

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

BENEDETTO SCIMEMI

**Gruppi finiti dotati di automorfismi di ordine
 pq privi di coincidenze**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 38 (1967), p. 174-179

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__174_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

GRUPPI FINITI DOTATI DI AUTOMORFISMI DI ORDINE pq PRIVI DI COINCIDENZE

BENEDETTO SCIMEMI *)

Un gruppo finito G dotato di un automorfismo φ privo di coincidenze è necessariamente risolubile? Il problema è aperto e non sembra di facile soluzione. La risposta è affermativa se l'ordine di φ è un numero primo (allora G è addirittura nilpotente, per un noto teorema di Thompson, [4]), oppure una potenza di 2 (nel qual caso G è di ordine dispari). Recentemente Fischer ha studiato il caso in cui φ ha ordine $2p$ (p primo dispari) e ha stabilito ([1], teor. 1) che G è risolubile se si verifica una delle seguenti ipotesi supplementari:

I) $G(p)$ è un 2-gruppo

II) $G(p)$ contiene un 2-Sylow-sottogruppo di G ,

indicando $G(n)$ il sottogruppo « delle coincidenze » di φ^n in G .

In questa nota si studia un problema più generale: si suppone cioè che G sia un gruppo finito dotato di un automorfismo φ di ordine pq (p, q numeri primi distinti) privo di coincidenze. I risultati si riferiscono all'esistenza di complementi normali per certi Sylow-sottogruppi di G e all'esistenza di due sottogruppi nilpotenti « abbastanza grandi » di G . Se ne possono dedurre condizioni di risolubilità; si prova, in particolare, che G è risolubile se

1) $G(p)$ è un 2-gruppo, oppure $G(q)$ è un 2-gruppo.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

Indirizzo dell'Autore: Seminario Matematico, Università, Padova.

Un'altra condizione sufficiente per la risolubilità è la seguente :

2) *gli ordini di $G(p)$ e $G(q)$ sono relativamente primi e i 2-Sylow-sottogruppi di G sono abeliani.*

Quest'ultima restrizione non è necessaria nel caso $q = 2$; si prova cioè che è sufficiente la condizione

3) $q = 2, (|G(p)|, |G(2)|) = 1.$

La 1) e la 3) generalizzano la I) di Fischer.

Sia G un gruppo finito e φ un suo automorfismo privo di coincidenze. È noto allora (per le proprietà generali di tali automorfismi si veda ad es. [3]) che per ogni numero primo r divisore dell'ordine di G esiste uno ed un solo r -Sylow-sottogruppo di G che è φ -invariante. Esso si dirà « canonico » e si indicherà con G_r .

LEMMA 1. *G_r contiene tutti gli r -sottogruppi φ -invarianti di G .*

DIM. Sia $R = \varphi(R)$ un r -sottogruppo di G ed M un massimale tra gli r -sottogruppi φ -invarianti di G contenenti R . Se M è di Sylow per G , il Lemma è vero perchè allora è $M = G_r$ per l'unicità. Supponiamo dunque che sia $M \neq G_r$ e proviamo che ciò porta una contraddizione. Sia $N = N_G(M)$ il normalizzante di M in G . N è φ -invariante ed r divide l'ordine del gruppo N/M . φ induce su N/M un automorfismo $\bar{\varphi}$ privo di coincidenze, sicchè N/M possiede un r -Sylow-sottogruppo $\bar{\varphi}$ -invariante non identico $(N/M)_r = M'/M$. Ora M' è un r -sottogruppo φ -invariante di G che contiene propriamente M . Ciò contraddice la massimalità di M .

Il risultato precedente non dipende dall'ordine di φ . Nel seguito supporremo invece che l'ordine di φ sia pq (dove p, q sono numeri primi distinti). Se n è un numero intero ed H un sottogruppo di G , indicheremo con $H(n)$ il sottogruppo « delle coincidenze » di φ^n in H . Porremo cioè :

$$H(n) = \{g \in H \mid \varphi^n(g) = g\} = H \cap G(n).$$

Per il teorema di Thompson, $G(q)$ e $G(p)$ sono nilpotenti, dato che risulta : $[G(q)](p) = 1 = [G(p)](q)$. Più generalmente, è nilpotente e

di ordine $|H| \equiv 1 \pmod{p}$ ogni sottogruppo H φ^q -invariante con $H(q) = 1$ (e analogamente scambiando q con p).

LEMMA 2. *Sia G_r normale in G , e sia $G_r(q) = 1 = G_r(p)$. Allora G_r è un fattore diretto di G .*

DIM. G_r possiede un complemento K in G che si può supporre φ -invariante, dato che i complementi di G_r in G sono tutti coniugati (cfr. [3]). Si proceda per induzione sull'ordine di G . Se K possiede un sottogruppo M non identico, φ -invariante e normale in G , allora φ induce sul gruppo $\bar{G} = G/M$ un automorfismo $\bar{\varphi}$ di ordine pq , privo di coincidenze. Si ha (con evidente significato dei simboli): $\bar{G}_r = G_r M/M$; \bar{G}_r è normale in \bar{G} , e ancora $\bar{G}_r(q) = \bar{1} = \bar{G}_r(p)$. Ma allora, per l'ipotesi induttiva, è $\bar{G} = \bar{G}_r \times \bar{K}$, e quindi anche $G = G_r \times K$. Siamo così ricondotti al caso in cui ogni sottogruppo φ -invariante di K che sia normale in G è identico. Tale è dunque il centralizzante $C_K(G_r)$. Si osservi ora che φ^q è privo di coincidenze sul sottogruppo $K(p)G_r$. Allora $K(p)G_r = K(p) \times G_r$, e infine $K(p) = 1 = G(p)$. Ma allora G risulta nilpotente.

LEMMA 3. *Se G_r è abeliano e $G_r(q) = 1 = G_r(p)$, G_r è dotato di complemento normale in G .*

DIM. Ciò segue subito dal teorema di Burnside, tenendo conto del fatto che il normalizzante $N_G(G_r)$ è φ -invariante e quindi, per il Lemma 2, G_r sta nel suo centro.

Si osservi che l'ipotesi di abelianità è certamente soddisfatta nel caso che sia $q = 2$, perchè allora φ^2 è involutorio (cfr. [3]). Si ritrova così un risultato di Fischer (Lemma 3.3 in [1]).

LEMMA 4. *Se $r \neq 2$ e $G_r(q) = 1 = G_r(p)$, G_r è dotato di complemento normale in G .*

DIM: Si proceda per induzione sull'ordine di G . Per il recente teorema di Thompson sui complementi normali (cfr. [3]), basterà provare che per ogni sottogruppo caratteristico R di G_r il quoziente $N_G(R)/C_G(R)$ è un r -gruppo. Ora R è φ -invariante e tale è il suo

normalizzante $N = N_G(G_r)$. Se è $N \neq G$, per induzione $N_r = G_r$ è dotato di complemento normale H in N , sicchè risulta $RH = R \times H$. Se invece è $N = G$, allora su $\bar{G} = G/R$ si ereditano le ipotesi fatte su G . Allora, per induzione, \bar{G}_r è dotato in \bar{G} di complemento normale $\bar{K} = KR/R$. KR è φ -invariante, e per il Lemma 2 risulta $RK = R \times K$.

LEMMA 5. *Siano r, s due numeri primi dispari distinti, e sia $G_r(q) = 1 = G_s(q)$ oppure $G_r(p) = 1 = G_s(p)$. Allora è $G_r G_s = G_r \times G_s$.*

DIM: Procediamo ancora per induzione sull'ordine di G . Sia ad esempio $G_r(q) = 1 = G_s(q)$. Sarà sufficiente provare che G_r e G_s sono permutabili, perchè in tal caso φ^q risulta privo di coincidenze su $G_r G_s$. Ciò è senz'altro vero se è anche $G_r(p) = 1$ (ovvero $G_s(p) = 1$). Infatti in questo caso G_r è dotato di complemento normale, per il Lemma 4; ma allora (argomento di Frattini) G_r normalizza un s -Sylow-sottogruppo di G . Ne segue che il normalizzante $N_G(G_s)$ contiene un r -Sylow-sottogruppo di G ; anzi, essendo φ -invariante, contiene proprio G_r , per l'unicità dei canonici. Potremo dunque supporre $G_r(p) \neq 1 \neq G_s(p)$. Per la nilpotenza di $G(p)$, risulta $G_r(p) G_s(p) = G_r(p) \times G_s(p)$.

Siano ora M_r ed M_s due sottogruppi di G massimali rispetto alle proprietà:

$$G_r(p) \subseteq M_r = \varphi(M_r) \subseteq G_r; \quad G_s(p) \subseteq M_s = \varphi(M_s) \subseteq G_s; \quad M_r M_s = M_s M_r.$$

Se M_r ed M_s sono entrambi di Sylow per G , l'asserto è vero.

Supponiamo dunque, per assurdo, che sia $G_r \neq M_r$ e poniamo $N = N_G(M_r)$. Allora N è φ -invariante, ed r divide l'ordine di N/M_r . Inoltre risulta $M_r M_s = M_r \times M_s$, sicchè è $M_s \subseteq N$. Ricordando il Lemma 1 si ha allora: $M_s \subseteq N_s$; $M_r \subset N_r$. Se è $N \neq G$, il Lemma si può supporre vero in N , sicchè si ha $N_r N_s = N_r \times N_s$ e quindi, a maggior ragione, è $M_s N_r = N_r M_s$, che contraddice la massimalità di M_r . Se invece $N = G$, le ipotesi si ereditano sul quoziente $\bar{G} = G/M_r$; si prova cioè che risulta: $\bar{G}_r(q) = \bar{1} = \bar{G}_s(q)$. Ma allora, per induzione, è $\bar{G}_r \bar{G}_s = \bar{G}_r \times \bar{G}_s$. Ne segue che G_s normalizza G_r e in definitiva risulta addirittura $G_r G_s = G_r \times G_s$.

Evidentemente la dimostrazione rimane valida scambiando i ruoli dei numeri r ed s , e quelli dei numeri q e p .

Tenendo conto del Lemma 3, si osservi che nell'enunciato del Lemma 5 si può togliere la restrizione « dispari » purchè i 2-Sylow-sottogruppi di G siano abeliani. La stessa cosa è vera se è $q = 2$, perchè in tal caso $G_2(p) = 1$ implica $G_2 = 1$. Come immediata conseguenza si ottiene il

TEOREMA. *Sia φ un automorfismo di ordine pq , privo di coincidenze sul gruppo finito G . Sia $G(p)$ (rispett. $G(q)$) il sottogruppo delle coincidenze di φ^p (rispett. φ^q) in G . Allora l'unione dei Sylow-sottogruppi canonici di ordine dispari di G che non intersecano $G(p)$ (rispett. $G(q)$) è un gruppo nilpotente.*

La restrizione « dispari » si può togliere se è $q = 2$, oppure i 2-Sylow-sottogruppi di G sono abeliani.

Il risultato si presta a fornire criteri di risolubilità. Sfruttando i noti teoremi di Wielandt-Kegel (cfr. ad es. [3]) sui gruppi che sono il prodotto di due sottogruppi nilpotenti, si ottiene, ad esempio, il seguente

COROLLARIO. *Siano $G, \varphi, G(q)$ e $G(p)$ come nel teorema precedente. G è risolubile se è verificata una delle seguenti condizioni :*

- 1) $G(p)$ è un 2-gruppo, ovvero $G(q)$ è un 2-gruppo
- 2) G_2 è abeliano ; $(|G(p)|, |G(q)|) = 1$
- 3) $q = 2$; $(|G(p)|, |G(2)|) = 1$.

DIM : Nel caso 1), G_2 è dotato di un complemento nilpotente. Nei casi 2) e 3), G è il prodotto dei due sottogruppi nilpotenti del teorema precedente.

Si può osservare che la I) di Fischer si ottiene dalla 1) per $q = 2$. Anche la 3) generalizza la I), perchè in ogni caso 2 non divide l'ordine di $G(2)$.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B. FISCHER. *Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order $2p$* . *Journal of Algebra*, **3** (1966), 99-114.
- [2] D. GORENSTEIN, I. N. HERSTEIN. *Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of order 4*. *Amer. Jour. Math.*, **83** (1961), 71-78.
- [3] E. SCHENKMAN. *Group Theory*. D. Van Nostrand Co. Inc. (1965).
- [4] J. G. THOMPSON. *Finite groups admitting a fixed-point-free automorphism of prime order*. *Proc. Natl. Acad. Sci.*, **45** (1959), 578-581.

Aggiunta fatta mentre la nota era in corso di stampa :

In un lavoro apparso nel *Journal of Algebra*, **5** (Gennaio 1967), 20-40, con lo stesso titolo di [1], B. Fischer prova che un gruppo G finito è risolubile se ammette un automorfismo di ordine $2p$ privo di coincidenze e i q -Sylow-sottogruppi di G sono abeliani per ogni primo q che divide l'ordine di G (2). È facile vedere che questo risultato, ottenuto con metodi alquanto differenti, comprende la nostra 3).

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 dicembre 1966.