RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ROBERTO MAGARI

Su una questione riguardante le chiusure di Moore

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 189-198

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__189_0>

SU UNA QUESTIONE RIGUARDANTE LE CHIUSURE DI MOORE

ROBERTO MAGARI *)

SUNTO: Sia $\langle E, K \rangle$ un C.G. (Cfr. [4]) [1]) e G, X sottoinsiemi di E. Si studiano condizioni affinchè sia $K(G \cap KX) \supseteq X$.

1. Premessa.

Sia W un insieme non vuoto e sia $F_W = \bigcup_{0 \leq i < \omega} W^{W^i}$ il *clono* (cfr. [1] cap. III) delle operazioni finitarie su W.

Allo scopo di affrontare un problema riguardante la classe equazionale di algebre « associata » a $\langle W, F \rangle$ dove F sia un fissato sottoinsieme di F_W, (cfr. [5] premessa), è opportuno caratterizzare gli elementi $f \in F_W$ che risultano, parlando imprecisamente, « esprimibili » mediante le operazioni binarie a loro volta « esprimibili » mediante f. In termini più precisi, tenuto conto del fatto che l'operatore K definito da:

$$(1) \qquad KX = \text{clono generato da } X \qquad (X \subseteq F_W)$$

è un operatore di Moore (cfr. [1] cap. I e [2] cap. III) [1]), ossia, secondo la terminologia di [4], $\langle F_W, K \rangle$ è un C.G., si tratta di caratteriz-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca del C.N.R. (gruppo n. 37 del Comitato per la Matematica) per l'anno 66-67.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

1) ved. anche il successivo n. 2.

zare quegli elementi f di F_W per cui è:

$$f \in K(W^{W^2} \cup K\{f\}). \tag{2}$$

In questa breve nota ho raccolto alcune semplici osservazioni preliminari sulla questione che hanno una portata più generale e che precisamente si inquadrano nel problema seguente:

sia $\langle E, K \rangle$ *un* C.G. *e* $G \subseteq E$. *Si chiede di studiare l'insieme degli* $X \subseteq E$ *per cui è:*

$$X \subseteq K(G \cap KX). \tag{3}$$

Il problema ora esposto presenta interesse anche per il seguente motivo. Sia E l'insieme delle espressioni di un linguaggio logico e K l'operatore conseguenza, ossia l'operatore che ad ogni insieme X di espressioni associa l'insieme KX delle espressioni che sono conseguenza di X. È ben noto che $\langle E, K \rangle$ è allora un C.G. (cfr. ad esempio [4]). Se X è una teoria (ossia un chiuso di $\langle E, K \rangle$) e G è un insieme di espressioni, la condizione (3) (equivalente, come si vedrà più oltre, alla: $K(G \cap KX) = KX$ e quindi, se X è un chiuso, alla $K(G \cap X) = X$) esprime la circostanza che è possibile reperire in G un sistema di assiomi per X.

2. Richiami sui C.G.

Per comodità del lettore ricordo che un C.G. è un sistema $\langle E, K \rangle$ in cui:

(4,1) E è un insieme

(4,2) K è un'applicazione da $\mathcal{P}(E)$ a $\mathcal{P}(E)$ tale che:

(4,21) $\quad X \subseteq KX \qquad (X \in \mathcal{P}(E))$

(4,22) $\quad K^2 = K$

(4,23) $\quad K(X \cup Y) \supseteq KX \qquad (X, Y \in \mathcal{P}(E))$.

Se ne deducono immediatamente le:

$$\left.\begin{array}{ll}(4{,}24) & K(X \cup Y) \supseteq KX \cup KY\,{}^{2})\,{}^{3}) \\ (4{,}25) & \text{se } X \subseteq Y \text{ allora } KX \subseteq KY\,{}^{2}) \\ (4{,}26) & K(X \cap Y) \subseteq KX \cap KY\,{}^{3})\end{array}\right\} (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Se $\langle E, K \rangle$ è un C.G., K si dice un C.G.-*operatore* o *operatore di Moore* su E.

Ricordo ancora che, detto $\mathcal{C}$ l'insieme dei « chiusi » di un C.G.

$$\langle E, K \rangle \quad (\mathcal{C} = \{X \in \mathcal{P}(E) : X = KX\} =$$

$$= \{X \in \mathcal{P}(E) : \text{esiste un } Y \in \mathcal{P}(E)) \text{ con } X = KY\})$$

si ha:

(5,1) $\mathcal{C}$ è chiuso rispetto alle intersezioni (anche infinite) [4])

$$(5{,}2) \qquad KX = \bigcap_{\substack{Y \in \mathcal{C} \\ X \subset Y}} Y \qquad (X \in \mathcal{P}(E)).$$

Viceversa se E è un insieme e $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(E)$ soddisfa la (5,1) esiste uno e un sol operatore di Moore K su E (quello appunto definito dalla (5,2)), per cui $\mathcal{C}$ è l'insieme dei chiusi di $\langle E, K \rangle$.

---

[2]) Per un qualunque $K : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ le (4,23), (4,24), (4,25), (4,26) sono ovviamente equivalenti.

[3]) Più in generale valgono le:

$$\left.\begin{array}{ll}(4{,}241) & K \bigcup\limits_{X \in \mathcal{M}} X \supseteq \bigcup\limits_{X \in \mathcal{M}} KX \\ (4{,}261) & K \bigcap\limits_{X \in \mathcal{M}} X \subseteq \bigcap\limits_{X \in \mathcal{M}} KX\end{array}\right\} \mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(E).$$

[4]) La proposizione va intesa secondo la convenzione per cui $\bigcap\limits_{X \in \emptyset} X = E$, $\bigcup\limits_{X \in \emptyset} X = \emptyset$.

Sarà utile nel seguito la seguente:

DEF. 1. *Sia* $\langle E, K \rangle$ *un* C.G. *e* $Y \subseteq E$. *Si dirà operatore relativo a* Y *l'applicazione* K_Y *da* $\mathcal{P}(Y)$ *a* $\mathcal{P}(Y)$ *definita da:*

$$K_Y X = Y \cap KX \qquad (X \subseteq Y). \tag{6}$$

Facilmente si verifica che $\langle Y, K_Y \rangle$ è un C.G.

3. Ora e nel seguito $\langle E, K \rangle$ indicherà sistematicamente un C.G. e $\mathcal{C}$ l'insieme dei suoi chiusi.

Si ha ovviamente:

PROP. 1. *Se* $X, G \in \mathcal{P}(E)$, *sono equivalenti le condizioni:*

$$K(G \cap KX) \supseteq X \tag{3}$$

$$K(G \cap KX) = KX. \tag{3,1}$$

DIM.

da (3) segue (3,1). Valga la (3), allora è:

$$K(G \cap KX) = KK(G \cap KX) \supseteq KX \tag{7}$$

e anche:

$$G \cap KX \subseteq KX$$

da cui:

$$K(G \cap KX) \subseteq KKX = KX \tag{8}$$

e dalle (7) e (8) segue la (3,1).

Che dalla (3,1) segua la (3) è ovvio.

PROP. 2. *Sono equivalenti le condizioni:*

$$\left.\begin{array}{ll} (9,1) & KX \cap KG \supseteq X \\ (9,2) & KX \cap KG \supseteq KX \\ (9,3) & KG \supseteq KX \\ (9,4) & KG \supseteq X \end{array}\right\} \quad (X, G \in \mathcal{P}(E))$$

e ciascuna di esse è condizione necessaria per la validità della (3).

DIM. L'equivalenza fra le (9,1), (9,2), (9,3), (9,4) è ovvia.

Valga la (3).

Si ha:

$$K(KX \cap G) \subseteq KKX \cap KG = KX \cap KG$$

e dalla (3) segue ora la (9,1).

Che le (9) non siano in generale sufficienti per la validità della (3) è mostrato dal seguente:

Esempio α.

Sia $\langle E, \leq \rangle$ un insieme totalmente ordinato avente almeno tre elementi distinti a, b, c (e supponiamo $a < b < c$) e K sia definito da:

(10) $\qquad KX = \{ y \in E : \text{ esiste almeno un } x \in X \text{ con } x \leq y \} \quad (X \subseteq E).$

$\langle E, K \rangle$ è ovviamente un C.G. e posto $G = \{a\}, X = \{b\}$ si ha ovviamente $b \in KG$ cioè $X \subseteq KG$, ossia la (9, 4), mentre è:

$$K(G \cap KX) = K(\{a\} \cap \{y \in E : y \geq b\}) = K\varnothing = \varnothing \not\ni b$$

Fissato G prendiamo ora in considerazione i due insiemi:

$$\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq K(KX \cap G)\}$$

$$\overline{\mathcal{F}}_G = \{X \in \mathcal{C} : X \subseteq K(KX \cap G)\} = \{X \in \mathcal{C} : X \subseteq K(X \cap G)\} =$$
$$= \{X \in \mathcal{C} : X = K(X \cap G)\}$$

Ovviamente è:

(11) $\qquad X \in \mathcal{F}_G$ se e solo se $KX \in \overline{\mathcal{F}}_G$.

Si ha:

PROP. 3. *$\mathcal{F}_G$ è chiuso rispetto alle unioni (anche infinite).*

DIM. Sia $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{F}_G$. Si ha:

$$K(G \cap K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X) \supseteq K(G \cap \bigcup_{X \in \mathcal{M}} KX) = K \bigcup_{X \in \mathcal{M}} (G \cap KX) \supseteq$$
$$\supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} K(G \cap KX) \supseteq \bigcup_{X \in \mathcal{M}} X$$

cioè

$$\bigcup_{X \in \mathcal{M}} X \in \mathcal{F}_G .$$

Minore interesse ha lo studio degli insiemi:

$$\mathcal{G}_X = \{G \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq K(KX \cap G)\} ; \overline{\mathcal{G}}_X = \{G \in \mathcal{C} : X \subseteq K(KX \cap G)\},$$

ottenuti fissando X.

Banalmente si ha:

PROP. 4. *$\mathcal{G}_X$ è permesso rispetto all'unione, ossia:*

(12) se $G \in \mathcal{G}_X$ e $H \subseteq E$, $G \cup H \in \mathcal{G}_X$.

Quanto a $\overline{\mathcal{G}}_X$ si ha:

(13) $$\overline{\mathcal{G}}_X = \{G \in \mathcal{C} : X \subseteq G\}$$

ossia se G è un chiuso le (9) sono sufficienti per la validità della (3). (In altri termini si ha:

(14) se $G \in \mathcal{C}$ allora $\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : X \subseteq G\}$.

DIM. ovvia).

4. Allo scopo di facilitare, nei casi particolari, lo studio dell'insieme $\mathcal{F}_G$ sarà utile considerare l'insieme:

$$\mathcal{R}_G = \{G \cap KX : X \in \mathcal{F}_G\}.$$

Sia poi $\mathcal{C}_G$ l'insieme dei chiusi di $\langle G, K_G \rangle$.

PROP. 5. *Si ha:*

(15) $$\mathcal{C}_G = \mathcal{R}_G = \{G \cap KX : X \subseteq E\} = \{G \cap X : X \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

DIM. Sia $F = G \cap KX$ con $X \subseteq E$. Si ha:

$$K_G F = K_G (G \cap KX) = G \cap K(G \cap KX) \subseteq G \cap KG \cap KX = G \cap KX = F$$

e poichè $\langle G, K_G \rangle$ è un C.G. si ha addirittura $K_G F = F$ ossia $F \in \mathcal{C}_G$.

Sia $F \in \mathcal{C}_G$ cioè ($F \subseteq G$ e) $F = K_G F$. È allora:

$F = G \cap K F$ e quindi $F \subseteq K(G \cap KF)$ cioè $F \in \mathcal{F}_G$ onde $F \in \mathcal{R}_G$.

È poi ovvio che è $\mathcal{R}_G \subseteq \{G \cap KX : X \subseteq E\}$ onde i primi tre insiemi scritti coincidono. Dalla (11) segue poi che

$$\mathcal{R}_G = \{G \cap X : X \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

Sia ora $F \in \mathcal{C}_G$ e indichiamo con $\mathcal{E}_F$ l'insieme $\{X \in \overline{\mathcal{F}}_G : G \cap X = F\}$

Facilmente si ha:

PROP. 6. $\overline{\mathcal{F}}_G = \bigcup_{F \in \mathcal{C}_G} \mathcal{E}_F$.

DIM. Poichè per definizione è $\mathcal{E}_F \subseteq \overline{\mathcal{F}}_G$ basterà dimostrare che è $\overline{\mathcal{F}}_G \subseteq \bigcup_{F \in \mathcal{C}_G} \mathcal{E}_F$. Sia $X \in \overline{\mathcal{F}}_G$, posto $F = G \cap X$ segue dalla prop. 5 che F è un chiuso di $\langle G, K_G \rangle$ e si ha $X \in \mathcal{E}_F$. Ne segue la proposizione.

D'altronde è subito visto che per ogni $F \in \mathcal{C}_G$ è:

$$\mathcal{E}_F = \{KF\}. \tag{16}$$

Sia infatti $x \in \mathcal{E}_F$, cioè $X \in \overline{\mathcal{F}}_G$ e $X \cap G = F$.

La (3,1) diviene, tenuto conto del fatto che X è chiuso:

$$K(G \cap X) = X \tag{17}$$

cioè appunto $X = KF$.

Viceversa si ha:

$$G \cap KF = K_G F = F$$

e anche

$$K(G \cap KF) = KK_G F = KF$$

e da queste segue $KF \in \mathcal{E}_F$.

Si arriva così alla seguente:

PROP. 7. $$\overline{\mathcal{F}}_G = \{KF : F \in \mathcal{C}_G\}.$$

La prop. 7 è notevolmente utile perchè riduce lo studio di $\overline{\mathcal{F}}_G$ a quello di $\mathcal{C}_G$.

D'altra parte $\mathcal{F}_G$ è legato a $\overline{\mathcal{F}}_G$ dalla:

(18) $$\mathcal{F}_G = \{X \in \mathcal{P}(E) : KX \in \overline{\mathcal{F}}_G\}.$$

5. La condizione (3) e l'equivalenza associata a *K*.

Ricordo che, secondo la terminologia di [4] (al quale rimando per maggiori dettagli) dato un C. G. $\langle E, K \rangle$ il preordine, $\leq$, e l'equivalenza R associati a K sono così definiti:

$$\left.\begin{array}{ll} (19) & x \leq y \text{ se e solo se } y \in K\{x\} \\ (20) & xRy \quad \text{se e solo se } x \leq y \text{ e } y \leq x \text{ (se e solo se,} \\ & \qquad \text{quindi, } K\{x\} = K\{y\}) \end{array}\right\} (x, y \in E).$$

Indichiamo ora con Q il *quantore su E associato alla R* (cfr. [3]) definito, ricordo, da:

(21) $$QX = \{y \in E : \text{esiste un } x \in X \text{ con } yRx\} \qquad (X \subseteq E).$$

Ovviamente è:

(22) Q è più fine di K, cioè:

(22,1) $$QX \subseteq KX \qquad (X \subseteq E)$$

inoltre,

(23) $$QKX = KX \qquad (X \subseteq E)$$

cioè:

(23,1) ogni chiuso di $\langle E, K \rangle$ è unione di elementi di E/R.

(24) $$KQX = KX.$$

Indichiamo ora con ϱ, σ, k, le relazioni binarie definite su $\mathcal{P}(E)$ dalle:

$$\left.\begin{array}{lll} (25) & X\varrho Y \text{ se e solo se } QX = QY \\ (26) & G\,\sigma X \text{ se e solo se } G, X \text{ soddisfano la (3)} \\ (27) & X k Y \text{ se e solo se } KX = KY \end{array}\right\} (X, Y, G \in \mathcal{P}(E)).$$

Si verifica facilmente che:

PROP. 8.

(i) ϱ, k sono di equivalenza

(ii) ϱ è più fine di k, cioè:

$$(ii, 1) \quad \text{se } X\varrho Y \text{ allora } X k Y \qquad (X, Y \in \mathcal{P}(E)).$$

Vale la seguente

PROP. 9. *Sia* $G_1\,\varrho\, G_2$, $X_1\, k\, X_2$, $(G_1, G_2, X_1, X_2 \in \mathcal{P}(E))$ *allora è*: $G_1\,\sigma X_1$ *se e solo se* $G_2\,\sigma X_2$. *In particolare sono equivalenti le seguenti condizioni:*

$$\left.\begin{array}{lr} (28,1) & G\,\sigma X \\ (28,2) & QG\,\sigma X \\ (28,3) & G\,\sigma QX \\ (28,4) & G\,\sigma KX \\ (28,5) & QG\,\sigma QX \\ (28,6) & QG\,\sigma KX \end{array}\right\} (G, X \in \mathcal{P}(E)).$$

DIM. Tenuto conto delle considerazioni precedenti basterà dimostrare che sono equivalenti le (28,1), (28,2), (28,4).

L'equivalenza fra la (28,1) e la (28,4) segue dalla (11).

Valga la (28,2) sia cioè:

$$K(QG \cap KX) = KX$$

allora è [5]):

$$K(G \cap KX) = KQ(G \cap KX) = KQ(G \cap QKX) =$$

$$= K(QG \cap QKX) = K(QG \cap KX) = KX,$$

vale cioè la (28,1). Che poi la (28,1) implichi la (28,2) segue immediatamente dalla $G \subseteq QG$, tenuto conto della prop. 4.

---

[5]) Ricordo che vale per Q la: $Q(X \cap QY) = QX \cap QY$ $(X, Y \in \mathcal{P}(E))$. Cfr. P. R. HALMOS [3]).

TESTI CITATI

[1] P. M. COHN, *Universal Algebra*, New York 1965.

[2] P. DUBREIL, M. L. DUBREIL JACOTIN, *Leçons d'algèbre moderne,* Paris 1961.

[3] P. R. HALMOS, *Algebraic Logic,* New York 1962.

[4] R. MAGARI, *Calcoli generali e spazi* V_a (Calcoli generali I). Le Matematiche Vol. XXI, Fasc. 1 (1966) pagg. 83-108.

[5] R. MAGARI, *Su una classe equazionale di algebre.*

Manoscritto pervenuto in redazione il 6-3-1967