

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

ADALBERTO ORSATTI

## **Un lemma di immersione per i gruppi abeliani senza elementi di altezza infinita**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 38 (1967), p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_38\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*  
<http://www.numdam.org/>

# UN LEMMA DI IMMERSIONE PER I GRUPPI ABELIANI SENZA ELEMENTI DI ALTEZZA INFINITA.

ADALBERTO ORSATTI \*)

INTRODUZIONE. Con la parola gruppo intendiamo gruppo abeliano; la notazione è quella additiva.

Ad ogni gruppo  $G$  si associano un gruppo  $G^*$  ed un omomorfismo  $\varphi: G \rightarrow G^*$  in questo modo: per ogni numero primo  $p$  si considera il gruppo  $G_p^* = (G/p^\infty G) \otimes Z_p$  — dove  $p^\infty G$  è l'intersezione dei sottogruppi  $p^n G$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) e  $Z_p$  è l'anello dei razionali il cui denominatore è primo con  $p$  — e si definisce in modo naturale l'omomorfismo  $\varphi_p: G \rightarrow G_p^*$ ; allora  $G^*$  è il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei gruppi  $G_p^*$ , al variare di  $p$  nell'insieme dei numeri primi, e  $\varphi$  è definito per mezzo degli omomorfismi  $\varphi_p$ . Si dimostra quindi il seguente lemma di immersione:  $\varphi$  è *iniettivo se e solo se*  $G$  è *senza elementi di altezza infinita*; *l'immagine*  $\varphi(G)$  *di*  $\varphi$  *è pura in*  $G^*$ ;  $G^*/\varphi(G)$  *è divisibile*. Si prova inoltre che per ogni omomorfismo di gruppi  $f: G \rightarrow H$  esiste un unico omomorfismo  $f^*: G^* \rightarrow H^*$  compatibile con  $f$ , e che  $(G^*)^*$  è canonicamente isomorfo a  $G^*$ .

Una conseguenza immediata del lemma suddetto è la seguente: il completamento naturale  $\widehat{G}$  di un gruppo  $G$  ([2], [5], [6]) è isomorfo a quello di  $G^*$  e cioè al prodotto diretto dei completamenti  $p$ -adici dei  $G_p^*$ . Come applicazione di questa proprietà, con metodi topologici elementari e facendo uso di alcuni risultati di Kaplansky [7] e Fuchs [4], si dimostrano due teoremi già stabiliti da D. K. Harrison con metodi omologici ([5], [6]). Precisamente:

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università, Padova.

1) Se  $H$  è un sottogruppo puro del gruppo  $G$ ,  $\widehat{G}$  è isomorfo alla somma diretta dei completamenti di  $H$  e di  $G/H$ .

2) Se  $G$  è un gruppo ridotto e libero da torsione e se  $\alpha_p$ , per ogni primo  $p$ , è la dimensione dello spazio vettoriale  $G/pG$  sul corpo con  $p$  elementi,  $\widehat{G}$  è individuato dai cardinali  $\alpha_p$  e dipende solo da essi.

L'autore ringrazia il dott. F. Menegazzo per le frequenti ed utili conversazioni sull'argomento.

1. Incominciamo con alcune notazioni e definizioni. Indichiamo con  $Z$  l'anello degli interi, con  $p$  un numero primo, con  $Z_p$  l'anello dei razionali il cui denominatore è primo con  $p$ , con  $i_p$  l'iniezione canonica di  $Z$  in  $Z_p$ . Siano  $N$  e  $P$  rispettivamente l'insieme degli interi positivi e quello dei numeri primi.

Sia  $G$  un gruppo. Denotiamo con  $T(G)$  il sottogruppo di torsione di  $G$  e con  $T_p(G)$  la componente  $p$ -primaria di  $T(G)$ . Siano  $p^\infty G$  il sottogruppo di  $G$  formato dagli elementi di  $p$ -altezza infinita e  $G_\infty$  quello formato dagli elementi di altezza infinita:

$$p^\infty G = \bigcap_n p^n G, \quad G_\infty = \bigcap_n n G, \quad n \in N.$$

Risulta:

$$G_\infty = \bigcap_p p^\infty G, \quad p \in P.$$

La *topologia naturale* ([2], [5]) su  $G$  si definisce prendendo come base di intorni dello zero i sottogruppi  $nG$ ,  $n \in N$ .  $G$  con questa topologia diventa un gruppo topologico, il quale risulta di Hausdorff se e solo se  $G_\infty = 0$ . Per questo motivo, oltre che per brevità, diremo che un gruppo  $G$  senza elementi di altezza infinita (tale cioè che  $G_\infty = 0$ ) è un gruppo di Hausdorff. Osserviamo che un gruppo libero da torsione è di Hausdorff se e solo se esso è ridotto.

2. Sia  $G$  un gruppo qualunque. Moltiplicando tensorialmente per  $G$  la sequenza esatta di  $Z$ -moduli:

$$0 \rightarrow Z \xrightarrow{i_p} Z_p \rightarrow Z_p/Z \rightarrow 0$$

si ottiene la sequenza esatta:

$$G \xrightarrow{j_p} G \otimes Z_p \rightarrow G \otimes (Z_p/Z) \rightarrow 0$$

dove, per ogni  $g \in G$ ,  $j_p(g) = g \otimes 1, 1 \in Z_p$ . Chiameremo  $G \otimes Z_p$  il  $p$ -localizzato di  $G$  e lo indicheremo con  $G_p$ . Per le proprietà dei moduli di frazioni, [1], il nucleo  $S_p$  di  $j_p$  è formato dagli elementi periodici di  $G$  il cui periodo è primo con  $p$ . Il conucleo  $G_p/j_p(G)$  di  $j_p$  è un gruppo periodico divisibile e con componente  $p$ -primaria nulla, come si deduce dalla struttura di  $Z_p/Z$  e da alcune proprietà del prodotto tensoriale di gruppi ([3], pag. 251);  $j_p(G)$  è  $p$ -puro, [4], in  $G_p$ .

Moltiplicando tensorialmente per  $Z_p$  la sequenza esatta  $0 \rightarrow T(G) \rightarrow G \rightarrow G/T(G) \rightarrow 0$ , in cui le mappe sono quelle naturali, si vede che  $T(G_p)$  è isomorfo a  $T_p(G)$ . In particolare se  $G$  è periodico  $G_p$  è isomorfo alla componente  $p$ -primaria di  $G$ , mentre se  $G$  è libero da torsione  $j_p$  è iniettivo e  $G_p$  è un gruppo libero da torsione avente lo stesso rango di  $G$ .

Ogni elemento di  $G_p$  è divisibile per ogni intero non nullo primo con  $p$  ed il quoziente è unico.  $G_p$ , cioè, è uno  $Z_p$ -modulo (modulo = modulo unitario).

Sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ . Poichè la moltiplicazione tensoriale per  $Z_p$  conserva le inclusioni,  $H_p$  è un sottogruppo di  $G_p$ ; inoltre:

P.1. *Se  $H$  è  $p$ -puro in  $G$ , allora  $H_p$  è puro in  $G_p$ .*

Questo si verifica direttamente tenendo conto del fatto che ogni elemento di  $G_p$  può scriversi nella forma  $g \otimes \frac{1}{s}$ , dove  $g \in G$  ed  $s$  è un intero primo con  $p$ .

Il sottogruppo di  $G_p$  formato dagli elementi di altezza infinita coincide con  $p^\infty G_p$  ed il gruppo  $G_p/p^\infty G_p$  è di Hausdorff.

Per ogni gruppo  $G$  e per ogni numero primo  $p$ , indicheremo con  $G_p^*$  il gruppo  $G_p/p^\infty G_p$  e con  $\varphi_p$ , oppure con  $\varphi_p^G$ , l'omomorfismo di  $G$  in  $G_p^*$  ottenuto componendo  $j_p$  con la proiezione canonica  $\varrho_p$  di  $G_p$  su  $G_p^*$ . Chiameremo  $G_p^*$  il  $p$ -localizzato di Hausdorff di  $G$ . Anche  $G_p^*$  è uno  $Z_p$ -modulo.

Si verifica facilmente che se  $G$  è libero da torsione  $p^\infty G_p$  coincide con il sottogruppo divisibile massimale di  $G_p$  ed anche  $G_p^*$  è libero da torsione, mentre se  $G$  è periodico  $G_p^*$  è isomorfo a  $T_p(G)/p^\infty T_p(G)$ .

3. Moltiplichiamo tensorialmente per  $Z_p$  la sequenza esatta :

$$(1) \quad 0 \rightarrow p^\infty G \rightarrow G \xrightarrow{\delta_p} G/p^\infty G \rightarrow 0$$

nella quale le mappe sono quelle naturali. Mettiamo quindi in evidenza gli omomorfismi canonici dei gruppi della (1) nei rispettivi  $p$ -localizzati ed i nuclei di tali omomorfismi, ed osserviamo che il nucleo  $S_p$  di  $j_p$  è contenuto in  $p^\infty G$ . Otteniamo il seguente diagramma

$$(1') \quad \begin{array}{ccccccc} & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & S_p & \rightarrow & S_p & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \rightarrow & p^\infty G & \rightarrow & G & \xrightarrow{\delta_p} & G/p^\infty G \rightarrow 0 \\ & & \downarrow j'_p & & \downarrow j_p & & \downarrow j''_p \\ 0 & \rightarrow & (p^\infty G) \otimes Z_p & \rightarrow & G_p & \xrightarrow{\beta_p} & (G/p^\infty G) \otimes Z_p \rightarrow 0 \end{array}$$

che risulta commutativo e con righe e colonne esatte. Dimostriamo ora che

$$(2) \quad (p^\infty G) \otimes Z_p = p^\infty G_p.$$

È evidente che ogni elemento di  $(p^\infty G) \otimes Z_p$  è contenuto in  $p^\infty G_p$ . Viceversa sia  $g \otimes \frac{1}{s}$  ( $g \in G, \frac{1}{s} \in Z_p$ ) un elemento di  $p^\infty G_p$ ; allora  $g \otimes 1$ , che appartiene a  $j_p(G)$ , è divisibile in  $G_p$  per ogni potenza di  $p$ . Ricordando che  $j_p(G)$  è  $p$ -puro in  $G_p$ , segue che  $g \otimes 1$  ha  $p$ -altezza infinita in  $j_p(G)$ . Questo significa che per ogni  $n \in \mathbb{N}$  esiste un elemento  $g' \in G$  tale da aversi  $p^n g' - g \in S_p \subseteq p^\infty G$ . Allora  $g$  è divisibile per  $p^n$  in  $G$ ; quindi  $g \in p^\infty G$  attesa l'arbitrarietà di  $n$ ; di conseguenza  $g \otimes \frac{1}{s} \in (p^\infty G) \otimes Z_p$ . La (2) è così provata.

Paragonando l'ultima riga del diagramma (1') con la sequenza esatta :

$$0 \rightarrow p^\infty G_p \rightarrow G_p \xrightarrow{e_p} G_p^* \rightarrow 0$$

dove  $e_p$  è la proiezione canonica di  $G_p$  su  $G_p^*$ , si vede che

esiste un unico isomorfismo  $\gamma_p$  di  $(G/p^\infty G) \otimes Z_p$  su  $G_p^*$  tale che  $\varrho_p = \gamma_p \circ \beta_p$ . È lecito pertanto identificare, come noi faremo,  $(G/p^\infty G) \otimes Z_p$  con  $G_p^*$  e  $\varphi_p$  con il prodotto delle mappe  $\delta_p$  e  $j_p''$  oppure delle mappe  $j_p$  e  $\beta_p$ .

Esaminando il diagramma (1') si riconosce subito che il nucleo di  $\varphi_p$  è  $p^\infty G$ , mentre il conucleo di  $\varphi_p$  è isomorfo al conucleo di  $j_p''$ , e quindi al gruppo  $(G/p^\infty G) \otimes (Z_p/Z)$  che è divisibile, periodico e con componente  $p$ -primaria nulla;  $\varphi_p(G)$  è  $p$ -puro in  $G_p^*$ .

4. Per ogni gruppo  $G$  indichiamo con  $G^*$  il prodotto diretto (= somma diretta completa) dei gruppi  $G_p^*$  al variare di  $p$  in  $P$ :

$$G^* = \prod_p G_p^*, p \in P.$$

$G^*$  è chiaramente un gruppo di Hausdorff. Per ogni  $a \in G^*$  sia  $a_p$  la sua  $p$ -componente; consideriamo quindi l'omomorfismo  $\varphi: G \rightarrow G^*$  così definito:

$$\varphi(g)_p = \varphi_p(g); g \in G, p \in P.$$

Chiameremo  $\varphi$  l'omomorfismo canonico di  $G$  in  $G^*$  e lo indicheremo anche con  $\varphi^G$ . Dimostriamo ora il seguente

**LEMMA D'IMMERSIONE.** *Siano  $G$  un gruppo,  $G^*$  il prodotto diretto dei suoi  $p$ -localizzati di Hausdorff  $G_p^*$  ( $p \in P$ ),  $\varphi$  l'omomorfismo canonico di  $G$  in  $G^*$ . Allora:*

- 1) *il nucleo di  $\varphi$  è  $G_\infty$ , per cui  $\varphi$  è iniettivo se e solo se  $G$  è di Hausdorff;*
- 2)  *$\varphi(G)$  è puro in  $G^*$ ;*
- 3)  *$G^*/\varphi(G)$  è divisibile.*

**DIMOSTRAZIONE.** Risulta  $\varphi(g) = 0$  ( $g \in G$ ) se e solo se, per ogni  $p \in P$ ,  $\varphi_p(g) = 0$  cioè  $g \in p^\infty G$ . Dunque il nucleo di  $\varphi$  è  $G_\infty$ .

Sia ora  $p$  un numero primo arbitrario e supponiamo  $p^n b = \varphi(g)$  con  $n \in \mathbb{N}$ ,  $b \in G^*$ ,  $g \in G$ . Si ha allora in  $G_p^*$ :  $p^n b_p = \varphi_p(g)$ , da cui  $b_p = \varphi_p(g')$ ,  $g' \in G$  poichè, come è stato precedentemente osservato,

$G_*/\varphi_p(G)$  non ha elementi di periodo  $p$ . Abbiamo dunque:  $p^n b_p = p^n \varphi_p(g') = \varphi_p(g)$ , quindi  $p^n g' - g \in p^\infty G$ . Allora  $g$  è divisibile per  $p^n$  in  $G$ ; cioè  $g = p^n g''$ ,  $g'' \in G$ . Risulta perciò:

$$p^n b = \varphi(g) = \varphi(p^n g'') = p^n \varphi(g'').$$

Abbiamo così provato che  $\varphi(G)$  è  $p$ -puro in  $G^*$  per ogni  $p \in P$ : questo significa che  $\varphi(G)$  è puro in  $G^*$ .

Dimostriamo infine che  $G^*/\varphi(G)$  è divisibile. Allo scopo basta provare che esso è divisibile per un arbitrario numero primo  $q$ ; cioè che, fissato un elemento  $b \in G^*$ , esiste un elemento  $b' \in G^*$  tale da aversi:  $b - qb' \in \varphi(G)$ . Ora  $b'$  esiste se e solo se esiste un elemento  $a \in \varphi(G)$  tale che:

$$(3) \quad b - a \in q G^*$$

e questa condizione è verificata se e solo se, per ogni  $p \in P$ , risulta:

$$b_p - a_p \in q G_p^*.$$

Se  $p \neq q$  le relazioni precedenti valgono qualunque sia l'elemento  $a \in \varphi(G)$ , poichè in tal caso  $q G_p^* = G_p^*$ . Basta dunque trovare un elemento  $a \in \varphi(G)$  per il quale si abbia  $b_q - a_q \in q G_q^*$ . A questo punto ricordiamo che, come è stato osservato alla fine del n° precedente,  $G_q^*/\varphi_q(G)$  è divisibile: pertanto  $G_q^* = \varphi_q(G) + q G_q^*$  e quindi  $b_q \in \varphi_q(g) + q G_q^*$  dove  $g$  è un opportuno elemento di  $G$ . Allora l'elemento  $a = \varphi(g) \in \varphi(G)$  soddisfa la (3). Il lemma è così provato.

Osserviamo che  $G^*$  è naturalmente dotato di una struttura di  $Z^*$ -modulo, dove  $Z^*$  è l'anello prodotto diretto degli  $Z_p$ .

5. P.2. Siano  $G$  ed  $H$  gruppi,  $\varphi^G$  e  $\varphi^H$  gli omomorfismi canonici rispettivamente di  $G$  in  $G^*$  e di  $H$  in  $H^*$ . Allora per ogni omomorfismo  $f: G \rightarrow H$  esiste un unico omomorfismo  $f^*: G^* \rightarrow H^*$  tale che:

$$(4) \quad f^* \circ \varphi^G = \varphi^H \circ f$$

DIMOSTRAZIONE. Poichè  $f(p^\infty G) \subseteq p^\infty H$ ,  $f$  induce, in modo naturale, un omomorfismo  $f^{(p)}: G/p^\infty G \rightarrow H/p^\infty H$ ; l'omomorfismo

$f_p^* : G_p^* \rightarrow H_p^*$ , ottenuto moltiplicando tensorialmente  $f^{(p)}$  per l'identità su  $Z_p$ , è una estensione di  $f^{(p)}$ ; risulta pertanto  $f_p^* \circ \varphi_p^G = \varphi_p^H \circ f$ . Allora l'omomorfismo  $f^* : G^* \rightarrow H^*$  così definito :

$$f^*(a)_p = f_p^*(a_p) \quad (a \in G^*, p \in P)$$

verifica la (4). Sia  $\bar{f}$  un altro omomorfismo di  $G^*$  in  $H^*$  soddisfacente la condizione  $\bar{f} \circ \varphi^G = \varphi^H \circ f$ ; allora  $f^*$  ed  $\bar{f}$  coincidono sopra l'immagine di  $\varphi^G$ . Introduciamo nei gruppi di Hausdorff  $G^*$  ed  $H^*$  la topologia naturale e ricordiamo che gli omomorfismi sono, per questa topologia, delle applicazioni continue, [2]. Per il lemma d'immersione il conucleo di  $\varphi^G$  è divisibile, quindi l'immagine di  $\varphi^G$  è un sottogruppo denso di  $G^*$  ([5], Lemma 3.5.). Allora  $f^*$  ed  $\bar{f}$  sono due applicazioni continue dello spazio topologico  $G^*$  nello spazio di Hausdorff  $H^*$  le quali coincidono sopra un sottoinsieme denso di  $G^*$ ; di conseguenza, per un ben noto teorema di topologia generale, esse coincidono su tutto  $G^*$ . La dimostrazione è così completa.

Osserviamo che  $f^*$  è un omomorfismo di  $Z^*$ -moduli.

Per ogni omomorfismo  $f$  di gruppi siano  $f^{(p)}, f_p^*, f^*$  gli omomorfismi individuati da  $f$  nel modo precedentemente descritto. Dimostriamo quindi le proposizioni seguenti :

P.3. *Se  $G$  è un gruppo ed  $f$  è la proiezione canonica di  $G$  su  $G/G_\infty$ , l'omomorfismo  $f^* : G^* \rightarrow (G/G_\infty)^*$  è un isomorfismo.*

**DIMOSTRAZIONE.** Osserviamo che il sottogruppo degli elementi di  $p$ -altezza infinita di  $G/G_\infty$  è  $(p^\infty G)/G_\infty$ . Pertanto  $f^{(p)}$  e, di conseguenza,  $f_p^*$  sono isomorfismi. Allora anche  $f^*$  è un isomorfismo.

P.4. *Siano  $G$  un gruppo,  $H$  un sottogruppo puro di  $G$ ,  $f$  l'iniezione canonica di  $H$  in  $G$ ; allora, per ogni  $p \in P$ , l'omomorfismo  $f_p^* : H_p^* \rightarrow G_p^*$  è iniettivo e la sua immagine è un sottogruppo puro di  $G_p^*$ . Di conseguenza  $f^*$  è iniettivo e la sua immagine è un sottogruppo puro di  $G^*$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Poichè  $p^\infty H = (p^\infty G) \cap H$ ,  $f^{(p)}$  è iniettivo e la sua immagine coincide con  $(H + p^\infty G)/p^\infty G$  il quale è un sottogruppo  $p$ -puro di  $G/p^\infty G$ . Passando ai  $p$ -localizzati di  $H/p^\infty H$  e di



$G/p^\infty G$ , l'immagine di  $f^{(p)}$  va nell'immagine di  $f_p^*$  che è pura in  $G_p^*$  per la P.1. Infine  $f_p^*$  è iniettivo poichè la moltiplicazione tensoriale per  $Z_p$  conserva le iniezioni.

6. Richiamiamo brevemente alcune proprietà della topologia naturale.

Sia  $G$  un gruppo di Hausdorff dotato di questa topologia. Il completamento naturale  $\widehat{G}$  di  $G$  è il completamento del gruppo  $G$  rispetto alla struttura uniforme (generabile con una metrica) indotta dalla topologia naturale. La topologia di  $\widehat{G}$  è ancora la topologia naturale,  $\widehat{G}$  è uno  $\widehat{Z}$ -modulo (dove  $\widehat{Z}$  indica il completamento di  $Z$ ) e  $G$  si può identificare con un sottogruppo puro e denso di  $\widehat{G}$ , [2].

Sia  $H$  un sottogruppo di  $G$ : se  $H$  è puro in  $G$ , la topologia relativa di  $H$  coincide con la topologia naturale ed  $\widehat{H}$  si può identificare con la chiusura di  $H$  in  $\widehat{G}$ , [2];  $H$  è denso in  $G$  se e solo se  $G/H$  è divisibile, [5]; se  $H$  è puro e denso in  $G$  allora  $\widehat{H} \cong \widehat{G}$ , [2].

In particolare, se  $G$  è uno  $Z_p$ -modulo, la sua topologia naturale coincide con la topologia  $p$ -adica, definita prendendo come base di intorno dello zero i sottogruppi  $p^n G$  ( $n \in N$ ), e  $\widehat{G}$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo;  $\widehat{Z}_p$  è l'anello degli interi  $p$ -adici.

Se  $G$  non è di Hausdorff chiameremo completamento naturale di  $G$ , e lo indicheremo ancora con  $\widehat{G}$ , il completamento naturale del gruppo di Hausdorff  $G/G_\infty$ . In ogni caso  $\widehat{G}$  è di Hausdorff ed è isomorfo al limite proiettivo dei gruppi  $G/nG$  ( $n \in N$ ) rispetto agli omomorfismi naturali  $G/nG \rightarrow G/mG$ ,  $nG \subseteq mG$ , [6].

7. La proposizione seguente è un corollario immediato del lemma d'immersione.

P.5. *Il completamento naturale di un gruppo  $G$  è isomorfo a quello di  $G^*$ .*

Infatti  $G/G_\infty$  è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di  $G^*$ .

Chiameremo  $G^*$  il *pre-completamento naturale* di  $G$ . Questa definizione ci sembra giustificata anche dalle considerazioni seguenti:

1) Sia  $f: G \rightarrow H$  un omomorfismo di gruppi: esiste un unico omomorfismo  $f^*: G^* \rightarrow H^*$  di  $Z^*$ -moduli compatibile con  $f$ , come

risulta dalla P.2. Il carattere funtoriale della corrispondenza che associa  $G^*$  a  $G$  ed  $f^*$  ad  $f$  è manifesto.

2)  $(G^*)^*$  è isomorfo a  $G^*$ . Infatti  $p^\infty G^*$  è formato dagli elementi di  $G^*$  la cui  $p$ -componente è nulla; quindi  $G^*/p^\infty G^*$  è isomorfo a  $G_p^*$  il quale, essendo uno  $Z_p$ -modulo, coincide con il suo  $p$ -localizzato.

Sia  $A$  un anello con unità. Definiamo  $A_p^*$  ed  $A^*$  a partire dal gruppo additivo di  $A$  ed osserviamo che  $p^\infty A$  è un ideale di  $A$ . La moltiplicazione di  $A/p^\infty A$  si estende canonicamente ad  $A_p^*$  che risulta così un anello. Se (il gruppo additivo di)  $A$  è di Hausdorff, la moltiplicazione di cui è dotato  $A^*$  in quanto prodotto diretto degli anelli  $A_p^*$  è una estensione di quella di  $A$ . Tale estensione è unica.

Si vede così che le proprietà del completamento naturale di un gruppo  $G$ , o di un anello  $A$ , di Hausdorff esposte nel Lemma 1.4. di [2] sono anche proprietà del pre-completamento. In particolare  $G^*$  è libero da torsione se  $G$  è libero da torsione;  $A^*$  ha la stessa unità di  $\varphi(A)$  ed è commutativo se  $A$  è commutativo.

Per ogni gruppo  $G$ , la struttura di  $\widehat{G}$  è determinata da quella di  $G^*$  nel modo seguente.

**TEOREMA 1.** *Il completamento naturale di un gruppo  $G$  è isomorfo al prodotto diretto dei completamenti dei  $p$ -localizzati di Hausdorff di  $G$ :*

$$\widehat{G} \cong \prod_p \widehat{G}_p^* \quad (p \in P)$$

**DIMOSTRAZIONE.** Il ragionamento è analogo a quello usato in [2] per determinare la struttura di  $\widehat{Z}$ . Poniamo  $K = \prod_p \widehat{G}_p^*$  ( $p \in P$ ) ed osserviamo che se  $n$  è un intero positivo primo con  $p$  risulta  $n \widehat{G}_p^* = \widehat{G}_p^*$  poichè  $\widehat{G}_p^*$  è uno  $\widehat{Z}_p$ -modulo. Pertanto in  $K$  la topologia naturale coincide con la topologia prodotto delle topologie naturali dei  $\widehat{G}_p^*$ . Allora  $K$ , in quanto prodotto topologico di spazi uniformi completi, è completo. Per ogni  $p \in P$ ,  $G_p^*$  è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di  $\widehat{G}_p^*$ ; per cui  $G^*$  è isomorfo ad un sottogruppo puro e denso di  $K$ . Quindi  $\widehat{G}^* \cong K$  e la conclusione segue dalla P.5.

Per ogni  $p \in P$ , si può definire il *completamento  $p$ -adico* di un gruppo  $G$  come il completamento di  $G/p^\infty G$  rispetto alla struttura uniforme di Hausdorff indotta dalla topologia  $p$ -adica.  $G/p^\infty G$  è isomorfo a  $\varphi_p(G)$ ,  $\varphi_p(G)$  è  $p$ -puro in  $G_p^*$ , il quale è uno  $Z_p$ -modulo, ed il gruppo  $G_p^*/\varphi_p(G)$  è  $p$ -divisibile: quindi tale completamento è isomorfo a  $\widehat{G}_p^*$ . Pertanto dal teorema 1 discende il seguente

**COROLLARIO.** *Il completamento naturale di un gruppo è isomorfo al prodotto diretto dei suoi completamenti  $p$ -adici, al variare di  $p$  in  $P$ .*

8. A titolo di applicazione dei risultati precedenti dimostreremo ora due teoremi già provati per altra via da D. K. Harrison ([5], [6]).

**TEOREMA 2.** *Siano  $G$  un gruppo di Hausdorff ed  $H$  un sottogruppo puro di  $G$ . Allora  $\widehat{H}$  è un sommando diretto di  $\widehat{G}$  e  $(G/H)^\wedge$  è isomorfo ad un sommando diretto di  $\widehat{G}$  complementare di  $\widehat{H}$ .*

**OSSERVAZIONE.** Nell'enunciato e nella dimostrazione di questo teorema si considera  $G$  come sottogruppo puro e denso di  $\widehat{G}$ , identificando  $\widehat{H}$  con la chiusura di  $H$  in  $\widehat{G}$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Per ogni  $p \in P$  possiamo identificare, per la P.4,  $H_p^*$  con un sottogruppo puro di  $(G_p^*$  e quindi di)  $\widehat{G}_p^*$ . Con lo stesso ragionamento usato nella dimostrazione del Lemma 20 di [7] si vede che anche  $\widehat{H}_p^*$  è puro in  $\widehat{G}_p^*$ ; pertanto ([7], Teorema 23)  $\widehat{H}_p^*$  è un sommando diretto di  $\widehat{G}_p^*$ . Allora, per il teorema 1,  $\widehat{H}$  è un sommando diretto di  $\widehat{G}$ .

Il completamento del gruppo  $B = G/H$  è per definizione il completamento del gruppo di Hausdorff  $B/B_\infty$ . Osserviamo che un elemento  $a \in G$  rappresenta un elemento di  $B_\infty$  se e solo se, per ogni  $n \in \mathbb{N}$ , esistono un elemento  $g_n \in G$  ed uno  $h_n \in H$  tali da aversi:  $a - ng_n = h_n$ . Questo significa che  $a$  è limite della successione  $\{h_n, n \in \mathbb{N}\}$  di elementi di  $H$ . Pertanto  $B/B_\infty = G/\overline{H}$  dove  $\overline{H}$  è la chiusura di  $H$  in  $G$ , cioè:  $\overline{H} = G \cap \widehat{H} \subseteq \widehat{H}$ . Consideriamo ora la proiezione canonica  $f: G \rightarrow G/\overline{H}$ . Essa si estende per continuità ad un

omomorfismo  $\widehat{f}: \widehat{G} \rightarrow (G/\overline{H})^\wedge = (G/H)^\wedge$ . Poiché  $\widehat{f}$  è continuo e  $(G/H)^\wedge$  è di Hausdorff, il nucleo  $\text{Ker } \widehat{f}$  di  $\widehat{f}$  contiene la chiusura di  $H$  in  $\widehat{G}$ , cioè  $\text{Ker } \widehat{f} \supseteq \widehat{H}$ . Siano  $x$  un elemento di  $\text{Ker } \widehat{f}$  e  $\{x_n, n \in N\}$  una successione di elementi di  $G$  convergente verso  $x$ . Allora la successione  $\{f(x_n)\}$  converge verso lo zero e si può supporre che  $f(x_n) \in n(G/\overline{H}) = n f(G)$ . Esistono perciò, per ogni  $n \in N$ , un elemento  $g_n \in G$  ed uno  $h_n \in \overline{H} \subseteq \widehat{H}$  tali da aversi  $x_n - ng_n = h_n$ ; quindi la successione  $\{h_n\}$  converge verso  $x$  il quale pertanto appartiene ad  $\widehat{H}$ . Dunque  $\text{Ker } \widehat{f} = \widehat{H}$ . Per la prima parte del teorema,  $\widehat{f}(\widehat{G})$  è isomorfo ad un sommando diretto  $K$  di  $\widehat{G}$  complementare di  $\widehat{H}$ :  $\widehat{G} = \widehat{H} \oplus K$ . Si verifica immediatamente che la topologia naturale di  $\widehat{G}$  è la topologia prodotto delle topologie naturali di  $\widehat{H}$  e di  $K$ , quindi ([8], Teorema 25, Cap. 6)  $K$  è completo. Allora  $\widehat{f}(\widehat{G})$  è completo, contiene  $(G/\overline{H})$  come sottogruppo puro ed è contenuto in  $(G/\overline{H})^\wedge$ ; pertanto  $\widehat{f}(\widehat{G}) = (G/H)^\wedge$ .

Per ogni numero cardinale  $\alpha$  sia  $\Gamma_p(\alpha)$  il prodotto diretto di  $\alpha$  gruppi ciascuno isomorfo al gruppo degli interi  $p$ -adici (se  $\alpha = 0$ ,  $\Gamma_p(\alpha) = 0$ ); per ogni gruppo  $G$  indichiamo con  $\alpha_p(G)$  la dimensione dello spazio vettoriale  $G/pG$  sul corpo  $Z/pZ$ . Possiamo ora enunciare il

**TEOREMA 3.** *Il completamento naturale di un gruppo ridotto e libero da torsione  $G$  è isomorfo ad un sommando diretto del prodotto diretto  $\Gamma$  dei gruppi  $\Gamma_p(\alpha_p(G))$ ,  $p \in P$ ; se poi tutti gli  $\alpha_p$  sono finiti si ha  $\widehat{G} \cong \Gamma$ .*

*Due gruppi ridotti e liberi da torsione  $G$  ed  $H$  hanno completamenti isomorfi se e solo se  $\alpha_p(G) = \alpha_p(H)$  per ogni  $p \in P$ .*

La dimostrazione si conduce in questo modo: si prova prima il teorema quando la topologia naturale coincide con quella  $p$ -adica, nel qual caso i gruppi liberi da torsione sono  $Z_p$ -moduli; quindi si applica il teorema 1.

Dimostriamo pertanto le proposizioni seguenti.

P.6. Se  $M$  è uno  $Z_p$ -modulo ridotto e libero da torsione,  $\widehat{M}$  è isomorfo al completamento naturale di uno  $Z_p$ -modulo libero di rango  $\alpha_p(M)$ . Due  $Z_p$ -moduli ridotti e liberi da torsione  $L$  ed  $M$  hanno completamenti isomorfi se e solo se  $\alpha_p(L) = \alpha_p(M)$ .

DIMOSTRAZIONE. Sia  $S$  un sistema di elementi di  $M$  rappresentante una base dello spazio vettoriale  $M/pM$ . Si verifica immediatamente che  $S$ , nel gruppo  $M$ , è un sistema massimale di elementi  $p$ -indipendenti, [4]. Pertanto il sottogruppo  $B$  generato da  $S$  è libero di rango  $\alpha_p(M)$ , è  $p$ -puro in  $M$  ed il gruppo  $M/B$  è  $p$ -divisibile ([4], Lemma 3). Poichè gli elementi di  $S$  sono indipendenti sopra  $Z$ , essi sono indipendenti anche sopra  $Z_p$ ; quindi il sotto- $Z_p$ -modulo  $B_p$  generato da  $S$  è libero di rango  $\alpha_p(M)$ ; inoltre  $B_p$  è puro in  $M$  ed  $M/B_p$  è divisibile. Allora  $\widehat{B}_p \cong \widehat{M}$ . La seconda parte della proposizione è conseguenza della prima e del fatto che, essendo  $M$  puro e denso in  $\widehat{M}$ , risulta:  $M/pM = M/(M \cap p\widehat{M}) \cong (M + p\widehat{M})/p\widehat{M} = \widehat{M}/p\widehat{M}$ .

P.7. Se  $M$  è uno  $Z_p$ -modulo ridotto e libero da torsione,  $\widehat{M}$  è isomorfo ad un sommando diretto di  $\Gamma_p(\alpha_p(M))$ . Se poi  $\alpha_p(M)$  è finito, si ha  $\widehat{M} \cong \Gamma_p(\alpha_p(M))$ .

DIMOSTRAZIONE. Poniamo  $\Gamma = \Gamma_p(\alpha_p(M))$  e sia  $K$  uno  $Z_p$ -modulo libero di rango  $\alpha_p(M)$ . Si ha:  $K = \sum_i K_i$ ,  $i \in I$ , dove l'insieme indicante  $I$  ha cardinale  $\alpha_p(M)$  e  $K_i$  è isomorfo al gruppo additivo di  $Z_p$  per ogni  $i \in I$ . Per mezzo delle inclusioni naturali  $K = \sum_i K_i \subseteq \prod_i K_i \subseteq \prod_i \widehat{K}_i = \Gamma$  si vede che  $K$  è un sottogruppo puro di  $\Gamma$ . Osserviamo ora che  $\Gamma$  è completo nella topologia naturale.

Dopo aver identificato  $\Gamma$  con un sottogruppo puro e denso di  $\widehat{\Gamma}$ , siano  $\xi$  un elemento di  $\widehat{\Gamma}$  e  $\{\xi_n, n \in N\}$  una successione di Cauchy in  $\Gamma$  convergente verso  $\xi$  in  $\widehat{\Gamma}$ . Per ogni  $i \in I$ , la successione  $\{\xi_{n,i}\}$ , ottenuta proiettando su  $\widehat{K}_i$  la  $\{\xi_n\}$ , è di Cauchy in  $\widehat{K}_i$ , quindi converge verso un elemento  $f_i(\xi) \in \widehat{K}_i$  e si verifica subito che  $f_i(\xi)$  non varia sostituendo la successione  $\{\xi_n\}$  con un'altra di Cauchy in  $\Gamma$  e convergente verso  $\xi$  in  $\widehat{\Gamma}$ . In particolare, se  $\xi \in \Gamma$ ,  $f_i(\xi)$  coincide con la  $i$ -com-

ponente  $\xi_i$  di  $\xi$ . Abbiamo così un omomorfismo  $f_i: \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{K}_i$ . L'omomorfismo  $f: \widehat{\Gamma} \rightarrow \Gamma$  definito dalle relazioni  $f(\xi)_i = f_i(\xi)$ ,  $i \in I$ , subordina sopra  $\Gamma$  l'identità; pertanto  $\Gamma$  è un sommando diretto di  $\widehat{\Gamma}$ , quindi  $\Gamma$  è completo e  $\Gamma = \widehat{\Gamma}$ . Allora, per il teorema 2,  $\widehat{K}$  è un sommando diretto di  $\Gamma$  e, per la P.6,  $\widehat{K} \cong \widehat{M}$ . Se  $\alpha_p(M)$  è finito,  $K = \prod_i K_i$  e  $\prod_i K_i$  è puro e denso in  $\prod_i \widehat{K}_i = \Gamma$ ; dunque  $\widehat{M} \cong \Gamma$ .

P.8. Se  $G$  è un gruppo di Hausdorff, i gruppi  $G/pG$  e  $G_p^*/pG_p^*$  sono isomorfi per ogni  $p \in P$ .

DIMOSTRAZIONE. Moltiplichiamo tensorialmente per  $Z/pZ$  la sequenza esatta

$$0 \rightarrow G \xrightarrow{\varphi} G^* \rightarrow G^*/\varphi(G) \rightarrow 0;$$

$\varphi(G)$  è puro in  $G^*$  ed il prodotto tensoriale di un gruppo divisibile per uno di torsione è nullo: dunque  $G/pG \cong G^*/pG^*$ . D'altra parte  $G^*/pG^*$  è chiaramente isomorfo a  $G_p^*/pG_p^*$ .

Il teorema 3 è ora una conseguenza immediata del teorema 1, delle proposizioni precedenti e del fatto che, per ogni  $p \in P$ , risulta  $G/pG \cong \widehat{G}/p\widehat{G}$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] N. BOURBAKI, *Algebre commutative*, Ch. I. Paris 1961.
- [2] A. L. S. CORNER, *Every countable reduced torsion-free ring is an endomorphism ring*. Proc. London Math. Soc. (3) 13 (1963) 687-710.
- [3] L. FUCHS, *Abelian groups*, Budapest 1958.
- [4] L. FUCHS, *Notes on abelian groups. II*. Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11 (1960) 117-125.
- [5] D. K. HARRISON, *Infinite abelian groups and homological methods*, Annals of Math. 69 (1959) 366-91.
- [6] D. K. HARRISON, *On the structure of Ext*. Topics in abelian groups, Edited by J. M. Irwin and E. A. Walker (1963) 195-209.
- [7] I. KAPLANSKY, *Infinite abelian groups* (Ann. Arbor 1954).
- [8] J. KELLEY, *General topology*. (1955).