\Omega)$ si ha (cfr. formula (3.11) di [6] oppure Teor. VII pag. 17 di [3])

$$(3.9) \quad \varrho^{1-n} \int_{\{y\,;\,|y-x|<\varrho\}} |D\varphi_E| \leq \frac{1}{2}\, n\,\omega_n \quad (\omega_n = \text{mis}\,\{y\,;\ y\in R^n,\ |y|<1\}).$$

Dalla (3.9) e dal fatto che $x \in \mathcal{F}^* E \cap \Omega$ si ha

$$(3.10) \qquad \lim_{\varrho\to 0+} \varrho^{1-n} \left[\int_{\{y\,;\,|y-x|<\varrho\}} |D\varphi_E| - \left| \int_{\{y\,;\,|y-x|<\varrho\}} D\varphi_E \right| \right] = 0.$$

Esisterà allora $\bar\varrho$, $0<\bar\varrho<\text{dist}\,(x,\partial\Omega)$, tale che

$$(3.11) \qquad \bar\varrho^{1-n} \left(\int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar\varrho\}} |D\varphi_E| - \left| \int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar\varrho\}} D\varphi_E \right| \right) < \sigma\left(n, \frac{1}{2}\right),$$

dove $\sigma\left(n, \frac{1}{2}\right)$ è la costante del Teorema 5.7 di [6]. Possiamo poi evidentemente supporre anche che valga

$$\int_{\{y\,;\,|y-x|=\bar{\varrho}\}} |D\varphi_E| = 0. \tag{3.12}$$

Dalla (3.12) si ricava allora, per l'Osservazione 3,

$$\lim_{h\to\infty} \int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar{\varrho}\}} |D\varphi_{E_h}| = \int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar{\varrho}\}} |D\varphi_E|, \tag{3.13}$$

oltreché ovviamente

$$\lim_{h\to\infty} \left| \int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar{\varrho}\}} D\varphi_{E_h} \right| = \left| \int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar{\varrho}\}} D\varphi_E \right|. \tag{3.14}$$

Posto $\varrho_h = |x_h - x|$, essendo $\varrho_h \to 0$ per $h \to \infty$, dalle (3.11), (3.13) e (3.14) si ha che esiste h_0 tale che: per ogni $h > h_0$ si ha $\varrho_h < \bar{\varrho}$ e

$$(\bar{\varrho} - \varrho_h)^{1-n} \left[\int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar{\varrho}\}} |D\varphi_{E_h}| - \left| \int_{\{y\,;\,|y-x|<\bar{\varrho}\}} D\varphi_{E_h} \right| \right] < \sigma\left(n, \frac{1}{2}\right), \tag{3.15}$$

per cui a fortiori vale

$$\int_{\{y\,;\,|y-x_h|<\bar{\varrho}-\varrho_h\}} |D\varphi_{E_h}| - \left| \int_{\{y\,;\,|y-x_h|<\bar{\varrho}-\varrho_h\}} D\varphi_{E_h} \right| < \sigma\left(n, \frac{1}{2}\right) (\bar{\varrho} - \varrho_h)^{n-1}, \tag{3.16}$$

$$\forall\, h > h_0.$$

Dalla (3.16), per il Teorema 5.7 di [6], si ha che $x_h \in \mathcal{F}^* E_h$,

$\forall\, h > h_0$ e per il Corollario 6.3 di [6], si ha

$$(3.17) \qquad \left| \frac{D\varphi_E}{|D\varphi_E|}(x) - \frac{\int\limits_{\{y;\,|y-x|<t\}} D\varphi_E}{\int\limits_{\{y;\,|y-x|<t\}} |D\varphi_E|} \right| < \eta\left(n, \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{t}{\overline{\varrho}}}, \quad \forall\, t < \overline{\varrho},$$

$$(3.18) \qquad \left| \frac{D\varphi_{E_h}}{|D\varphi_{E_h}|}(x_h) - \frac{\int\limits_{\{y;\,|y-x_h|<t\}} D\varphi_{E_h}}{\int\limits_{\{y;\,|y-x_h|<t\}} |D\varphi_{E_h}|} \right| < \eta\left(n, \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{t}{\overline{\varrho} - \varrho_h}},$$

$$\forall\, h > h_0, \quad \forall\, t < \overline{\varrho} - \varrho_h .$$

Dalle (3.17) e (3.18) e dal fatto che per quasi tutti i $t < \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ si ha

$$(3.13) \qquad \lim_{h\to\infty} \frac{\int\limits_{\{y;\,|y-x_h|<t\}} D\varphi_{E_h}}{\int\limits_{\{y;\,|y-x_h|<t\}} |D\varphi_{E_h}|} = \frac{\int\limits_{\{y;\,|y-x|<t\}} D\varphi_E}{\int\limits_{\{y;\,|y-x|<t\}} |D\varphi_E|}$$

segue che vale la ii).

c. v. d.

Dal Teorema 4 e da un risultato provato in [5] si ricava il seguente

LEMMA, 2. *Se* $\{E_h\}$ *è una successione di insiemi aventi frontiera minimale nell'aperto* $\Omega \subset R^n$, *se* $E_h \to E$ *in* $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ *e se* $\overline{x} = (\overline{y}, \overline{t})$ $(\overline{y} \in R^{n-1}, \overline{t} \in R)$ *appartiene a* $\mathcal{F}^*E \cap \Omega$ *e vale*

$$\frac{D_n \varphi_E}{|D\varphi_E|}(\overline{x}) = 2p > 0,$$

allora esistono due numeri positivi ϱ, σ, un indice h_0 e per ogni $h > h_0$ una funzione f_h definita in $\{y ; |y - \bar{y}| < \varrho\}$ a valori in $\{t ; |t - \bar{t}| < \sigma\}$ in modo che

$$\text{i)} \quad \mathcal{F} E_h \cap \{x ; x = (y, t), |y - \bar{y}| < \varrho, |t - \bar{t}| < \sigma\} =$$

$$= \{(y, f_h(y)) ; |y - \bar{y}| < \varrho\}, \quad \forall\, h > h_0,$$

$$\text{ii)} \quad \sup \left\{ \frac{|f_h(y) - f_h(y')|}{|y - y'|} ; |y - \bar{y}| < \varrho, |y' - \bar{y}| < \varrho, h > h_0 \right\} < \infty.$$

DIM. Dal Teorema 4 si ha che possono determinarsi ϱ, σ positivi e h_0 in modo che

$$(3.20) \quad (y, t) \in \mathcal{F} E_h, |y - \bar{y}| < \varrho, |t - \bar{t}| < \sigma, h > h_0 \Longrightarrow (y, t) \in \mathcal{F}^* E_h$$

e

$$\frac{D_n \varphi_{E_h}}{|D\varphi_{E_h}|}(y, t) > p.$$

Se σ è scelto in modo che valga

$$\sigma > \varrho\, p^{-1} \sqrt{1 - p^2},$$

dalla (3.20) e dal Teorema 5.6 di [5] si ha che esiste f_h, per $h > h_0$, tale che valga la i) e

$$(3.21) \quad \left\{ \frac{f_h(y) - f_h(y')}{|y - y'|} ; |y - \bar{y}| < \varrho, |y' - \bar{y}| < \varrho, h > h_0 \right\} \le p^{-1} \sqrt{1 - p^2}.$$

c. v. d.

OSSERVAZIONE, 6. Dal teorema di De Giorgi relativo alla hölderianità delle estremali degli integrali multipli regolari (v. [1]) e da un classico risultato relativo alla hölderianità delle derivate seconde delle soluzioni regolari delle equazioni ellittiche (v. Teor. 35. IV di [4]) si ha che:

se $\{f_h\}$ è una successione di funzioni analitiche su un aperto A di R^m ed ivi soluzioni dell'equazione delle ipersuperfici di area minima

$$\sum_{i=1}^{m} D_i \frac{D_i f_h}{\sqrt{1+|Df_h|^2}} = 0, \quad \forall\, h, \tag{3.22}$$

se la $\{f_h\}$ converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(A)$ e se per ogni compatto $K \subset A$ vale

$$\sup\{\,|Df_h(x)|\,;\ x \in K,\ h\} < \infty, \tag{3.23}$$

allora ogni successione che si ottiene derivando quante volte si vuole la $\{f_h\}$ converge uniformemente sui compatti $K \subset A$.

Dal Lemma 2 e dalla Osservazione 6 si ricava allora il seguente

TEOREMA, 5. *Sia* $\Omega = \{(y, t)\,;\ y \in R^{n-1}, |y| < \varrho, t \in R, |t| < \sigma\}$ *e* $\{E_h\}$ *una successione di insiemi aventi frontiera minimale in* Ω, *convergente in* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ *verso l'insieme* $E = \{(y, t)\,;\ |y| < \varrho, t < f(y)\}$, *dove* f *è una funzione analitica in* $\{y\,;\ |y| < \varrho\}$ *a valori* $|f(y)| < \sigma$. *Allora per ogni* $\varrho' < \varrho$ *esiste* $\sigma' < \sigma$ *e un indice* h' *tali che*

$$\mathcal{F}E_h \cap \{(y, t)\,;\ |y| < \varrho', |t| < \sigma'\} = \{(y, f_h(y))\,;\ |y| < \varrho'\}, \ \forall\, h > h', \tag{3.24}$$

e le f_h *sono analitiche in* $\{y\,;\ |y| < \varrho'\}$ *e ogni successione che si ottiene derivando quante volte si vuole la* $\{f_h\}$ *converge alla derivata omonima di* f *uniformemente su* $\{y\,;\ |y| < \varrho'\}$.

4. In questo paragrafo riprendiamo lo studio delle curvature delle ipersuperfici minimali iniziato in [7]. Le ipersuperfici che qui considereremo saranno frontiere di insiemi e quindi non necessariamente cartesiane come in [7].

Se $\Omega \subset R^n$ è aperto ed E è un insieme avente frontiera minimale in Ω, in ogni punto di $\mathcal{F}^*E \cap \Omega$, ovvero in ogni punto regolare di $\mathcal{F}E \cap \Omega$, si possono considerare le curvature dell'ipersuperficie $\mathcal{F}^*E \cap \Omega$. Indicheremo allora con γ_E la misura positiva definita su Ω da

$$(4.1) \qquad \gamma_E(B) = \int_{B \cap \mathcal{F}^*E} c^2 \, dH_{n-1}, \; \forall\, B \subset \Omega \text{ di Borel,}$$

dove c^2 è la somma dei quadrati delle curvature principali di $\mathcal{F}^*E \cap \Omega$.

Vale allora il seguente

LEMMA, 3. *Se $\Omega \subset R^n$ è aperto, se $\{E_h\}$ è una successione di insiemi aventi frontiera minimale in Ω e convergente in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ verso l'insieme E, allora si ha*

$$(4.2) \qquad \lim_{h \to \infty} \int g \, d\gamma_{E_h} = \int g \, d\gamma_E ,$$

per ogni funzione continua g il cui supporto compatto sia contenuto in Ω e non abbia punti in comune colla parte singolare di $\mathcal{F}E$.

DIM. Se $\xi \in \operatorname{supp} g$ allora necessariamente o $\xi \notin \mathcal{F}E$ o ξ è un punto regolare di $\mathcal{F}E$. Nel primo caso può trovarsi un aperto $A_\xi \ni \xi$ e un indice h_ξ tali che

$$(4.3) \qquad \mathcal{F}E_h \cap A_\xi = \emptyset, \; \forall\, h > h_\xi,$$

nel secondo caso può trovarsi un aperto $A_\xi \ni \xi$ e un indice h_ξ tali che, per ogni $h > h_\xi$, $\mathcal{F}E_h \cap A_\xi$ è il grafico di una funzione analitica e la successione di funzioni analitiche che così viene a trovarsi (v. Teorema [5]) converge uniformemente verso una funzione analitica il cui grafico è $\mathcal{F}E \cap A_\xi$ e le successioni derivate convergono uniformemente verso la derivata omonima di tale funzione.

Indichiamo allora con $\{\alpha_i\}$ un numero finito di funzioni continue non negative a supporto compatto e tali che

$$(4.4) \qquad \text{per ogni } i \text{ esiste } \xi_i \text{ tale che } \operatorname{supp} \alpha_i \subset A_{\xi_i},$$

$$(4.5) \qquad \sum_i \alpha_i(x) = 1, \; \forall\, x \in \operatorname{supp} g.$$

Avremo allora

$$(4.6) \qquad g = g \sum_i \alpha_i ,$$

e per ogni i

$$\int \alpha_i g \, d\gamma_E = \lim_{h \to \infty} \int \alpha_i g \, d\gamma_{E_h} . \tag{4.7}$$

Dalle (4.6) e (4.7) segue allora la (4.2)

c.v.d.

Dal Lemma 3 si ricava il seguente

Teorema, 6. *Se $\Omega \subset R^n$ è aperto, se $\{E_h\}$ è una successione di insiemi aventi frontiera minimale in Ω e convergente in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ verso E, allora per ogni aperto $A \subset \Omega$ si ha*

$$\gamma_E(A) \leq \min_{h \to \infty} \lim \gamma_{E_h}(A). \tag{4.8}$$

Dim. Basta osservare che essendo γ_E una misura positiva con supporto contenuto in $\mathcal{F}^* E \cap \Omega$ (qui il supporto va inteso nel senso della teoria della misura, quindi non occorre che sia chiuso) si ha

$$\gamma_E(A) = \sup \left\{ \int g \, d\gamma_E ; \; g \in C_0(A - (\mathcal{F} E - \mathcal{F}^* E)), \, |g| \leq 1 \right\}, \tag{4.9}$$

e applicare il Lemma 3.

c.v.d.

A proposito dell'integrale della somma dei quadrati delle curvature principali in [7] è stato provato che per ogni intero n esiste una costante $k(n)$ tale che, per ogni ipersuperficie $S = \{(x, f(x)) ; x \in \Omega \subset R^n\}$ minimale analitica e per ogni $x_0 \in \Omega$ e $\varrho < d = \mathrm{dist}(x_0, \partial\Omega)$ si ha

$$\int\limits_{S \cap \{(x,y) ; \, |x - x_0|^2 + |y - f(x_0)|^2 < \varrho^2\}} c^2 \, dH_n \leq k(n) \frac{d^2}{(d - \varrho)^2} \varrho^{n-2} . \tag{4.10}$$

Con la stessa dimostrazione si può provare più in generale che

$$\int\limits_{S \cap \{(x,y) ; \, |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \varrho^2\}} c^2 \, dH_n \leq k(n) \frac{d^2}{(d - \varrho)^2} \varrho^{n-2} , \; \forall \, y_0 \in R . \tag{4.11}$$

Mediante il Teorema 6 la validità della (4.11) può essere estesa alle frontiere minimali approssimabili con ipersuperfici cartesiane minimali analitiche. Vale infatti, come conseguenza immediata del Teorema 6 e della (4.11), il seguente

TEOREMA, 7. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto e $\{(x, f_h(x))\,;\, x \in \Omega\}$ sia una successione di ipersuperfici minimali analitiche. Se la successione di insiemi $E_h = \{(x, y)\,;\, x \in \Omega, y < f_h(x)\}$ converge in $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times R)$ verso l'insieme E, allora per ogni $x_0 \in \Omega$, $y_0 \in R$ e $\varrho < d =$* dist $(x_0, \partial\Omega)$ si ha

$$\gamma_E(\{(x, y)\,;\, |x - x_0|^2 + |y - y_0|^2 < \varrho^2\}) \leq k(n) \frac{d^2}{(d - \varrho)^2} \varrho^{n-2} \tag{4.12}$$

dove $k(n)$ è la stessa costante della diseguaglianza (4.11).

c.v.d.

BIBLIOGRAFIA

[1] E. DE GIORGI: *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari.* Mem. Acc. Sc. Torino, 1957.

[2] E. DE GIORGI: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r - 1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.* Ric. Matem. Napoli, 1955.

[3] E. DE GIORGI: *Frontiere orientate di misura minima.* Sem. Mat. Scuola Normale Sup., Pisa, Anno Acc. 1960-61.

[4] C. MIRANDA: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Springer-Verlag, Berlino, 1955.

[5] M. MIRANDA: *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1964.

[6] M. MIRANDA: *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione.* Ann. Scuola Normale Sup. Pisa, 1965.

[7] M. MIRANDA: *Una maggiorazione integrale per le curvature delle ipersuperfici minimali.* Rend. Sem. Mat. Padova, 1967.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 marzo 1967