RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

F. MENEGAZZO

**Ordini ciclici nei gruppi abeliani**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 38 (1967), p. 217-237

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__217_0>

# ORDINI CICLICI NEI GRUPPI ABELIANI

F. MENEGAZZO *)

## Introduzione.

Una relazione ternaria in un gruppo $G$ è un ordine ciclico se il suo grafico $K$ è contenuto nel sottoinsieme $\Gamma$ di $G \times G \times G$ costituito da tutte e sole le terne ordinate $(x, y, z)$ di elementi distinti, e gode delle seguenti proprietà :

C1. Se $(a, b, c) \in \Gamma$, vale una e una sola delle relazioni $(a, b, c) \in K$, $(a, c, b) \in K$.

C2. $(a, b, c) \in K \Longrightarrow (b, c, a) \in K$.

C3. $(a, b, c) \in K \;\&\; (a, c, d) \in K \Longrightarrow (a, b, d) \in K$.

C4. $(a, b, c) \in K \;\&\; x \in G \Longrightarrow (a + x, b + x, c + x) \in K \;\&\; (x + a, x + b, x + c) \in K$ [1]).

Il gruppo $G$ si dice ciclicamente ordinabile (*c. o.*-guppo) se ammette (almeno) un ordine ciclico. È ben noto che ogni gruppo totalmente ordinabile ($O$-gruppo) è anche ciclicamente ordinabile (cfr. [2], dove è esposta una esplicita costruzione di un ordine ciclico a partire da un ordine totale); d'altra parte, il semplice esempio del gruppo moltiplicativo $C$ dei numeri complessi di modulo 1 prova che la proposizione non può essere invertita.

---

*) Indirizzo dell'A. : Seminario Matematico, Università, Padova.

Parte di questo lavoro è contenuta nella tesi di laurea discussa presso l'Università di Padova il 16 novembre 1965.

[1]) La nozione di ordine ciclico è stata introdotta da RIEGER, [3].

In questa nota si porge una caratterizzazione dei gruppi abeliani ciclicamente ordinabili, provando che un gruppo abeliano è ciclicamente ordinabile se e solo se il sottogruppo dei suoi elementi periodici è isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z$ (gruppo additivo dei razionali modulo gli interi). Si risolve inoltre il problema seguente: dato un *c. o.*-gruppo abeliano $G$, costruirne tutti gli ordini ciclici distinti; a tal fine si esaminano le relazioni che intercorrono tra ordini ciclici e ordini totali di un gruppo, e in particolare si caratterizzano gli ordini ciclici che risultano «indotti» da ordini totali. Si cerca poi un criterio che permetta di decidere quando due tali ordini ciclici sono isomorfi, con l'ovvio significato del termine, ma i risultati ottenuti in questa direzione sono validi solamente con una ipotesi restrittiva sul gruppo quoziente $G/T$, dove $T$ è il sottogruppo degli elementi periodici di $G$.

## 1. **Richiami.**

I seguenti esempi [2]) sono particolarmente importanti per il seguito:

*Esempio* 1. $G$ sia un gruppo totalmente ordinato rispetto a $\leq$. Un ordine ciclico $K$ di $G$ può essere definito ponendo $(a, b, c)_K$ se e solo se vale una delle relazioni $a < b < c$, $b < c < a$, $c < a < b$ [3]). Quest'ordine ciclico si dirà, per definizione, l'ordine ciclico indotto dall'ordine totale $\leq$.

*Esempio* 2. Il gruppo moltiplicativo $C$ dei numeri complessi di modulo 1, o un suo sottogruppo, si può ordinare ciclicamente ponendo $(x, y, z)_K$ se i punti rappresentativi sul piano di Gauss si seguono in quest'ordine nel verso antiorario.

*Esempio* 3. Il gruppo totalmente ordinato $F$ possieda un elemento $t > 0$ del centro tale che $\{t\}_\square = F$ (cioè per ogni $f \in F$

---

[2]) Gli esempi, di RIEGER [3], sono riportati in [2], pagg. 62-63; da [2] traiamo anche le notazioni.

[3]) Con il simbolo $(a, b, c)_K$ indicheremo d'ora in poi che $(a, b, c) \in K$.

valga la relazione $nt \leq f < (n+1)\,t$ per $n$ numero intero conveniente): allora si vede facilmente che in ogni classe laterale $a \in F/\{t\}$ esiste un elemento $r_a$ soddisfacente alla condizione $0 \leq r_a < t$ che lo individua univocamente. In queste ipotesi si può definire un ordine ciclico $\bar{K}$ per il gruppo quoziente $G = F/\{t\}$ ponendo $(a, b, c)_{\bar{K}}$ se e solo se $(r_a, r_b, r_c)_K$, ove $K$ è l'ordine ciclico indotto su $F$ dall'ordine totale considerato. In particolare, l'ordine ciclico dell'esempio 2 si ottiene in questo modo, con $F = R$ il gruppo additivo dei numeri reali ordinato al modo solito e $\{t\} = Z$, ricordando che $C \cong R/Z$. Questo sarà chiamato l'ordine ciclico usuale di $C$ o, rispettivamente, di $R/Z$.

Il procedimento dell'esempio 3 è il più generale, a norma del

TEOREMA 1.1. (RIEGER) *Ad ogni gruppo ciclicamente ordinato $G$ si può associare un gruppo totalmente ordinato $\mathcal{R}(G)$ che contiene nel centro un elemento $t$ tale che $G$ e il suo ordine ciclico si ottengono come all'esempio* 3.

Della dimostrazione, che è riportata in [2], diamo solo un accenno: Il sostegno di $\mathcal{R}(G)$ è formato dalle coppie $(m, a)$ con $m \in Z$, $a \in G$; l'operazione è definita nel modo seguente:

$$(m, a) + (n, b) = (m + n + f(a, b), a + b)\,;$$

$$f(a, b) = 0 \quad \text{se} \quad a = 0 \quad \text{oppure} \quad b = 0 \quad \text{oppure} \quad (0, a, a + b)_K\,,$$

$$f(a, b) = 1 \quad \text{se} \quad a = -b \neq 0 \quad \text{oppure} \quad (0, a + b, a)_K\,;$$

l'ordine totale si introduce definendo $(m, a) > 0$ se $m \geq 0$. Allora $t = (1, 0)$ soddisfa le proprietà richieste; nel seguito indicheremo questo elemento con 1 e identificheremo il gruppo ciclico $\{t\}$ con $Z$.

PROPOSIZIONE 1.2. *Se il c.o.-gruppo $G$ è abeliano, $\mathcal{R}(G)$ è abeliano.*

È sufficiente dimostrare che $f(a,b) = f(b,a)$. Supponiamo $f(a,b) = 0$: se $a = 0$ oppure $b = 0$ $f(b, a) = 0$; resta che sia $(0, a, a + b)_K$. Distinguiamo due casi:

i) $(0, a, b)_K$. Se $2b = 0$ aggiungo $b$: $(b, a + b, 0)_K$ e $f(b, a) = 0$; se $(0, b, 2b)_K$, poichè da $(0, a, b)_K$ si ottiene $(b, a + b, 2b)_K$, componendo $(b, 2b, 0)_K$ con $(b, a + b, 2b)_K$ risulta $(b, a + b, 0)_K$ e $f(b, a) = 0$; se $(0, 2b, b)_K$ anche $(a, a + 2b, a + b)_K$; componendo con $(b, a + b, a + 2b)_K$

ottenuto da $(0, a, a+b)_K$ sommando $b$, risulta $(a+b, a, b)_K$; si compone ancora con $(0, a, a+b)_K$ e si ottiene finalmente $(a+b, 0, b)_K$ e $f(b, a) = 0$.

ii) $(0, b, a)_K$. Componendo $(0, a, a+b)_K$ e $(0, b, a)_K$ risulta $(0, b, a+b)_K$ e $f(b, a) = 0$.

Sia ora $f(b, a) = 0$; il semplice scambio di $a$ con $b$ nella dimostrazione che precede permette di provare $f(a, b) = 0$ e quindi di concludere.

## 2. Gruppi abeliani ciclicamente ordinabili.

La struttura dei *c. o.*-gruppi non è ben conosciuta; lo stato attuale delle conoscenze è raccolto nei due enunciati che seguono.

LEMMA 2.1. (RIEGER) *Gli elementi periodici di ogni c. o.-gruppo $G$ formano un sottogruppo $T$ contenuto nel centro e isomorfo, anche rispetto all'ordine, ad un sottogruppo di $Q/Z$ con l'ordine ciclico usuale.*

La dimostrazione si trova in [2], pag. 63; occorre solamente ricordare che, se $C$ è il gruppo (moltiplicativo) dei numeri complessi di modulo 1, si ha $C \cong R/Z$, e che il sottogruppo di torsione di $R/Z$ è appunto $Q/Z$.

TEOREMA 2.2. (ŚWIERCZKÓWSKI) *Il gruppo $G$ è ciclicamente ordinabile se e solo se esiste un O-gruppo $H$ tale che $G$ sia isomorfo ad un sottogruppo di $H \oplus R/Z$.*

La dimostrazione, piuttosto laboriosa, è in [4].

Diamo ora l'annunciata caratterizzazione dei *c. o.*-gruppi abeliani.

TEOREMA 2.3. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè un gruppo abeliano sia ciclicamente ordinabile è che il sottogruppo dei suoi elementi periodici sia isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z$.*

La condizione è necessaria in base al lemma 2.1. Per la sufficienza, usiamo la costruzione seguente, introdotta in [4], di un ordine ciclico $K$ del gruppo $A \oplus B$, dove $A$ è un gruppo ciclicamente ordinato e $B$ un gruppo totalmente ordinato:

$$((a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3))_K \text{ se } \begin{cases} a_1 \neq a_2 \neq a_3 \neq a_1 & \text{e} \quad (a_1, a_2, a_3)_{K(A)} \\ a_1 = a_2 \neq a_3 & \text{e} \quad b_1 < b_2 \\ a_1 \neq a_2 = a_3 & \text{e} \quad b_2 < b_3 \\ a_2 \neq a_3 = a_1 & \text{e} \quad b_3 < b_1 \\ a_1 = a_2 = a_3 & \text{e} \quad (b_1, b_2, b_3)_{K(B)} \end{cases}$$

se $a_i \in A$, $b_i \in B$ $(i = 1, 2, 3)$, $K(A)$ è l'ordine ciclico di $A$ e $K(B)$ è l'ordine ciclico indotto su $B$ dall'ordine totale considerato (si osservi che la restrizione di $K$ ad $A$ (risp. $B$) è proprio $K(A)$ $(K(B))$). Se allora $T$ è il sottogruppo di torsione di $G$, la costruzione ora ricordata permette di ordinare ciclicamente $Q/Z \oplus G/T$; e la dimostrazione è conclusa dal

LEMMA 2.4. *Se il sottogruppo di torsione $T$ di un gruppo abeliano $G$ è isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z$, $G$ è isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z \oplus G/T$.*

Poichè $Q/Z$ è divisibile, l'iniezione $j: T \to Q/Z$ che esiste per ipotesi si può estendere almeno in un modo ad un omomorfismo $f: G \to Q/Z$ per il quale $f(t) = j(t)$ per ogni $t \in T$. Se $\pi: G \to G/T$ è la proiezione canonica, la mappa $h: G \to Q/Z \oplus G/T$ definita da $h(g) = (f(g), \pi(g))$ è un omomorfismo che risulta iniettivo: da $h(g) = 0$ segue $\pi(g) = 0$ e $g \in T$; ma allora $j(g) = f(g) = 0$ e $g = 0$ perchè $j$ è un'iniezione. In particolare, l'immagine $\overline{G} = h(G)$ è formata da tutti e soli gli elementi di $Q/Z \oplus G/T$ del tipo $(f(g), \pi(g))$.

Applichiamo il teorema ora dimostrato, con la specificazione contenuta nel lemma 2.1, ai gruppi di torsione.

COROLLARIO 2.5. *I gruppi periodici ciclicamente ordinabili sono, a meno di isomorfismi, tutti* [4]) *e soli i sottogruppi di $Q/Z$; ogni tale*

---

[4]) Beninteso, purchè vi siano almeno tre elementi.

*sottogruppo possiede tanti ordini ciclici distinti quanti sono i suoi automorfismi; ogni due ordini ciclici sono isomorfi* [5]).

Fortunatamente, il gruppo degli automorfismi di un qualunque sottogruppo di $Q/Z$ può essere costruito facilmente. Infatti, il gruppo degli automorfismi di un gruppo abeliano periodico è il prodotto diretto completo dei gruppi degli automorfismi delle sue componenti primarie, e nel nostro caso queste sono gruppi ciclici (d'ordine $p^\alpha$) o quasi-ciclici; inoltre il gruppo degli automorfismi di un gruppo ciclico finito d'ordine $m$ è il gruppo moltiplicativo degli elementi invertibili di $Z/mZ$, mentre il gruppo degli automorfismi di $\mathcal{C}(p^\infty)$ è il gruppo delle unità dell'anello $\widehat{Z}_p$ degli interi $p$-adici [6]). In definitiva, se il gruppo $T \subseteq Q/Z$ è ciclico d'ordine $m$, l'insieme $\mathcal{C}(T)$ dei suoi ordini ciclici ha ordine $\varphi(m)$, dove $\varphi$ è la funzione di Eulero; se le componenti primarie di $T$ sono tutte gruppi ciclici, ma non in numero finito, oppure se almeno una delle componenti primarie è un gruppo quasi-ciclico, $\mathcal{C}(T)$ ha la potenza del continuo. Questi due casi esauriscono tutte le possibilità.

## 3. Ordini ciclici e ordini totali.

Se $G$ è un $O$-gruppo la definizione di ordine ciclico indotto da un ordine totale porge una corrispondenza tra l'insieme degli ordini totali di $G$ e l'insieme dei suoi ordini ciclici. Analogamente, se $G$ è abeliano e il sottogruppo di torsione $T$ è isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z$, possiamo considerare la corrispondenza tra l'insieme degli ordini totali di $G/T$ e l'insieme degli ordini ciclici di $G$ definita dalla costruzione usata nel teorema 2.3; tale corrispondenza, se il gruppo abeliano $G$ è libero da torsione, coincide con la precedente.

PROPOSIZIONE 3.1. *Due ordini totali distinti di un gruppo $G$ inducono ordini ciclici distinti.*

---

[5]) Due ordini ciclici $K$, $K'$ di un gruppo $G$ si dicono isomorfi se esiste un automorfismo $\tau$ di $G$ tale che $(a, b, c)_K$ se e solo se $(\tau(a), \tau(b), \tau(c))_K$ .

[6]) Cfr. per esempio [1], pagg. 221, 222.

Siano $\leq_\alpha$, $\leq_\beta$ i due ordini totali e $K_\alpha$, $K_\beta$ gli ordini ciclici indotti; esiste allora un elemento non nullo $x \in G$ tale che $x >_\alpha 0$, $x <_\beta 0$. Se $P_\alpha$, $P_\beta$ sono i semigruppi degli elementi positivi rispettivamente per $\leq_\alpha$, $\leq_\beta$ si possono presentare due casi:

i) $P_\alpha \cap P_\beta \neq 0$. Consideriamo un elemento non nullo $a \in P_\alpha \cap P_\beta$: se $0 <_\alpha x <_\alpha a$, poichè è certamente $x <_\beta 0 <_\beta a$, per definizione $(0, x, a)_{K_\alpha}$ e $(0, a, x)_{K_\beta}$; se invece $0 <_\alpha a <_\alpha x$ e $a + x >_\beta 0$, da $0 <_\alpha a <_\alpha a + x$ e $0 <_\beta a + x <_\beta a$ segue $(0, a, a + x)_{K_\alpha}$ e $(0, a + + x, a)_{K_\beta}$; resta che $0 <_\alpha a <_\alpha x$ e $a + x <_\beta 0$: ma allora $x <_\beta a <_\beta -x$ e $-x <_\alpha a <_\alpha x$, quindi $(x, a, -x)_{K_\beta}$ e $(x, -x, a)_{K_\alpha}$.

ii) $P_\alpha \cap P_\beta = 0$, cioè $\leq_\beta$ è il duale di $\leq_\alpha$; se $a <_\alpha b <_\alpha c$ risulta $c <_\beta b <_\beta a$, quindi $(a, b, c)_{K_\alpha}$ e $(a, c, b)_{K_\beta}$.

Il risultato seguente fornisce una limitazione (inferiore) per l'insieme degli ordini ciclici di un gruppo abeliano.

Teorema 3.2. *Se $G$ è un c.o.-gruppo abeliano con sottogruppo di torsione $T$ esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli ordini totali di $G/T$ e un sottoinsieme dell'insieme degli ordini ciclici di $G$.*

Faremo vedere che ordini totali distinti di $G/T$ determinano ordini ciclici distinti di $G$ mediante la costruzione del teorema 2.3. Se $T = 0$ il teorema è vero per la proposizione precedente; supponiamo ora $T \neq 0$. Per il lemma 2.4 $G$ è isomorfo al gruppo $\bar{G} \subseteq Q/Z \oplus G/T$ costituito da tutti gli elementi del tipo $(f(g), \pi(g))$ al variare di $g$ in $G$, dove $\pi : G \to G/T$ è la proiezione canonica e $f$ è una determinata estensione dell'iniezione $j : T \to Q/Z$ che esiste per l'ipotesi. Se $\leq_\alpha$, $\leq_\beta$ sono due ordini totali distinti di $G/T$, ad essi corrispondono due ordini ciclici $K_\alpha$, $K_\beta$ di $Q/Z \oplus G/T$; scegliamo $g_1, g_2 \notin T$ tali che $\pi(g_1) <_\alpha \pi(g_2)$, $\pi(g_1) >_\beta \pi(g_2)$. Se ora $n = n_1 n_2$ è il prodotto dei periodi di $f(g_1), f(g_2)$ in $Q/Z$, $f(ng_1) = f(ng_2) = 0$; inoltre $\pi(ng_1) <_\alpha \pi(ng_2)$ e $\pi(ng_1) >_\beta \pi(ng_2)$ e gli elementi $(0, \pi(ng_1))$, $(0, \pi(ng_2))$ di $Q/Z \oplus G/T$ appartengono a $\bar{G}$. Prendiamo ora $t \neq 0$, $t \in T$: risulta $f(t) = j(t) \neq 0$, $\pi(t) = 0$ e quindi $((j(t), 0), (0, \pi(ng_1)), (0, \pi(ng_2)))_{K_\alpha}$ e $((j(t), 0), (0, \pi(ng_2)), (0, \pi(ng_1)))_{K_\beta}$ con $(j(t), 0)$, $(0, \pi(ng_1))$, $(0, \pi(ng_2))$ appartenenti a $\bar{G}$, c.v.d.

Non tutti gli ordini ciclici si possono però costruire in questo modo, nemmeno nei gruppi liberi da torsione; semplici controesempi si deducono dalla successiva proposizione 3.5. Introduciamo ora la seguente

DEFINIZIONE [7]: Un ordine ciclico $K$ di un gruppo $G$ si dice archimedeo se non esistono due elementi $x, a$ di $G$ tali che valga $(0, nx, a)_K$ per ogni numero naturale $n$. Un gruppo ciclicamente ordinato si dirà archimedeo se tale è il suo ordine ciclico.

Gli ordini ciclici archimedei sono caratterizzati dalla condizione seguente:

TEOREMA 3.3. *Un gruppo ciclicamente ordinato $G$ è archimedeo se e solo se è isomorfo, anche rispetto all'ordine, a un sottogruppo di $R/Z$ dotato dell'ordine ciclico usuale.*

Per la dimostrazione vedi [4].

COROLLARIO 3.4. *Un c.o.-gruppo abeliano possiede ordini ciclici archimedei se e solo se il suo rango $n$ è minore o uguale alla potenza del continuo.*

Se $n$ supera la potenza del continuo, che è esattamente il rango di $R/Z$, non può evidentemente esistere alcuna iniezione $G \longrightarrow R/Z$. Sia ora $n$ minore o uguale alla potenza del continuo: se $T$ è il sottogruppo di torsione di $G$, $G/T$ è isomorfo ad un sottogruppo di $R$, e $G$ è per il lemma 2.4 isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z \oplus \oplus R \cong R/Z$, c.v.d.

PROPOSIZIONE 3.5. *Gli ordini ciclici indotti da ordini totali non sono archimedei.*

Siano $a < b < 0$; allora per ogni numero naturale $n$ vale $na \leq a < b < 0$ e, se $K$ è l'ordine ciclico indotto, per definizione si ha $(0, na, b)_K$.

Sia ora $G$ un gruppo ciclicamente ordinato; con $\mathcal{R}(G)$ indichiamo il gruppo totalmente ordinato associato a $G$ dal teorema 1.1, e con $p : \mathcal{R}(G) \longrightarrow G$ la mappa $(n, g) \longrightarrow g$. Se $L$ è un sottogruppo di $\mathcal{R}(G)$ tale che $L \cap Z = 0$, risulta $p(L) \cong Z \cup L/Z \cong L$. In $p(L)$ gli iso-

---

[7]) vedi [4]

morfismi considerati definiscono due ordini ciclici, e cioè la restrizione dell'ordine ciclico $K$ di $G$, e l'ordine ciclico $K'$ indotto dall'ordine totale di $L$ in quanto sottogruppo di $\mathcal{R}(G)$.

LEMMA 3.6. *Se $L$ è un sottogruppo convesso di $\mathcal{R}(G)$ tale che $L \cap Z = 0$ i due ordini ciclici di $p(L)$ sopra definiti coincidono.*

Poichè $L$ è convesso e $L \cap Z = 0$ per ogni $l \in L$ dev'essere $-1 < l \leq 0$ oppure $0 \leq l < 1$. Se $l_1, l_2 \in L$, $l_1, l_2 > 0$, $(0, p(l_1), p(l_2))_K$ è equivalente a $(0, l_1, l_2)_{K'}$. Se $l_1 > 0$, $l_2 < 0$, in $\mathcal{R}(G)$ è $(0, l_1, l_2)_{K'}$; poichè $l_1 - l_2 \in L$, $l_1 - l_2 < 1$ e quindi $0 < l_1 < l_2 + 1 < 1$; allora in $\mathcal{R}(G)$ $(0, l_1, l_2 + 1)_{K'}$ e, per definizione, $(0, p(l_1), p(l_2))_K$ in $G$. Se infine $l_1 < 0$, $l_2 < 0$, $(0, p(l_1), p(l_2))_K$ è equivalente a $(0, l_1 + 1, l_2 + 1)_{K'}$ in $\mathcal{R}(G)$ cioè a $l_1 + 1 < l_2 + 1$, e quindi a $l_1 < l_2$ e a $(0, l_1, l_2)_{K'}$: in ogni caso dunque $(0, l_1, l_2)_{K'}$ implica $(0, p(l_1), p(l_2))_K$ e viceversa.

L'insieme $\{L_\alpha\}_{\alpha \in A}$ dei sottogruppi convessi in $\mathcal{R}(G)$ che non contengono 1 è ordinato per inclusione in una catena, e $H = \bigcup_{\alpha \in A} L_\alpha$ è individuato univocamente dalla condizione di essere massimale rispetto alla proprietà di non contenere 1; inoltre, poichè $Z_{\square} = \mathcal{R}(G)$ [8] e $H \neq \mathcal{R}(G)$, $H \cap Z = 0$.

LEMMA 3.7. *Se $H$ è il sottogruppo convesso massimale di $\mathcal{R}(G)$ che non contiene $1$, $p(H)$ è il massimo sottogruppo di $G$ il cui ordine ciclico sia indotto da un ordine totale.*

L'ordine ciclico di $p(H)$ è indotto da un ordine totale per il lemma 3.6. Sia ora $g \in G$, non nullo e appartenente ad un sottogruppo il cui ordine ciclico è indotto da un ordine totale; se $K$ è l'ordine ciclico di $G$ è allora immediato che, scambiando eventualmente $g$ con $-g$, risulta $(0, g, 2g, \ldots, ng, \ldots)_K$ [9]. Scegliamo $f \in \mathcal{R}(G)$ tale che $0 < f < 1$, $p(f) = g$, cioè $f = r_g$. $f$ appartiene ad $H$: basterà mostrare che $0 < nf < 1$ per ogni numero naturale $n$, perchè

---

[8]) Se $A$ è un sottoinsieme del gruppo totalmente ordinato $B$, con $A_{\square}$ indico l'intersezione dei sottogruppi convessi di $B$ che contengono $A$ (vedi [2]).

[9]) Con la scrittura $(a_1, a_2, \ldots, a_n)_K$ si esprime il fatto che $(a_i, a_j, a_k)_K$ per ogni terna di indici $i, j, k$ tali che $i < j < k$.

allora $1 \notin \{f\}_\square$ e $\{f\}_\square \subseteq H$. Se $n = 2$, sia $2f > 1$; allora $1 < 2f < 2$ e $r_{2g} = 2f - 1 < f$, quindi $(0, r_{2g}, f)_{K'}$ nell'ordine ciclico $K'$ indotto dall'ordine totale di $\mathcal{R}(G)$, e di conseguenza $(0, 2g, g)_K$ contro la scelta di $g$. Supponiamo ora $(n-1)f < 1$; allora se $nf > 1$, $1 < nf < 2$, $r_{ng} = nf - 1 < (n-1)f$ e, come sopra, $(0, ng, (n-1)g)_K$ contro la scelta di $g$. Dunque $g \in p(H)$, c.v.d.

COROLLARIO 3.8. *Un gruppo ciclicamente ordinato $G$ è archimedeo se e solo se l'ordine totale di $\mathcal{R}(G)$ è archimedeo.*

La dimostrazione è immediata.

Degli ordini ciclici di $G$ indotti da ordini totali si può dare una caratterizzazione mediante il corrispondente gruppo $\mathcal{R}(G)$:

TEOREMA 3.9. *$G$ sia un gruppo libero da torsione ciclicamente ordinato. Il suo ordine ciclico è indotto da un ordine totale se e solo se $\mathcal{R}(G) = Z \oplus N$, dove $N$ è isomorfo a $G$ e convesso in $\mathcal{R}(G)$.*

L'ordine ciclico di $G$ sia indotto da un ordine totale; se $F = \mathcal{R}(G)$ e $H$ è il sottogruppo convesso massimale non contenente 1, risulta $H \cap Z = 0$, $\dfrac{Z \cup H}{Z} \cong p(H) \cong H$ e $p(H) = G$ per il lemma 3.7. Sia $f$ un arbitrario elemento di $F$; per $h \in H$ conveniente $p(f) = g = p(h)$, quindi $h - f = z \in Z$ e $F = Z + H$; poichè $Z$ sta nel centro di $F$ si può allora scrivere $F = Z \oplus H$, con $H \cong G$ e convesso. Inoltre l'ordine totale di $H$ è esattamente quell'ordine totale che induce l'ordine ciclico di $G$. Supponiamo ora $\mathcal{R}(G) = Z \oplus N$, $N \cong G$ e convesso; se $H$ è, al solito, il sottogruppo convesso massimale di $\mathcal{R}(G)$ non contenente 1 risulta senz'altro $N \subseteq H$. Sia invece $h \in H$ arbitrario; poichè $\mathcal{R}(G) = Z \oplus N$ $h = z + n$; ma $h - n \in Z \cap H$ e $h = n \in N$, cioè $H = N$. Inoltre $p(N) = G$ e basta applicare il lemma 3.7 per concludere che l'ordine ciclico di $G$ è indotto dall'ordine totale di $N$ in quanto sottogruppo di $\mathcal{R}(G)$.

## 4. Ordini ciclici nei gruppi abeliani liberi da torsione.

Se il gruppo abeliano $G$ è libero da torsione e $G^*$ è il gruppo divisibile minimale, individuato a meno di isomorfismi, che contiene

$G$, è ben noto[10]) che ogni ordine totale di $G$ si può estendere ad un ordine totale di $G^*$, e che la corrispondenza così ottenuta è biunivoca, di modo che gli insiemi degli ordini totali di due gruppi abeliani dello stesso rango sono in corrispondenza biunivoca. Alla stessa conclusione si perviene per gli insiemi degli ordini ciclici dei gruppi abeliani liberi da torsione.

Lemma 4.1. *Se $G$, $G'$ sono gruppi ciclicamente ordinati, $G \subseteq G'$ e l'ordine ciclico di $G$ è la restrizione dell'ordine ciclico di $G'$, allora $\mathcal{R}(G) \subseteq \mathcal{R}(G')$ e l'ordine totale di $\mathcal{R}(G)$ è la restrizione dell'ordine totale di $\mathcal{R}(G')$.*

La dimostrazione, del tutto ovvia, è omessa.

Teorema 4.2.[11]) *Esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme degli ordini ciclici di un gruppo abeliano $G$ libero da torsione di rango $n$ e l'insieme degli ordini ciclici di un sottogruppo libero $H$ di $G$, comunque prefissato, di rango $n$.*

Sia $H = Za_1 \oplus Za_2 \oplus \dots \oplus Za_n$ un sottogruppo libero di rango $n$; $a_1, a_2, \dots, a_n$ è allora un sistema massimale di elementi di $G$ linearmente indipendenti; il gruppo $G^* = Qa_1 \oplus Qa_2 \oplus \dots \oplus Qa_n$ è divisibile ed è minimale tra i gruppi divisibili contenenti $G$. $H$ sia ciclicamente ordinato; se $\mathcal{R}(H)$ è il gruppo totalmente ordinato associato ad $H$ dal teorema 1.1, $\mathcal{R}(H)$ è abeliano e l'omomorfismo suriettivo $p : \mathcal{R}(H) \longrightarrow H$ definito da $p((m, h)) = h$ ha nucleo $\{(1, 0)\}$ e cioè, con le nostre convenzioni, $Z$; poichè $H$ è libero $\mathcal{R}(H)$ è un gruppo abeliano libero di rango $n+1$, e una base è data da $1, (0, a_1), \dots, (0, a_n)$. Con queste notazioni $p(m + m_1(0, a_1) + \dots + m_n(0, a_n)) = m_1a_1 + m_2a_2 + \dots + m_na_n$.

Consideriamo ora il gruppo $F = Z \oplus Q(0, a_1) \oplus \dots \oplus Q(0, a_n)$; $F$ contiene $\mathcal{R}(H)$ e l'ordine totale di $\mathcal{R}(H)$ si estende ad $F$ in modo unico; la mappa $p' : F \longrightarrow G^*$ definita da $p'(m + q_1(0, a_1) + \dots +$

[10]) vedi per esempio [5], pag. 476.

[11]) Nella dimostrazione che segue e nelle successive per comodità di esposizione si è supposto $n$ finito, ma per ottenere dimostrazioni del tutto generali sarebbero sufficienti modifiche di scrittura: i risultati valgono quindi per $n$ qualunque, finito o infinito.

$+ q_n(0, a_n)) = q_1 a_1 + q_2 a_2 + \dots + q_n a_n$ con $q_i \in Q$, è una suriezione con nucleo $Z$ e subordina $p : \mathcal{R}(H) \to H$; inoltre in $F$ $1 > 0$, $Z_\square = F$. Dunque mediante $p'$ si deduce un ordine ciclico di $G^*$ e quindi di $G$ che subordina su $H$ l'ordine ciclico di partenza. Viceversa, consideriamo due ordini ciclici $K, K'$ di $G$ tali che quelli subordinati su $H$ coincidano: in queste ipotesi $K$ e $K'$ coincidono su tutto $G$. Siano infatti $L, L'$ i gruppi associati rispettivamente a $K, K'$ dal teorema 1.1; per il lemma 4.1 e la prima parte di questa dimostrazione, se $D$ indica il gruppo $Q \oplus Q(0, a_1) \oplus \dots \oplus Q(0, a_n)$, valgono le inclusioni $\mathcal{R}(H) \subseteq L \subseteq D$, $\mathcal{R}(H) \subseteq L' \subseteq D$. L'ordine totale di $D$ è individuato dalla condizione di estendere l'ordine totale di $\mathcal{R}(H)$. Gli omomorfismi suriettivi $\pi : L \to G$, $\pi' : L' \to G$ sono caratterizzati dalle proprietà seguenti: 1) il nucleo è $Z$; 2) il corrispondente di $(0, a_i)$ è $a_i$ per $i = 1, 2, \dots, n$. L'omomorfismo $\eta$ definito su $D$ in questo modo: $\eta : D \to D/Z = Q/Z \oplus Q(0, a_1) \oplus \dots \oplus Q(0, a_n) \to Q/Z \oplus G$, dove la prima mappa è la proiezione canonica e la seconda è l'isomorfismo che subordina l'identità su $Q/Z$ e manda $(0, a_i)$ in $a_1$ per $i = 1, 2, \dots, n$, soddisfa le proprietà 1) e 2); $\eta$ subordina quindi $\pi, \pi'$ rispettivamente su $L, L'$. Per ogni $l \in L$ risulta pertanto $\pi(l) = \pi'(l')$ per un conveniente $l' \in L'$; ma allora $l - l' \in Z$, $L \subseteq L' + Z$ e poichè $Z \subseteq L'$ si ha $L \subseteq L'$; analogamente $L' \subseteq L$ e dunque $L = L'$ e $K = K'$.

Sia allora $G$ un gruppo abeliano libero di rango $n : a_1, \dots, a_n$ sia una base di $G$. Qualunque sia l'ordine ciclico di $G$, $\mathcal{R}(G)$ è un gruppo libero di rango $n + 1$; sfruttando ovvi isomorfismi si può quindi ritenere che ogni ordine ciclico di $G$ sia dedotto da un ordine totale di $Z \oplus G = F$; inoltre, dovendo essere $Z_\square = F$, possono essere presi in considerazione solamente gli ordini totali associati ad una base $1, a_1, \dots, a_n$ di $F$ con primo elemento 1, e poichè l'ordine totale subordinato da $F$ su $Z$ deve essere quello usuale, segue che sono possibili per $F$ tutti e soli gli ordini totali il cui tipo d'ordine è tra i seguenti:

1) $\{(1), (\pm 1), \dots, (\pm 1)\}$

2) $\{(1), (\pm 1, \dots, \alpha^2_{n_2}), \dots, (\pm 1, \dots, \alpha^i_{n_i})\}$

3) $\{(1, \dots, \alpha^1_{n_1}), (\pm 1, \dots, \alpha^2_{n_2}), \dots, (\pm 1, \dots, \alpha^i_{n_i})\}$ con $n_1 > 1$

4) $\{(1, \alpha_1 \dots, \alpha_n)\}$

in corrispondenza ad una base $a_1, \dots, a_n$ di $G$, secondo la classificazione degli ordini totali dei gruppi abeliani contenuta in [5].

LEMMA 4.3. *Gli ordini ciclici di $G$ dedotti dai tipi d'ordine dei numeri* 1) *e* 2) *sono tutti e soli gli ordini ciclici indotti dagli ordini totali di $G$; da tipi d'ordine distinti si deducono ordini ciclici distinti.*

Ricordando il significato dei tipi d'ordine, basta usare il teorema 3.9 e, per la seconda parte dell'enunciato, la proposizione 3.1.

Gli ordini ciclici dedotti dai tipi d'ordine del numero 4) sono tutti e soli gli ordini archimedei di $G$, a norma del corollario 3.8; ma in questo caso a tipi d'ordine distinti possono non corrispondere ordini ciclici distinti di $G$.

LEMMA 4.4. *Due ordini ciclici $K_\alpha$, $K_\beta$ di $G$ dedotti rispettivamente dagli ordini totali di $F$ con tipo d'ordine rispettivamente $\{(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\}$ e $\{(1, \beta_1, \dots, \beta_n)$ coincidono se e solo se per ogni indice $i$ $\alpha_i - \beta_i$ è un numero intero.*

Osservato che un ordine ciclico $K$ di un gruppo $G$ è conosciuto non appena siano note tutte le terne del tipo $(0, g, g')_K$, come appare dall'esame dei casi possibili, dimostriamo dapprima che se risulta $\beta_1 - \alpha_1 = k \in Z$ e $\beta_i = \alpha_i$ per $i \neq 1$, allora $K_\alpha = K_\beta$. Infatti, se $g = \sum_1^n {}_i m_i a_i$, $g' = \sum_1^n {}_i m'_i a_i$ è $(0, g, g')_{K_\alpha}$ se e solo se $r_g^\alpha <_\alpha r_{g'}^\alpha$, dove $r_g^\alpha \in g + Z$ e $0 \leq r_g^\alpha < 1$, cioè $r_g^\alpha = m_\alpha + \sum_1^n {}_i m_i a_i$ con $m_\alpha$ numero intero individuato univocamente dalla diseguaglianza

$$0 \leq m_\alpha + \sum_1^n {}_i m_i \alpha_i < 1 ; \tag{1}$$

analogamente $r_{g'}^\alpha = m'_\alpha + \sum_1^n {}_i m'_i a_i$ con

$$0 \leq m'_\alpha + \sum_1^n {}_i m'_i \alpha_i < 1 ; \tag{2}$$

ancora $r_g^\beta = m_\beta + \sum_1^n {}_i m_i a_i$ con

$$0 \leq m_\beta + \sum_1^n {}_i m_i \beta_i < 1 \tag{3}$$

e infine $r^{\beta}_{g'} = m'_{\beta} + \sum_1^n{}_i\, m'_i\, a_i$ con

$$0 \leq m'_{\beta} + \sum_1^n{}_i\, m'_i\, \beta_i < 1. \tag{4}$$

Sarà allora $K_{\alpha} = K_{\beta}$ se e solo se $(0, g, g')_{K_{\alpha}}$ ogni volta che $(0, g, g')_{K_{\beta}}$ e cioè se e solo se $m_{\alpha} + \sum_1^n{}_i\, m_i\, \alpha_i < m'_{\alpha} + \sum_1^n{}_i\, m'_i\, \alpha_i$ ogni volta che $m_{\beta} + \sum_1^n{}_i\, m_i\, \beta_i < m'_{\beta} + \sum_1^n{}_i\, m'_i\, \beta_i$ e viceversa. Ora, se $\alpha_1 = \beta_1 - k$, $\alpha_i = \beta_i$ per $i \neq 1$, la (1) si scrive $0 \leq m_{\alpha} - km_1 + \sum_1^n{}_i\, m_i\, \beta_i < 1$ e quindi, per confronto con la (3), $m_{\beta} = m_{\alpha} - km_1$; ma allora si ottiene immediatamente $m_{\beta} + \sum_1^n{}_i\, m_i\, \beta_i = m_{\alpha} + \sum_1^n{}_i\, m_i\, \alpha_i$; poichè da (2) e (4) procedendo allo stesso modo si perviene a $m'_{\beta} + \sum_1^n{}_i\, m'_i\, \beta_i = m'_{\alpha} + \sum_1^n{}_i\, m'_i\, \alpha_i$, in questo caso è veramente $K_{\alpha} = K_{\beta}$. Applicando più volte questo risultato si conclude che se per ogni indice $i$ $\alpha_i - \beta_i$ è un numero intero $K_{\alpha}$, $K_{\beta}$ coincidono. Viceversa, consideriamo due diversi tipi d'ordine $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ e $(1, \beta_1, \dots, \beta_n)$ tali che per almeno un indice $j$ sia $\alpha_j - \beta_j \notin Z$; e siano $K_{\alpha}$, $K_{\beta}$ i corrispondenti ordini ciclici; per la proprietà appena dimostrata, si può supporre $0 < \alpha_i$, $\beta_i < 1$ per $i = 1, 2, \dots, n$; e sia $\alpha_i = \min(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Se per $j$ conveniente risulta $\beta_i > \beta_j$ ponendo $g = a_i$, $g' = a_j$ risulta $m_{\alpha} = m'_{\alpha} = m_{\beta} = m'_{\beta} = 0$, e inoltre $\alpha_i < \alpha_j$ implica $(0, g, g')_{K_{\alpha}}$ mentre $\beta_i > \beta_j$ implica $(0, g', g)_{K_{\beta}}$: $K_{\alpha}$ non coincide con $K_{\beta}$. Se invece $\beta_i = \min(\beta_1, \dots, \beta_n)$ e $\alpha_i = \beta_i$ si considerano $\min(\alpha_j)_{j \neq i}$ e $\min(\beta_j)_{j \neq i}$ e si ripetono le considerazioni precedenti. Poichè $(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (1, \beta_1, \dots, \beta_n)$ o esistono $r, s$ tali che $\alpha_r < \alpha_s$, $\beta_r > \beta_s$ e $K_{\alpha} \neq K_{\beta}$ come mostrato sopra, oppure per un certo indice $j$ $\alpha_j = \min(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k})$, $\beta_j = \min(\beta_{i_1}, \dots, \beta_{i_k})$ e $\alpha_j \neq \beta_j$; in questo caso non è restrittivo supporre $j = 1$ e $\alpha_1 < \beta_1$. Sia ora $q$ il minimo intero positivo per cui esiste un intero $p$ tale che $q\alpha_1 < p < q\beta_1$. Supponiamo $q\alpha_1 < p - 1$: allora $(q-1)\alpha_1 < q\alpha_1 < p - 1$ e $(q-1)\beta_1 = q\beta_1 - \beta_1 > q\beta_1 - 1 > p - 1$, e $(q-1)\alpha_1 < p - 1 < (q-1)\beta_1$ contro l'ipotesi fatta su $q$; con questo ragionamento, ed un altro perfettamente analogo, si vede che valgono le diseguaglianze $p-1<q\alpha_1<p<q\beta_1<p+1$. Se poniamo ora $g=a_1$, $g'=qa_1$, risulta $m_\alpha=m_\beta=0$, $m'_\alpha=1-p$, $m'_\beta=-p$; risulta inoltre $\alpha_1<$ $<1-p+q\alpha_1$ e cioè $(0,g,g')_{K_\alpha}$ e $\beta_1>-p+q\beta_1$, cioè $(0,g',g)_{K_\beta}$. Ma allora $K_\alpha\neq K_\beta$, come volevasi.

Se $n=1$ i casi trattati finora esauriscono tutte le possibilità; se $n\geq 2$ restano invece da esaminare gli ordini ciclici dedotti dagli ordini totali di $F$ il cui tipo d'ordine è nella classe 3), per i quali si prova con ragionamenti del tutto simili ai precedenti il seguente

LEMMA 4.4. *Siano $\alpha$ e $\beta$ due tipi d'ordine di $F$, $\alpha=\{(1,\dots,\alpha^1_{n_1}),(\pm1,\dots,\alpha^2_{n_2}),\dots,(\pm1,\dots,\alpha^i_{n_i})\}$, $\beta=\{(1,\dots,\alpha^1_{n_1}),(\pm1,\dots,\alpha^2_{n_2}),\dots$ $\dots,(\pm1,\dots,\alpha^i_{n_i})\}$, e siano $K_\alpha$ e $K_\beta$ gli ordini ciclici di $G$ dedotti rispettivamente da $\alpha,\beta$. Allora $K_\alpha=K_\beta$ se e solo se $\alpha^r_1=\beta^r_1$* [12] *per $r=1,\dots,i$, e $\alpha^r_j-\beta^r_j$ è un numero intero per ogni coppia $r,j$ di indici con $j\neq1$.*

Riunendo ora i risultati ottenuti siamo in grado di classificare tutti gli ordini ciclici di un gruppo abeliano libero; in virtù poi del teorema 4.2 la stessa classificazione vale per i gruppi abeliani liberi da torsione qualunque.

TEOREMA 4.5. *Sia $G$ un gruppo abeliano libero di rango $n$; prefissata una base $a_1,a_2,\dots,a_n$ di $G$, $G$ ammette i seguenti ordini ciclici, e soltanto questi:*

1) *$2^n$ dedotti dagli ordini totali di $F=Z\oplus G$ con tipo d'ordine*

$$\{(1),(\pm1),\dots,(\pm1)\};$$

2) *$2^{\aleph_0}$ dedotti dagli ordini totali con tipo d'ordine*

$$\{(1),(\pm1,\dots,\alpha^2_{n_2}),\dots,(\pm1,\dots,\alpha^i_{n_i})\};$$

3) *$2^{\aleph_0}$ dedotti dagli ordini totali con tipo d'ordine*

$$\alpha=\{(1,\dots,\alpha^1_{n_1}),(\pm1,\dots,\alpha^2_{n_2}),\dots,(\pm1,\dots,\alpha^i_{n_i})\}\ \textit{con}\ n_1>1;$$

---

[12]) Si ricordi che risulta $\alpha^r_1=\pm1$, $\beta^r_1=\pm1$.

*se $\beta$ è un altro tipo d'ordine di questa classe, $\alpha$ e $\beta$ determinano lo stesso ordine ciclico di $G$ se e solo se $\alpha^i_j - \beta^i_j$ è un numero intero per tutti gli indici, tranne per $j = 1$ per cui si ha $\alpha^i_1 = \beta^i_1$;*

4) $2^{\aleph_0}$ *dedotti dagli ordini totali con tipo d'ordine*

$$\alpha = \{(1, \alpha_1, \dots, \alpha_n)\};$$

*se $\beta = \{(1, \beta_1, \dots, \beta_n)\}$, $\alpha$ e $\beta$ determinano lo stesso ordine ciclico di $G$ se e solo se per ogni indice $i$ $\alpha_i - \beta_i$ è un numero intero.*

*Inoltre gli ordini ciclici dei numeri* 1) *e* 2) *sono tutti e soli quelli indotti dagli ordini totali di $G$, e quelli del numero* 4) *sono tutti e soli gli ordini ciclici archimedei. Se $n = 1$ sussistono solo gli ordini ciclici dei numeri* 1) *e* 4); *se $n$ supera la potenza del continuo non vale il numero* 4).

## 5. Ordini ciclici nei gruppi abeliani misti.

Sia $G$ un gruppo abeliano di rango $n$ ciclicamente ordinabile, quindi con sottogruppo di torsione $T$ isomorfo ad un sottogruppo di $Q/Z$ (senza introdurre restrizioni supporremo talvolta addirittura $T \subseteq Q/Z$); se supponiamo inoltre che $G/T$ sia libero (abeliano), $G$ si può decomporre in somma diretta: $G = T \oplus H$, con $H = Za_1 \oplus Za_2 \oplus \dots \oplus Za_n$ [13]). Ogni ordine ciclico di $G$ subordina evidentemente due ordini ciclici ben determinati sui sottogruppi $T$ e $H$.

LEMMA 5.1. *In queste ipotesi si ha $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(T) + H'$, con $H' = Z(0, a_1) \oplus Z(0, a_2) \oplus \dots \oplus Z(0, a_n)$.*

Poichè $H \subseteq G$ per il lemma 4.1 $\mathcal{R}(H) \subseteq \mathcal{R}(G)$, con $\mathcal{R}(H) = Z \oplus Z(0, a_1) \oplus \dots \oplus Z(0, a_n) = Z \oplus H'$; sempre per il lemma 4.1 anche $\mathcal{R}(T) \subseteq \mathcal{R}(G)$. Sia ora $f$ un arbitrario elemento di $\mathcal{R}(G)$; se $p : \mathcal{R}(G) \to G$ è l'omomorfismo $(m, g) \to g$, risulta $p(f) = g = t + h = p(0, t) + p(0, h)$; se poi $h = \sum_1^n {}_i m_i a_i$, $p\left((0, h) - \sum_1^n {}_i m_i (0, a_i)\right) = 0$

[13]) Anche qui, come nella sezione precedente, l'ipotesi che $n$ sia finito è dovuta esclusivamente a comodità di scrittura, e i risultati ottenuti valgono in tutta generalità.

e $f - (0, t) - \sum_1^n{}_i m_i(0, a_i) \in Z$; ma allora $\mathcal{R}(G) \subseteq Z + \mathcal{R}(T) + H'$ e poichè $Z \subseteq \mathcal{R}(T)$ $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(T) + H'$. Sia $x = (m, t) = \sum_1^n{}_i m_i(0, a_i) \in$ $\in \mathcal{R}(T) \cap H'$; se $q$ è il periodo di $t$ $qx = \sum_1^n{}_i qm_i(0, a_i) \in Z$, ma allora, poichè $Z \cap H' = 0$, $qx = 0$ e $x = 0$ perchè $\mathcal{R}(G)$ è libero da torsione; dunque $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(T) \oplus H'$.

LEMMA 5.2. *Ogni ordine ciclico di $G$ subordina un ordine ciclico di $T$ e un ordine ciclico di $H$; viceversa assegnati ad arbitrio un ordine ciclico di $T$ e un ordine ciclico di $H$, esiste ed è unico l'ordine ciclico di $G$ che subordina i dati.*

La prima parte è ovvia; viceversa, siano $K_T$, $K_H$ due ordini ciclici rispettivamente di $T$ e di $H$. I gruppi totalmente ordinati $\mathcal{R}(T)$, $\mathcal{R}(H) = Z \oplus H'$ sono univocamente individuati da $K_T$, $K_H$ e così pure il gruppo $F = \mathcal{R}(T) \oplus H' \supseteq Z \oplus H'$, dotato dell'unico ordine totale che estende quello di $\mathcal{R}(H)$; l'ordine totale subordinato su $\mathcal{R}(T)$ è l'unico per il quale $1 > 0$, e quindi i due ordini totali che abbiamo attribuito a $\mathcal{R}(T)$ coincidono. Poichè risulta evidentemente $1 > 0$, $Z_\square = F$, mediante l'omomorfismo $p : F \longrightarrow G$ definito ponendo $p\left((m, t) + \sum_1^n{}_i m_i(0, a_i)\right) = t + \sum^n{}_i m_i a_i$ si deduce un ordine ciclico $K$ di $G$ che, per costruzione, subordina i dati rispettivamente su $T$ e su $H$. Se poi $K'$ è un altro ordine ciclico di $G$ che subordina $K_T$, $K_H$ rispettivamente su $T$ e su $H$, il gruppo ad esso associato dal teorema 1.1 è $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(T) \oplus H' = F$ e dunque $K' = K$.

Esaminiamo ora il caso generale. $G$ sia un gruppo abeliano ciclicamente ordinabile di rango $n$ con sottogruppo di torsione $T \subseteq Q/Z$; se $a_1, \dots, a_n$ è un sistema massimale di elementi di $G$ linearmente indipendenti e $H = Za_1 \oplus Za_2 \oplus \dots \oplus Za_n$, risulta $T \cap H = 0$, e il sottogruppo $T \oplus H \subseteq G$ ha rango $n$.

LEMMA 5.3. *L'insieme degli ordini ciclici di $G$ e l'insieme degli ordini ciclici di $T \oplus H$ sono in corrispondenza biunivoca.*

La dimostrazione non è essenzialmente diversa da quella del teorema 4.2, ed è pertanto omessa.

TEOREMA 5.4. *Sia $G$ un gruppo abeliano ciclicamente ordinabile con sottogruppo di torsione $T$. Ogni ordine ciclico di $G$ subordina un ordine ciclico di $T$ e un ordine ciclico di $G/T$ e viceversa, assegnati ad arbitrio un ordine ciclico di $T$ e uno di $G/T$, esiste ed è unico l'ordine ciclico di $G$ che subordina i dati.*

Il teorema è una semplice applicazione dei lemmi 5.3 e 5.2 e del teorema 4.2.

OSSERVAZIONE. Se applichiamo i risultati ottenuti al calcolo della potenza dell'insieme $\mathcal{C}(G)$ degli ordini ciclici di un arbitrario gruppo abeliano $G$, ricordando un noto teorema di Kulikov [14]), e detto al solito $T$ il sottogruppo degli elementi periodici di $G$, otteniamo la seguente tabella:

1) se una (o più) delle componenti primarie di $T$ è decomponibile in somma diretta, $\mathcal{C}(G)$ è vuoto;

2) se $G$ è un gruppo ciclico (finito) d'ordine $m$, $\mathcal{C}(G)$ ha ordine finito ed uguale a $\varphi(m)$ ove $\varphi$ è la funzione di Eulero;

3) in tutti gli altri casi $\mathcal{C}(G)$ ha la potenza del continuo.

## 6. Ordini ciclici e automorfismi.

Ci occuperemo in questa sezione del problema seguente: dato un gruppo abeliano $G$, costruirne tutti gli ordini ciclici non isomorfi. A questo proposito abbiamo già visto nel corollario 2.5 che due ordini ciclici di un gruppo (abeliano) periodico sono sempre isomorfi; questa proprietà non vale in generale, come prova l'esistenza di ordini ciclici archimedei e non archimedei nello stesso gruppo, a norma del teorema 4.5.

Siano $K, K'$ due ordini ciclici del *c.o.*-gruppo $G$, $\mathcal{R}(G)$ ed $\mathcal{R}'(G)$ i gruppi totalmente ordinati ad essi associati dal teorema 1.1.

---

[14]) Vedi [1], pag. 80.

TEOREMA 6.1. *Con le notazioni precedenti, $K$ e $K'$ sono isomorfi se e solo se esiste un isomorfismo d'ordine $\tau : \mathcal{R}(G) \to \mathcal{R}(G)$ tale che $\tau : (1, 0) \to (1, 0)$.*

*i*) Sia $\sigma$ uno degli automorfismi di $G$ che realizzano l'isomorfismo di $K$ in $K'$, e definiamo un'applicazione $\tau$ di $\mathcal{R}(G)$ in $\mathcal{R}(G)$ ponendo $\tau((m, a)) = (m, \sigma(a))$ per ogni elemento $(m, a)$ di $\mathcal{R}(G)$; $\tau$ sarà un omomorfismo se e solo se risulterà $f(a, b) = f'(\sigma(a), \sigma(b))$ per ogni coppia di elementi $a, b$ di $G$, dove le mappe $f$ ed $f'$ sono definite come nel teorema 1.1. Supponiamo allora $f(a, b) = 0$; se $a = 0, \sigma(a) = 0$ e $f'(\sigma(a), \sigma(b)) = 0$, e analogamente se $b = 0$; se poi $(0, a, a + b)_K$ è anche $(0, \sigma(a), \sigma(a) + \sigma(b))_{K'}$ e ancora $f'(\sigma(a), \sigma(b)) = 0$. Se invece $f(a, b) = 1$ e $a = -b \neq 0$ risulta $\sigma(a) = -\sigma(b) \neq 0$ e $f'(\sigma(a), \sigma(b)) = 1$, mentre se $(0, a + b, a)_K$ si ha $(0, \sigma(a) + \sigma(b), \sigma(a))_{K'}$ e ancora $f'(\sigma(a), \sigma(b)) = 1$. Si dimostra inoltre facilmente che $\tau$ è un isomorfismo suriettivo, ed è ovvio che $\tau((1, 0)) = (1, 0)$; proviamo ora che $\tau$ conserva gli ordini totali; sia $(m, a) \in \mathcal{R}(G)$, $(m, a) > 0$: allora $m \geq 0$, $\tau((m, a)) = (m, \sigma(a)) > 0$; analogamente se $(n, b) < 0$ $\tau((n, b)) = (n, \sigma(b)) < 0$, come volevasi.

*ii*) Sia $\tau$ un isomorfismo d'ordine di $\mathcal{R}(G)$ su $\mathcal{R}'(G)$ tale che $\tau((1, 0)) = (1, 0)$; è chiaro che $\tau((m, 0)) = (m, 0)$ e $\tau((m, a)) = (m, 0) + \tau((0, a))$; inoltre da $0 \leq (0, a) < (1, 0)$ in $\mathcal{R}(G)$ segue che, se $(n, b) = \tau((0, a))$, $0 \leq (n, b) < (1, 0)$ in $\mathcal{R}'(G)$ e da questa doppia diseguaglianza si trae $n = 0$. È quiudi lecito definire un'applicazione $\sigma$ di $G$ in sè ponendo $\tau((0, a)) = (0, \sigma(a))$; $\sigma$ è evidentemente iniettiva ed è suriettiva perchè per ogni $b \in G$ $(0, b) = \tau((m, a))$ per un conveniente $(m, a) \in \mathcal{R}(G)$, e da $0 \leq (0, b) < (1, 0)$ in $\mathcal{R}'(G)$ segue $0 \leq (m, a) < (1, 0)$ in $\mathcal{R}(G)$ e $m = 0$, cioè $b = \sigma(a)$. Risulta poi $\tau((0, a)) + \tau((0, b)) = (0, \sigma(a)) + (0, \sigma(b)) = (f'(\sigma(a), \sigma(b)), \sigma(a) + \sigma(b))$, $\tau((0, a) + (0, b)) = \tau((f(a, b), a + b)) = (f(a, b), 0) + \tau((0, a + b)) = (f(a, b), \sigma(a + b))$ e poichè $\tau$ è isomorfismo $\sigma(a) + \sigma(b) = \sigma(a + b)$: $\sigma$ è un automorfismo di $G$. Inoltre per ogni $g \in G$ risulta $r_g = (0, g)$ sia per $K$ che per $K'$, e $(a, b, c)_K$ implica $(0, a) < (0, b) < (0, c)$ in $\mathcal{R}(G)$ oppure una relazione ottenibile a partire da questa permutando circolarmente; poichè $\tau$ è isomorfismo d'ordine segue $\tau((0, a)) < \tau((0, b)) < \tau((0, c))$ (nel nostro caso) cioè $(0, \sigma(a)) < (0, \sigma(b)) < (0, \sigma(c))$ in $\mathcal{R}'(G)$ e in definitiva $(\sigma(a), \sigma(b), \sigma(c))_{K'}$.

COROLLARIO 6.2. *I due ordini ciclici $K$, $K'$ del gruppo abeliano libero $H$ siano dedotti dagli ordini totali $\leq, \leq'$ di $Z \oplus H$. Allora $K, K'$ sono isomorfi se e solo se esiste un automorfismo di $Z \oplus H$ che muta $\leq$ in $\leq'$ e subordina l'identità su $Z$.*

Se $\tau$ è l'isomorfismo di $\mathcal{R}(H)$ in $\mathcal{R}'(H)$ considerato nel teorema precedente, $\eta : \mathcal{R}(H) \longrightarrow Z \oplus H$ è definito ponendo

$$\eta : m + \sum_1^n{}_i\, m_i (0, a_i) \longrightarrow m + \sum_1^n{}_i\, m_i a_i$$

con il consueto significato dei simboli, ed in modo analogo $\eta' : \mathcal{R}'(H) \longrightarrow Z \oplus H$, la mappa $\eta' \tau \eta^{-1}$ è quella cercata.

Il criterio suesposto viene ad essere considerevolmente semplificato in un caso particolare abbastanza significativo, tenendo presente il corollario, ricordando che è noto [15]) un criterio per decidere quando due ordini totali di un gruppo abeliano libero sono isomorfi ; la semplificazione in parola è contenuta nella seguente

PROPOSIZIONE 6.3. *Se $G = T \oplus H$ è un c.o.-gruppo abeliano con sottogruppo di torsione $T$ a gruppo quoziente $G/T\,(\simeq H)$ libero, due ordini ciclici $K, K'$ di $G$ sono isomorfi se e solo se sono isomorfi gli ordini ciclici $K_H$, $K'_H$ subordinati rispettivamente da $K$ e da $K'$ su $H$.*

Supponiamo che $K, K'$ siano isomorfi, e sia $\tau$ un automorfismo di $G$ che realizza tale isomorfismo ; $\tau$ induce un automorfismo $\bar{\tau}$ di $G/T$ e, se $\eta$ è un (assegnato) isomorfismo di $G/T$ su $H$, $\eta \bar{\tau} \eta^{-1}$ muta $K_H$ in $K'_H$. Viceversa, $K_H$ e $K'_H$ siano isomorfi tramite (in particolare) l'automorfismo $\sigma$ di $H$. Poichè due ordini ciclici di un gruppo periodico sono sempre isomorfi, esiste un automorfismo $\varrho$ di $T$ che muta $K_T$ in $K'_T$ se con questi simboli indico gli ordini ciclici subordinati rispettivamente da $K$, $K'$ su $T$ ; ma allora l'automorfismo $\tau$ di $G$ definito ponendo $\tau(t + h) = \varrho(t) + \sigma(h)$ per ogni $t \in T$, $h \in H$, muta $K$ in un ordine ciclico $\bar{K}$ che, coincidendo con $K'$ su $T$ e su $H$, coincide con $K'$ su $G$ a norma del lemma 5.2.

---

[15]) Vedi [5].

OSSERVAZIONE. L'ipotesi sul gruppo quoziente $G/T$ introdotta nella proposizione 6.3 comporta una effettiva restrizione; non è cioè sperabile di ottenere per gli isomorfismi risultati analoghi a 4.2 e 5.3, come mostra l'esempio seguente.

Siano $H = Za_1 \oplus Za_2$; $D = Qa_1 \oplus Qa_2$ rispettivamente il gruppo abeliano libero e il gruppo divisibile con base $a_1$, $a_2$, e sia $G = Qa_1 \oplus Za_2$; dotiamo $Qa_1$, $Za_2$ dell'ordine totale usuale, e consideriamo gli ordini totali $\leq_1$, $\leq_2$ ottenuti ordinando $G$ lessicograficamente nei due modi possibili a partire dai dati. $\leq_1$ e $\leq_2$ subordinano su $H$ due ordini totali isomorfi nell'automorfismo che scambia $a_1$ con $a_2$; d'altra parte basta confrontare i rispettivi sottogruppi convessi massimali per convincersi che $\leq_1$ e $\leq_2$ non sono isomorfi in $G$. Poichè due ordini ciclici indotti da ordini totali sono evidentemente isomorfi se e solo se sono tali gli ordini totali che li inducono, l'esempio costruito prova che in generale l'isomorfismo tra due ordini ciclici non si conserva passando da un sottogruppo libero $H$ ad un sovragruppo $G$ dello stesso rango, nemmeno se si impone a $G$ di essere libero da torsione.

## BIBLIOGRAFIA


[1] FUCHS, L., *Abelian groups*, Budapest 1963.

[2] FUCHS, L., *Partially ordered algebraic sets*, London 1963.

[3] RIEGER, L. S., *Sui gruppi ordinati e ciclicamente ordinati I-III*, Věstník Krát. České Spol. Nauk, 1946, n. 6, pagg. 1-31; 1947, n. 1, pagg. 1-33; 1948, n. 1, pagg. 1-26 (in cèco).

[4] ŚWIERCZKÓWSKI, S., *On cyclically ordered groups*, Fund. Math., 47 (1959), pagg. 161-166.

[5] TEH, H. H., *Construction of orders in Abelian groups*, Proc. Cambridge Phil. Soc., 57 (1961), pagg. 476-482.


Manoscritto pervenuto in redazione il 30 giugno 1966.