RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

M. MIRANDA

Sulle singolarità delle frontiere minimali

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 38 (1967), p. 180-188

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__180_0>

SULLE SINGOLARITÀ DELLE FRONTIERE MINIMALI

M. MIRANDA *)

Per le definizioni e le notazioni rinviamo a [5].

In questo lavoro si prova che la dimensione di Hausdorff dell'insieme delle singolarità di una frontiera minimale n-dimensionale, approssimabile in L^1_{loc} con ipersuperfici minimali cartesiane analitiche non può superare $n-2$.

Ringrazio Ennio De Giorgi con il quale ho discusso i risultati di questo lavoro.

1. Estendendo un risultato di Triscari (v. Teorema V di [8]) per le funzioni caratteristiche d'insieme dimostriamo il

TEOREMA 1. *Sia $\Omega \subset R^n$ aperto e $f \in BV_{\text{loc}}(\Omega)$. Indicata con f^* la funzione definita in $\Omega \times R$ da*

$$f^*(x, y) = f(x), \qquad per \qquad x \in \Omega, \quad y \in R,$$

si ha che f ha gradiente minimale in Ω se e solo se f^* ha gradiente minimale in $\Omega \times R$.

DIM. Ricordiamo (v. § 3 di [4]) che se per $g \in BV_{\text{loc}}(\Omega \times R)$ e $A \subset \Omega \times R$ aperto si pone

$$(1.1) \qquad \int_A |D_x g| = \sup \left\{ \int \left(g \sum_{i=1}^n D_i \alpha_i \right) dx\, dy\,;\ \alpha_i \in C_0^1(A), \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \leq 1 \right\},$$

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R..

si ha (cfr. Teor. 3.3 di [4])

$$\int_A |D_x g| = \int_R dy \int_{A_y} |Dg_y|, \tag{1.2}$$

dove si è posto, per ogni $y \in R$, $A_y = \{x;\ x \in R^n,\ (x, y) \in A\}$ e $g_y(x)$ è la funzione definita in A_y dalla relazione $g_y(x) = g(x, y)$. Dalla (1.2) si ricava, se $\Omega_0 \subset \Omega$ è aperto e $I \subset R$ è un intervallo,

$$\int_{\Omega_0 \times I} |Df^*| = \int_{\Omega_0 \times I} |D_x f^*| = \int_I dy \int_{\Omega_0} |Df| = \operatorname{mis} I \cdot \int_{\Omega_0} |Df|. \tag{1.3}$$

Cominciamo allora col provare che se f ha gradiente minimale in Ω allora f^* ha gradiente minimale in $\Omega \times R$. Si tratta di far vedere che per ogni compatto $K \subset \Omega \times R$ e ogni $g \in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega \times R)$ con $g = f^*$ in $\Omega \times R - K$ vale

$$\int_K |Df^*| \leq \int_K |Dg|. \tag{1.4}$$

Fissati K e g sia Ω_0 un aperto relativamente compatto in Ω e I un intervallo di R tali che

$$\Omega_0 \times I \supset K. \tag{1.5}$$

Si avrà allora, per le (1.1) e (1.2),

$$\int_{\Omega_0 \times I} |Dg| \geq \int_{\Omega_0 \times I} |D_x g| = \int_I dy \int_{\Omega_0} |Dg_y|. \tag{1.6}$$

Per la proprietà di minimo di f essendo

$$\int_{\Omega_0} |Df| \leq \int_{\Omega_0} |Dg_y|, \qquad \forall\, y \in R, \tag{1.7}$$

dalle (1.3) e (1.6) si ricava

$$\int_{\Omega_0 \times I} |Df^*| \leq \int_{\Omega_0 \times I} |Dg|. \tag{1.8}$$

Poichè vale ovviamente

$$(1.9)\qquad \int_{\Omega_0\times I-K} |Df^*| = \int_{\Omega_0\times I-K} |Dg|,$$

dalle (1.5) e (1.8) si ricava la (1.4).

Proviamo ora che se f^* ha gradiente minimale in $\Omega\times R$ allora f ha gradiente minimale in Ω. Si tratta di far vedere che per ogni compatto $K\subset\Omega$ e ogni $g\in BV_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ con $g=f$ in $\Omega-K$ si ha

$$(1.10)\qquad \int_K |Df| \leq \int_K |Dg|.$$

Fissati K e g, per ogni $\varrho>0$ poniamo

$$g_\varrho(x,y)=\begin{cases} f(x), & \text{per} \quad y\geq\varrho \quad \text{oppure} \quad y\leq 0,\\ g(x), & \text{per} \quad 0<y<\varrho,\end{cases}$$

e indichiamo con Ω_0 un aperto relativamente compatto in Ω verificante

$$(1.11)\qquad \Omega_0\supset K.$$

Per la proprietà di minimo di f^*, se si indica con I_ϱ l'intervallo chiuso $(0,\varrho)$, si ha

$$(1.12)\qquad \int_{\Omega_0\times I_\varrho} |Dg_\varrho| \geq \int_{\Omega_0\times I_\varrho} |Df^*| = \varrho\cdot\int_{\Omega_0} |Df|.$$

D'altra parte vale

$$(1.13)\qquad \int_{\Omega_0\times I_\varrho} |Dg_\varrho| \leq \int_{\Omega_0\times I_\varrho} |D_x g_\varrho| + \int_{\Omega_0\times I_\varrho} |D_{n+1}\, g_\varrho|,$$

e per il Teor. 3.3 di [4] e la definizione di g_ϱ si ha

$$(1.14)\qquad \int_{\Omega_0\times I_\varrho} |D_{n+1}\, g_\varrho| = \int_{\Omega_0} dx \int_{I_\varrho} |D_{n+1}\, g_\varrho| = 2\int_{\Omega_0} |f(x)-g(x)|\, dx,$$

mentre per le (1.2) e la definizione di g_ϱ si ha

$$\int_{\Omega_0 \times I_\varrho} | D_x g_\varrho | = \varrho \cdot \int_{\Omega_0} | Dg | . \tag{1.15}$$

Dalle (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15) si ricava allora

$$\varrho \int_{\Omega_0} | Df | \leq \varrho \int_{\Omega_0} | Dg | + 2 \int_{\Omega_0} | f(x) - g(x) | \, dx, \tag{1.16}$$

da cui, per l'arbitrarietà di ϱ, segue

$$\int_{\Omega_0} | Df | \leq \int_{\Omega_0} | Dg | . \tag{1.17}$$

Poichè vale ovviamente

$$\int_{\Omega_0 - K} | Df | = \int_{\Omega_0 - K} | Dg | . \tag{1.18}$$

dalle (1.17) e (1.11) segue la (1.10).

c. v. d.

2. Ricordiamo (v. [5]) che un insieme $E \subset R^n$ ha frontiera minimale nell'aperto $\Omega \subset R^n$ se la sua funzione caratteristica ha gradiente minimale in Ω. Ricordiamo inoltre (v. Teor. 6.5 di [5]) che se la frontiera di E è minimale in Ω allora $\mathcal{F}E \cap \Omega$ risulta costituita di una parte singolare N, chiusa in Ω, e avente misura $(n-1)$-dimensionale nulla e di una parte regolare che è una ipersuperficie analitica. Allora in ogni punto regolare di $\mathcal{F}E \cap \Omega$ si possono considerare le curvature dell'ipersuperficie $\mathcal{F}E \cap \Omega$. Indicheremo allora (v. [6], § 4) con γ_E la misura su Ω definita da

$$\gamma_E(B) = \int_{B \cap (\mathcal{F}E - N)} c^2 \, dH_{n-1} , \quad \forall B \subset \Omega \text{ di Borel}, \tag{2.1}$$

dove c^2 indica la somma dei quadrati delle curvature principali di $\mathcal{F}E \cap \Omega$.

In [6] è stato provato (v. Teor. 6 di [6]) che la misura γ_E è semicontinua (sugli aperti) rispetto alla convergenza in L^1_{loc} per l'insieme E. Utilizzando questo risultato possiamo provare il seguente

Teorema 2. *Per ogni intero $n > 4$ (¹) esiste una costante positiva $\delta(n)$ tale che: se $E \subset R^n$ ha frontiera minimale nell'aperto $\Omega \subset R^n$, se x_0 è un punto singolare di $\mathcal{F}E \cap \Omega$ e $\varrho \leq \operatorname{dist}(x_0, \partial\Omega)$, allora si ha*

$$\gamma_E(\{x;\ |x - x_0| < \varrho\}) \geq \delta(n)\, \varrho^{n-3}. \tag{2.2}$$

Dim. Supponiamo per assurdo che per un intero n la costante $\delta(n)$ non esista. In tale caso, essendo l'espressione

$$\varrho^{3-n}\gamma_E(\{x;\ |x - x_0| < \varrho\})$$

invariante per traslazioni e omotetie, si può costruire una successione di insiemi $\{E_h\}$ aventi frontiera minimale in $\{x;\ |x| < 1\}$ e tali che l'origine sia punto singolare per $\mathcal{F}E_h$ e per i quali valga

$$\lim_{h \to \infty} \gamma_{E_h}(\{x;\ |x| < 1\}) = 0. \tag{2.3}$$

Poiché le frontiere $\mathcal{F}E_h$ sono minimali in $\{x;\ |x| < 1\}$ si ha (v. formula (3.11) di [5])

$$\int_{\{x;\ |x|<1\}} |D\varphi_{E_h}| \leq \frac{1}{2} n\omega_n, \qquad \forall\ h\ (\omega_n = \operatorname{mis}\{x;\ |x| < 1\}). \tag{2.4}$$

Dalla (2.4) segue allora (v. Teor. I di [2]) che la successione $\{E_h\}$ è compatta in $L^1(\{x;\ |x| < 1\})$ e possiamo allora supporre che essa converga in $L^1(\{x;\ |x| < 1\})$ verso un insieme E. Per il Teor. 3 di [6] la $\mathcal{F}E$ risulta essere minimale in $\{x;\ |x| < 1\}$, per l'Osservazione 5 e il Teorema 4 di [6] l'origine è punto singolare di $\mathcal{F}E$, ed infine per il Teorema 6 di [6] dalla (2.3) si ricava

$$\gamma_E(\{x;\ |x| < 1\}) = 0. \tag{2.5}$$

---

¹) Per $n \leq 4$ le frontiere minimali non hanno punti singolari. Il risultato è dovuto a Triscari [8] per $n = 3$ e ad Almgren [1] per $n = 4$.

Mostriamo ora, riprendendo un ragionamento che si trova in [7], come dall'insieme E si possa passare ad un cono E^* avente le sue stesse caratteristiche, ovvero avente frontiera minimale in R^n, avente l'origine come punto singolare della frontiera e verificante la

$$\gamma_{E^*}(R^n) = 0. \tag{2.6}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ indichiamo con E_ε l'insieme $\{x : \varepsilon x \in E\}$. Avremo allora ovviamente che $\mathcal{F} E_\varepsilon$ è minimale in $\left\{x ; |x| < \dfrac{1}{\varepsilon}\right\}$, ha l'origine come punto singolare e verifica

$$\gamma_{E_\varepsilon}\left(\left\{x ; |x| < \frac{1}{\varepsilon}\right\}\right) = 0. \tag{2.7}$$

Dalla ricordata formula (3.11) di [5] si ha allora

$$\int_{\{x ; |x| < \varrho\}} |D \varphi_{E_\varepsilon}| \leq \frac{1}{2} n \omega_n \varrho^{n-1}, \qquad \forall \varrho < \frac{1}{\varepsilon}. \tag{2.8}$$

Dal Teor. 1.7 di [3] si ha che ogni successione $\{E_{\varepsilon_i}\}_i$ con $\varepsilon_i > 0$ e $\varepsilon_i \to 0$ è compatta in $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ e quindi possiamo determinarne una, che indicheremo ancora con $\{E_{\varepsilon_i}\}$, convergente in $L^1_{\text{loc}}(R^n)$ verso un insieme E^*. Per i già citati risultati di [6] la $\mathcal{F} E^*$ risulta essere minimale in R^n, singolare nell'origine e verificante la (2.6). Oltre a ciò, per l'Osservazione 3 di [6], si ha

$$\lim_{i \to \infty} \int_{\{x ; |x| < t\}} |D \varphi_{E_{\varepsilon_i}}| = \int_{\{x ; |x| < t\}} |D \varphi_{E^*}|, \tag{2.9}$$

per quasi tutti i $t \in R$ $(t > 0)$.

Ma poiché vale

$$\int_{\{x ; |x| < t\}} |D \varphi_{E_{\varepsilon_i}}| = \varepsilon_i^{-n+1} \int_{\{x ; |x| < \varepsilon_i t\}} |D \varphi_E|, \tag{2 10}$$

e poiché esiste (v. Cor. 2.6 di [5])

$$\lim_{\varrho \to 0+} \varrho^{1-n} \int_{\{x ; |x| < t\}} |D \varphi_E| = \alpha, \tag{2.11}$$

si ha, dalla (2.9),

$$t^{1-n} \int_{\{x\,;\,|x|<t\}} |D\varphi_{E^*}| = \alpha, \tag{2.12}$$

per quasi tutti i $t \in R$ $(t > 0)$.

Dalla (2.12) si ricava (v. Teor. 2.5 di [5]) che E^* è un cono di vertice 0.

$\mathcal{F}E^*$ essendo un cono minimale e verificando la (2.6) non può essere singolare in un sol punto, deve quindi esistere un $x_0 \neq 0$ che sia punto singolare di $\mathcal{F}E^*$. Indicato allora, per $\varepsilon > 0$, con E^*_ε l'insieme $\{x\,;\,\varepsilon(x-x_0) \in E^*\}$ si ha, ragionando come abbiamo fatto più sopra, che esiste una successione $\{E^*_{\varepsilon_i}\}_i$, con $\varepsilon_i > 0$ e $\varepsilon_i \to 0$, convergente verso un insieme E^{**}. L'insieme E^{**} risulterà allora essere un cilindro con asse parallelo al segmento Ox_0 e la sua sezione ortogonale L sarà un cono di R^{n-1}. $\mathcal{F}E^{**}$ sarà minimale, singolare nell'origine e varrà

$$\gamma_{E^{**}}(R^n) = 0, \tag{2.13}$$

allora anche L sarà minimale in R^{n-1} (v. Teor. 1) singolare nella origine e verificherà ovviamente

$$\gamma_L(R^{n-1}) = 0. \tag{2.14}$$

Ripetendo queste considerazioni si prova che per ogni intero s con $3 \leq s \leq n$ esiste in R^s un cono singolare nell'origine e avente frontiera minimale. Questo fatto è però in contraddizione coi risultati di Triscari [8] e Almgren [1], e quindi è assurdo supporre che esista un intero n per cui la tesi del teorema non sia valida, e perciò il Teorema 2 è completamente dimostrato.

c. v. d.

3. Dal Teorema 2, tenuto conto del Teorema 7 di [6], si ricava la seguente valutazione dell'insieme delle singolarità delle frontiere minimali approssimabili in L^1_{loc} con ipersuperfici cartesiane analitiche minimali.

TEOREMA, 3. *Sia* $\Omega \subset R^n$ *aperto e* $\{(x, f_h(x))\,;\, x \in \Omega\}$ *una successione di ipersuperfici cartesiane minimali analitiche. La successione d'insiemi* $\{(x, y)\,;\, x \in \Omega,\, y < f_h(x)\}$ *converga in* $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega \times R)$ *verso un insieme E. Detto allora N l'insieme dei punti singolari di* $\mathcal{F}E \cap (\Omega \times R)$, *si ha, per ogni compatto* $K \subset \Omega \times R$

$$H_{n-2}(N \cap K) < \infty, \tag{3.1}$$

DIM. Fissati K e $\varrho < \operatorname{dist}(K, \partial(\Omega \times R))$ sia $\{x_i\}$ un insieme di punti di $K \cap N$ tali che

$$\{x\,;\, |x - x_i| < \varrho,\, |x - x_j| < \varrho\} = \emptyset, \text{ per } i \neq j, \tag{3.2}$$

$$N \cap K \subset \bigcup_i \{x\,;\, x - x_i| < 2\varrho\}. \tag{3.3}$$

Avremo allora

$$\sum_i \gamma_E \{x\,;\, |x - x_i| < \varrho\} \leq \gamma_E(\{x\,;\, \operatorname{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}). \tag{3.4}$$

D'altra parte dal Teorema 2 si ricava

$$\sum_i \gamma_E(\{x\,;\, |x - x_i| < \varrho\}) \geq m(\varrho)\, \varrho^{n-2}\, \delta(n+1), \tag{3.5}$$

dove $m(\varrho)$ indica il numero dei punti x_i.

Dalle (3.4) e (3.5) si ha

$$m(\varrho)\, \varrho^{n-2} \leq [\delta(n+1)]^{-1}\, \gamma_E(\{x\,;\, \operatorname{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}). \tag{3.6}$$

Poichè dal Teorema 7 di [6] si ha ovviamente

$$\lim_{\varrho \to 0+} \gamma_E(\{x\,;\, \operatorname{dist}(x, K \cap N) < \varrho\}) < \infty, \tag{3.7}$$

dalle (3.6), (3.7), (3.3) e dalla definizione di H_{n-2} segue la (3.1).

c. v. d.

BIBLIOGRAFIA

[1] F. J. ALMGREN : *Some interior regularity theorems for minimal surfaces and an extension of Bernstein's theorem.* Ann. of Math., 1966.

[2] E. DE GIORGI : *Nuovi teoremi relativi alle misnre $(r - 1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.* Ric. Matem. Napoli, 1955.

[3] M. MIRANDA : *Distribuzioni aventi derivate misure e insiemi di perimetro localmente finito.* Ann. Scuola Norm. Sup., Pisa, 1964.

[4] M. MIRANDA : *Superfici cartesiane generalizzate ed insiemi di perimetro localmente finito sui prodotti cartesiani.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1964.

[5] M. MIRANDA : *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1965.

[6] M. MIRANDA : *Comportamento delle successioni convergenti di frontiere minimali.* (Questo stesso numero).

[7] D. TRISCARI : *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima.* Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 1963.

[8] D. TRISCARI : *Sulle singolarità delle frontiere orientate di misura minima nello spazio euclideo a 4 dimensioni.* Le Matematiche, Catania, 1963.

Manoscritto pervenuto in redazione il 17 marzo 1967