

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

G. GEYMONAT

P. GRISVARD

## **Alcuni risultati di teoria spettrale per i problemi ai limiti lineari ellittici**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 38 (1967), p. 121-173

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1967\\_\\_38\\_\\_121\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__38__121_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

ALCUNI RISULTATI  
DI TEORIA SPETTRALE PER I PROBLEMI  
AI LIMITI LINEARI ELLITTICI

G. GEYMONAT \*) e P. GRISVARD \*)

**Introduzione.**

Nell'aperto limitato  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  di frontiera  $\Gamma$  sufficientemente regolare si consideri il problema lineare ai limiti ellittico

$$(I) \quad \begin{cases} Au = f & \text{in } \Omega \\ B_j u = g_j & j = 1, \dots, m \text{ su } \Gamma \end{cases}$$

dove su  $A, \{B_j\}_{j=1}^m, \Omega$  si facciano opportune ipotesi di ellitticità e di regolarità (v. n. 2).

In questo lavoro vengono date alcune proprietà di teoria spettrale relative a tale problema. Si consideri a tal fine l'operatore  $A_{p,k}$  non limitato in  $W^{l-2m+k,p}(\Omega)$ ,  $1 < p < +\infty$ ,  $k$  intero  $\geq 0$  di dominio  $D(A_{p,k}) = \{u \in W^{l-2m+k,p}(\Omega); B_j u = 0 \text{ } j = 1, \dots, m \text{ su } \Gamma\}$  definito da

$$u \rightarrow A_{p,k} u = Au.$$

---

Lavoro svolto nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

\*) Indirizzo degli AA. Istituto Matematico, Università, Pavia, Département de Mathématiques, Université Mohammed V, Rabat.

Si dimostra innanzitutto che lo spettro di tale operatore è discreto senza punti di accumulazione al finito ovvero è tutto il piano complesso.

Si pone quindi il problema di dare condizioni sufficienti perchè lo spettro sia discreto. Agmon [1] sotto l'ipotesi supplementare che il sistema  $\{B_j\}_{j=1}^m$  sia *normale* secondo Aronszajn-Milgram [7] (e cioè sia  $m_i \neq m_j$  per  $i \neq j$ ,  $m_j \leq 2m - 1$ , la frontiera  $\Gamma$  sia non caratteristica per ogni operatore  $B_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ ) ha dato per  $1 < p < +\infty$  una condizione sufficiente perchè lo spettro sia discreto. Agranovich-Vishik [6] hanno studiato il caso  $p = 2$  ed hanno, tra l'altro, dimostrato con tecnica completamente diversa, che la condizione data da Agmon è sufficiente perchè lo spettro sia discreto per sistemi  $\{B_j\}_{j=1}^m$  di condizioni ai limiti più generali, anche non normali.

In questo lavoro viene adattata una idea di Agmon-Nirenberg (che è alla base della dimostrazione dei risultati di [1]) ad una disuguaglianza « duale » del tipo di Peetre [18].

In questo modo si dimostra che la condizione di Agmon è sufficiente perchè lo spettro sia discreto per  $1 < p < +\infty$  anche nel caso di un sistema  $\{B_j\}_{j=1}^m$  di tipo generale (purchè l'ordine di  $B_j$  sia  $\leq 2m - 1$ ).

I risultati ottenuti da Agmon [1], sotto l'ipotesi che il sistema  $\{B_j\}_{j=1}^m$  sia normale, concernenti la completezza degli autovettori generalizzati sono estesi al caso di sistemi di tipo generale ed anzi sono inquadrati nel n. 1 in un ambito più generale di operatori ad indice non limitati negli spazi di Banach.

I risultati ottenuti vengono estesi ad una classe di problemi ai limiti per sistemi ellittici secondo Petrowsky di ordine  $\varrho$  con operatori ai limiti di tipo generale (purchè di ordine  $\leq \varrho - 1$ ) ottenendo così una generalizzazione al caso  $p \neq 2$  di alcuni risultati di Agranovich-Vishik [6].

In questo lavoro viene anche studiato il problema del rapporto fra l'indice del problema (I) e quello dell'operatore  $A_{p,k}$  ottenendo una formula che estende un risultato di Seeley [19] e che può essere inquadrata in un ambito generale (v. n. 1, teor. 1.1).

### n. 1. Alcune proprietà degli operatori ad indice.

1. Un operatore lineare  $T$  dello spazio vettoriale (sul corpo complesso)  $E$  nello spazio vettoriale (su  $\mathbb{C}$ )  $F$  è detto *operatore ad indice* se  $\dim \text{Ker}(T) < +\infty$  e  $\dim \text{Coker}(T) (= \text{codim}_F \text{Im}(T) = \dim(F/\text{Im}(T))) < +\infty$ ; l'indice è allora per definizione  $\chi(T) = \dim \text{Ker}(T) - \dim \text{Coker}(T) < +\infty$ .

Il seguente risultato di carattere generale contiene come caso particolare un risultato di Seeley [19].

**TEOREMA 1.1.** *Siano  $E, F, G$  spazi vettoriali su  $\mathbb{C}$ , sia  $A: e \rightarrow Ae$  un operatore lineare di  $E$  in  $F$ ,  $B: e \rightarrow Be$  un operatore lineare di  $E$  in  $G$  e sia  $T: e \rightarrow (Ae, Be)$  l'operatore lineare di  $E$  in  $F \times G$  associato; sia infine  $A_0$  la restrizione di  $A$  a  $\text{Ker}(B)$ .*

*Condizione necessaria e sufficiente perchè  $\text{codim}_{F \times G} \text{Im}(T) < +\infty$  è che sia  $\text{codim}_F \text{Im}(A_0)$ ,  $\text{codim}_G \text{Im}(B) < +\infty$ .*

*Se  $\text{codim}_{F \times G} \text{Im}(T) < +\infty$  allora vale la seguente formula*

$$(1.1) \quad \text{codim}_{F \times G} \text{Im}(T) = \text{codim}_F \text{Im}(A_0) + \text{codim}_G \text{Im}(B).$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $H$  un supplementare algebrico di  $\text{Ker}(B)$  in  $E$ ; allora  $B$  è un isomorfismo di  $H$  su  $\text{Im}(B)$ ; sia  $B^{-1}$  l'isomorfismo inverso e sia  $R$  una applicazione lineare di  $G$  in  $E$  che prolunga  $B^{-1}$ ; risulta quindi  $B \circ R$  coincidente con l'identità su  $\text{Im}(B)$ .

Proviamo innanzitutto che

$$\text{Im}(T) = \{(f, g) \in F \times G; g \in \text{Im}(B), f - ARg \in \text{Im}(A_0)\}.$$

Infatti se  $(f, g) \in \text{Im}(T)$  allora esiste  $e \in E$  con  $\begin{cases} Ae = f \\ Be = g \end{cases}$  e quindi  $g \in \text{Im}(B)$  e dunque posto  $e_0 = Rg$  ed  $e_1 = e - e_0$  si ha

$$\begin{cases} Ae_1 = f - ARg \\ Be_1 = Be - Be_0 = 0 \end{cases}$$

e quindi  $f - ARg \in \text{Im}(A_0)$ .

Sia ora  $(f, g) \in F \times G$  con  $g \in \text{Im}(B)$  ed  $f - ARg \in \text{Im}(A_0)$  e sia  $e_1 \in E$  con  $\begin{cases} Ae_1 = f - ARg \\ Be_1 = 0 \end{cases}$ ; si ponga  $e_0 = Rg$ ,  $e = e_1 + e_0$ ; allora risulta

$$\begin{cases} Ae = f - ARg + ARg = f \\ Be = BRg = g \end{cases}$$

e dunque  $(f, g) \in \text{Im}(T)$ .

Indicati con  $F^*$ ,  $G^*$  i duali algebrici di  $F$ ,  $G$  (1) si considerino i seguenti spazi vettoriali:

$$\text{Im}(T)^\perp = \{ (u, v) \in F^* \times G^* ; \langle Ae, u \rangle_{F, F^*} + \langle Be, v \rangle_{G, G^*} = 0, \forall e \in E \}$$

$$\text{Im}(A_0)^\perp = \{ u \in F^* ; \langle Ae, u \rangle_{F, F^*} = 0, \forall e \in \text{Ker}(B) \}$$

$$\text{Im}(B)^\perp = \{ v \in G^* ; \langle Be, v \rangle_{G, G^*} = 0, \forall e \in E \}.$$

Sia ora  $P$  l'applicazione lineare di  $\text{Im}(T)^\perp$  in  $F^*$  definita da

$$(u, v) \in \text{Im}(T)^\perp \rightarrow u \in F^* ;$$

è facile verificare:

$$\text{i) Ker}(P) = \{ (0, v) \in F^* \times G^* ; \langle Be, v \rangle_{G, G^*} = 0 \forall e \in E \} = \{0\} \times \text{Im}(B)^\perp ;$$

ii)  $\text{Im}(P) \subset \text{Im}(A_0)^\perp$ ; infatti se  $u \in \text{Im}(P)$  allora esiste  $v \in G^*$  con  $\langle Ae, u \rangle_{F, F^*} + \langle Be, v \rangle_{G, G^*} = 0$  per ogni  $e \in E$  e quindi per ogni  $e \in E$  con  $Be = 0$  risulta  $\langle Ae, u \rangle_{F, F^*} = 0$  e dunque  $u \in \text{Im}(A_0)^\perp$ ;

iii) se  $u \in \text{Im}(A_0)^\perp$  allora  $(u, -{}^tR \circ {}^tAu) \in \text{Im}(T)^\perp$  (2); infatti se

1) Si indicheranno con  $\langle f, u \rangle_{F, F^*}$  e  $\langle g, v \rangle_{G, G^*}$  le forme bilineari canoniche su  $F \times F^*$  e su  $G \times G^*$ .

2) Con notazione abituale  ${}^tA$ , risp  ${}^tR$ , è la applicazione lineare *trasposta* di  $A$ , risp. di  $R$ , definita da  $\langle e, {}^tAu \rangle_{E, E^*} = \langle Ae, u \rangle_{F, F^*}$  risp.  $\langle g, {}^tRe^* \rangle_{G, G^*} = \langle Rg, e^* \rangle_{E, E^*}$ , dove al solito  $E^*$  è il duale algebrico di  $E$  ed  $\langle \varphi, e^* \rangle_{E, E^*}$  è la forma bilineare canonica su  $E \times E^*$ .

$\langle Ae, u \rangle_{F, F^*} = 0$  per ogni  $e \in \text{Ker}(B)$  allora

$$\begin{aligned} \langle Ae, u \rangle_{F, F^*} - \langle Be, {}^tR \circ {}^tAu \rangle_{G, G^*} &= \langle Ae, u \rangle_{F, F^*} - \langle ARBe, u \rangle_{F, F^*} = \\ &= \langle A(e - RBe), u \rangle_{F, F^*} = 0 \end{aligned}$$

per ogni  $e \in E$  poichè  $e - RBe \in \text{Ker}(B)$ .

Da ii) ed iii) segue dunque

$$\text{Im}(P) = \text{Im}(A_0)^\perp,$$

e quindi poichè si ha

$$\dim \text{Im}(T)^\perp = \dim \text{Ker}(P) + \dim \text{Im}(P)$$

$$\text{codim}_{F \times G} \text{Im}(T) = \dim \text{Im}(T)^\perp$$

$$\text{codim}_F \text{Im}(A_0) = \dim \text{Im}(A_0)^\perp = \dim \text{Im}(P)$$

$$\text{codim}_G \text{Im}(B) = \dim \text{Im}(B)^\perp = \dim \text{Ker}(P)$$

risulta

$$\text{codim}_{F \times G} \text{Im}(T) = \text{codim}_F \text{Im}(A_0) + \text{codim}_G \text{Im}(B),$$

da cui segue la tesi del teorema.

C.V.D.

Siccome sotto le ipotesi del teor. 1.1 è ovviamente  $\text{Ker}(T) = \text{Ker}(A_0)$  si ha il seguente risultato.

**COROLLARIO.** *Sotto le ipotesi del teorema 1.1, condizione necessaria e sufficiente perchè  $T$  ammetta indice è che  $A_0$  ammetta indice e sia  $\dim \text{Coker}(B) < +\infty$ . Inoltre se  $\chi(T) < +\infty$  vale la seguente formula*

$$(1.2) \quad \chi(A_0) - \chi(T) = \text{codim}_G \text{Im}(B).$$

2. Siamo ora  $E, F$ , spazi vettoriali topologici (su  $\mathbb{C}$ ); allora si hanno i seguenti risultati (v. per es. Gohberg-Krein [12], Kato [13], ...)

**TEOREMA 1.2.** i) Se  $E, F$  sono due spazi di Fréchet e se  $T$  è lineare continuo e ad indice da  $E$  in  $F$ , allora  $T$  è un morfismo stretto<sup>3)</sup> e quindi  $\text{Im}(T)$  è chiusa.

ii) Siano  $E, F$  due spazi di Fréchet; allora condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore  $T$  lineare e continuo da  $E$  in  $F$  ammetta indice è che  $T$  sia un morfismo stretto e che  $\text{Ker}(T)$  e  $\text{Ker}({}^tT)$ <sup>4)</sup> siano di dimensione finita; allora

$$\chi(T) = -\chi({}^tT) = \dim \text{Ker}(T) - \dim \text{Ker}({}^tT)$$

iii) Sia  $T: E \rightarrow E$  un operatore lineare continuo e ad indice nello spazio di Banach  $E$ ; se  $S$  è un operatore compatto di  $E$  in  $E$  allora  $T + S$  ammette indice ed è  $\chi(T + S) = \chi(T)$ .

In connessione con il teorema 1.2. ii) si ricordi il seguente risultato di Peetre [18; lemma 3].

**PROPOSIZIONE 1.1.** Siano  $E, F, G$  tre spazi di Banach riflessivi con  $E \subset F$  l'iniezione di  $E$  in  $F$  essendo compatta; sia  $T$  un operatore lineare e continuo di  $E$  in  $G$ ; allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$\alpha)$  esiste una costante  $C > 0$  tale che per ogni  $x \in E$  è

$$\|x\|_E \leq C \{ \|Tx\|_G + \|x\|_F \}$$

$\beta)$   $T$  è morfismo stretto (e quindi  $\text{Im}(T)$  è chiusa) e  $\text{Ker}(T)$  ha dimensione finita.

In connessione al teor. 1.1. si ricordi il seguente risultato (v. [11], prop. 3.1).

**PROPOSIZIONE 1.2.** Siano  $E_0, E_1$  due spazi vettoriali topologici localmente convessi e separati. Supponiamo che siano verificate le seguenti ipotesi:

<sup>3)</sup> Morfismo stretto = omorfismo nel senso di Banach.

<sup>4)</sup> Con  ${}^tT$  si indica l'applicazione lineare e continua trasposta di  $T$ .

i)  $E_1$  è denso in  $E_0$  e l'iniezione canonica  $j$  di  $E_1$  in  $E_0$  è continua ;

ii)  $A_i$  è un sottospazio chiuso di  $E_i$ ,  $i = 0, 1$  ;

iii)  $A_1 = \{x \in E_1 ; j(x) \in A_0\}$  (e cioè  $A_1 = A_0 \cap E_1$ ).

Allora :  $\alpha$ ) se  $A_0$  ha codimensione finita in  $E_0$ , risulta  $\text{codim}_{E_0} A_0 = \text{codim}_{E_1} A_1$  ;

$\beta$ ) se  $A_1$  ha codimensione finita in  $E_1$ , risulta  $\text{codim}_{E_1} A_1 = \text{codim}_{E_0} A_0$ .

3. Siano  $E, F$  spazi di Banach, sia  $T$  un operatore lineare non limitato di  $E$  in  $F$  con dominio  $D(T) \subset E$  e sia  $T$  chiuso.

Si dice che  $T$  è un operatore ad indice se  $\text{Im}(T)$  è chiusa in  $F$  e se  $\dim \text{Ker}(T)$ ,  $\text{codim}_F \text{Im}(T) < +\infty$  ; l'indice di  $T$  è allora, per definizione,  $\chi(T) = \dim \text{Ker}(T) - \text{codim}_F \text{Im}(T)$ .

Introdotta in  $D(T)$  la norma del grafico

$$x \rightarrow \|x\|_E + \|Tx\|_F$$

è facile verificare che rispetto a tale norma  $D(T)$  è uno spazio di Banach ;  $T$  risulta un operatore lineare e continuo da  $D(T)$  munito di tale norma in  $F$  ; se  $T$  ammette indice come operatore non limitato, ammette anche indice come operatore continuo da  $D(T)$  (munito della norma del grafico) in  $F$  e l'indice è ovviamente lo stesso.

Per le principali proprietà dell'indice di  $T$  si veda ad es. Gohberg-Krein [12], Kato [13], ...

4. Sia  $T$  un operatore lineare non limitato di  $E$  in  $E$  e sia  $T$  chiuso. Si indica con  $\rho(T)$  l'insieme risolvibile di  $T$  e cioè l'insieme dei  $\lambda \in \mathbb{C}$  tali che  $R(\lambda ; T) = (-T + \lambda I)^{-1}$  esiste ed è un operatore lineare e continuo da  $E$  in  $E$  e vale

$$R(\lambda ; T) (-T + \lambda I) x = x \quad \forall x \in D(T)$$

$$(-T + \lambda I) R(\lambda ; T) x = x \quad \forall x \in E.$$

Si indica poi  $\sigma(T)$  lo spettro di  $T$  e cioè il complementare di  $\rho(T)$  in  $\mathbb{C}$ .



I seguenti risultati si riallacciano a proprietà dimostrate in Argmon [1], [2], Gohberg-Krein [12], Taylor [21], Dunford-Schwartz [10], ...

**PROPOSIZIONE 1.3.** *Sia  $T$  un operatore non limitato di  $E$  in  $E$  con dominio  $D(T) \subset E$  e sia  $T$  chiuso e ad indice. Sia inoltre l'iniezione di  $D(T)$ , munito della norma del grafico, in  $E$  compatta. Allora:*

i)  $\sigma(T) = \mathbb{C}$  oppure  $\sigma(T)$  è un insieme discreto senza punti di accumulazione al finito;

ii) condizione necessaria, ma non sufficiente, perchè  $\varrho(T) \neq \emptyset$  è che sia  $\chi(T) = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Risulta ovviamente  $\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; \ker(-T + \lambda I) = \{0\}, \text{Im}(-T + \lambda I) = E\}$  e quindi se  $\lambda \in \varrho(T)$ , allora  $\chi(-T + \lambda I) = 0$ . Siccome  $T$  è continuo da  $D(T)$ , munito della norma del grafico, in  $E$  e siccome l'iniezione di  $D(T)$  munito della norma del grafico, in  $E$  è per ipotesi compatta si ottiene, per il teor. 1.2. iii),  $\chi(-T + \lambda I) = \chi(T)$  e dunque condizione necessaria perchè sia  $\varrho(T) \neq \emptyset$  è  $\chi(T) = 0$ . Tale condizione non è però sufficiente come ha dimostrato Seeley [19] costruendo un esempio in cui è  $\chi(T) = 0$  ma risulta  $\varrho(T) = \emptyset$ .

Sia ora  $\varrho(T) \neq \emptyset$ ; se  $\mu_0 \in \varrho(T)$  allora  $R(\mu_0; T)$  è un operatore lineare e continuo da  $E$  su  $D(T)$  e quindi poichè l'iniezione di  $D(T)$  in  $E$  è compatta risulta  $R(\mu_0; T)$  un operatore compatto di  $E$  in  $E$  che verrà indicato con  $S$ .

Volendo risolvere l'equazione

$$\begin{cases} u \in D(T) \\ -Tu + \lambda u = f \end{cases}$$

con  $f \in E, \lambda \neq \mu_0$  da

$$-Tu + \mu_0 u = f + (\mu_0 - \lambda)u$$

si ottiene  $u = R(\mu_0; T)f + (\mu_0 - \lambda)R(\mu_0; T)u$  e quindi posto  $R(\mu_0; T) = S$  si deve risolvere l'equazione

$$\frac{1}{\mu_0 - \lambda} u - Su = \frac{1}{\mu_0 - \lambda} Sf.$$

Se e solo se  $(\mu_0 - \lambda)^{-1} \in \varrho(S)$  tale equazione ammette la soluzione

$$u = R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right) \frac{1}{\mu_0 - \lambda} S f$$

e quindi risulta

$$\varrho(T) = \{\lambda \in \mathbf{C}; \lambda \neq \mu_0, \frac{1}{\mu_0 - \lambda} \in \varrho(S)\} \cup \{\mu_0\}$$

e per  $\lambda \neq \mu_0$

$$R(\lambda; T) = R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; R(\mu_0; T)\right) \frac{1}{\mu_0 - \lambda} R(\mu_0; T).$$

Siccome  $S$  è un operatore compatto di  $E$  in sè, lo spettro di  $S$  è discreto, limitato e  $0$  è il solo punto di accumulazione possibile; di conseguenza lo spettro di  $T$  è discreto senza punti di accumulazione al finito.

C.V.D.

**COROLLARIO.** Se  $\varrho(T) \neq \emptyset$  allora ogni  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  è un polo di ordine finito di  $R(\lambda; T)$ .

Basta applicare risultati noti di analisi funzionale (v. per es. Taylor [21] cap. 5, §. 5.8 pag. 313).

Si consideri ora l'operatore  $T^n$  di  $E$  in sè di dominio  $D(T^n) = \{x \in E; x, Tx, \dots, T^{n-1}x \in D(T)\}$ ; si dicono autovettori generalizzati, od anche solo autovettori, di  $T$  corrispondenti all'autovalore  $\lambda_0$  gli  $x \in E$  con  $x \neq 0$  tali che esiste un  $n$  intero  $\geq 1$  per cui

$$x \in D(T^n), (-T + \lambda_0 I)^n x = 0.$$

Se  $\varrho(T) \neq \emptyset$  allora ogni  $\lambda_0 \in \sigma(T)$  è un polo di ordine  $m(\lambda_0)$  di  $R(\lambda; T)$  ed inoltre, come è noto (v. per es. Taylor [21] cap. 5 § 5.8) risulta

$$E = \text{Ker}([ -T + \lambda_0 I ]^{m(\lambda_0)}) \oplus \text{Im}([ -T + \lambda_0 I ]^{m(\lambda_0)})$$

$$\text{Ker}([ -T + \lambda_0 I ]^n) = \text{Ker}([ -T + \lambda_0 I ]^{m(\lambda_0)}) \quad \text{per ogni } n \geq m(\lambda_0)$$

$$\text{Im}([ -T + \lambda_0 I ]^n) = \text{Im}([ -T + \lambda_0 I ]^{m(\lambda_0)}) \quad \text{per ogni } n \geq m(\lambda_0)$$

$$\dim \text{Ker}([ -T + \lambda_0 I ]^{m(\lambda_0)}) < +\infty.$$

Considerato allora il sottospazio di  $E$  generato da

$$\bigcup_{\lambda_0 \in \sigma(T)} \text{Ker} ([-T + \lambda_0 I]^m (\lambda_0))$$

ed indicato tale spazio con  $sp(T)$  si pone in maniera naturale il problema di dare condizioni sufficienti perchè sia  $sp(T) = E$ .

L'operatore  $S = R(\mu_0; T) = (\mu_0 I - T)^{-1}$ , introdotto nel corso della dimostrazione della prop. 1.3, è un operatore compatto di  $E$  in  $E$  ed i punti isolati  $\tilde{\mu}_k \in \sigma(S)$  (con  $\tilde{\mu}_k \neq 0$ ) sono singolarità polari di  $R(\lambda; S)$  ed inoltre  $\lambda_k \in \sigma(T)$  se e solo se  $\tilde{\mu}_k = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_k}$  è un autovalore di  $S$ .

Si ha la relazione seguente :

$$(1.3) \quad \tilde{\mu}_k I - S = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_k} (\mu_0 I - T)^{-1} (\lambda_k I - T);$$

infatti risulta

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_k I - S &= \tilde{\mu}_k I - (\mu_0 I - T)^{-1} = (\mu_0 I - T)^{-1} \left[ \frac{\lambda_k}{\mu_0 - \lambda_k} I - \frac{T}{\mu_0 - \lambda_k} \right] \\ &= \frac{1}{\mu_0 - \lambda_k} (\mu_0 I - T)^{-1} (\lambda_k I - T) \end{aligned}$$

e quindi la (1.3) è verificata.

Siccome  $(\mu_0 I - T)^{-1}$  e  $(\lambda_k I - T)$  commutano (come si vede facilmente) dalla (1.3) si ricava la relazione

$$(\tilde{\mu}_k I - S)^n = \frac{1}{(\mu_0 - \lambda_k)^n} (\mu_0 I - T)^{-n} (\lambda_k I - T)^n$$

e quindi  $\varphi \in E$  è un autovettore generalizzato di  $T$  se e solo se  $\varphi$  è un autovettore generalizzato dell'operatore  $S$ , per cui

$$sp(T) = sp(S).$$

Per lo studio di  $sp(S)$  si ha innanzitutto il seguente risultato analogo al th. 29 pag. 1115 di Dunford-Schwartz [10] ed al th. 3.2 pag. 128 di Agmon [1].

PROP. 1.4. *L'operatore  $S$  oltre alle ipotesi precedenti verifichi le seguenti condizioni:*

(i) *esiste una successione di numeri positivi  $\rho_i \rightarrow 0$  tali che  $R(\mu; S)$  esiste ovunque su  $|\mu| = \rho_i$  ed inoltre*

$$(1.4) \quad \|R(\mu; S)\|_{E \rightarrow E} \leq c_1 \exp(|\mu|^{-q}) \quad \text{per } |\mu| = \rho_i, i = 1, 2, \dots$$

con  $q$  numero reale fissato con  $0 < q < +\infty$ ;

(ii) *esistono dei raggi  $\gamma_s = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg \lambda = \theta_s\}$ ,  $s = 1, 2, \dots, k < +\infty$  che dividono il piano complesso in angoli di ampiezza  $< \frac{\pi}{q}$  tali che  $\lambda \in \gamma_s$  e  $|\lambda| \geq L$  opportuno implica  $\frac{1}{\mu_0 - \lambda} \in \rho(S)$  e la seguente maggiorazione*

$$(1.5) \quad \left\| R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right) \right\|_{E \rightarrow E} \leq c_2 |\mu_0 - \lambda|^N \quad \text{per } |\lambda| \rightarrow +\infty, \arg \lambda = \theta_s,$$

per  $s = 1, 2, \dots, k$  con  $N$  intero  $\geq 0$  fissato.

Allora  $\text{Im}(S^N) \subset \text{sp}(S)^5$ .

DIMOSTRAZIONE. Passando ai polari è sufficiente verificare che  $\text{sp}(S)^0 \subset \text{Im}(S^N)^0$ ; basta anzi provare che se  $f^* \in E'^6$  verifica

$$(1.6) \quad \langle g, f^* \rangle_{E, E'} = 0$$

per ogni  $g \in E$  autovettore generalizzato di  $S$ , allora risulta

$$\langle S^N f, f^* \rangle_{E, E'} = 0 \quad \text{per ogni } f \in E.$$

Si ammetta provvisoriamente il seguente lemma.

LEMMA 1.1. *Fissato  $f^* \in E'$  con  $\langle g, f^* \rangle_{E, E'} = 0$  per ogni  $g \in E$*

<sup>5)</sup> Ovviamente  $D(S^N) = E$ ,  $\text{Im}(S^N) = \{\varphi \in E$ ; esiste  $\psi \in \text{Im}(S^{N-1})$  con  $S\psi = \varphi\} = S(\text{Im}(S^{N-1})) = S^{N-1}(\text{Im}(S)) \subset \text{Im}(S^{N-1}) \subset \dots \subset \text{Im}(S) = D(T)$ , le conclusioni potendo a priori essere strette.

<sup>6)</sup> Se  $E$  è uno spazio di Banach con  $E'$  si indica il suo duale forte.

autovettore generalizzato di  $S$ , per ogni  $f \in E$  la funzione

$$\lambda \rightarrow F(\lambda) = \begin{cases} 0 & \text{per } \lambda = \mu_0 \\ \langle R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right) f, f^* \rangle_{E, E'} & \text{per } \lambda \neq \mu_0 \end{cases}$$

è analitica in tutto il piano complesso ed inoltre è valido il seguente sviluppo in serie

$$(1.7) \quad F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_0 - \lambda)^n \langle S^{n-1} f, f^* \rangle_{E, E'}.$$

Per provare dunque che  $\langle S^N f, f^* \rangle_{E, E'} = 0$  per ogni  $f \in E$  è sufficiente verificare in tutto il piano complesso la maggiorazione

$$|F(\lambda)| = 0 \quad (|\mu_0 - \lambda|^N) \quad \text{per } |\lambda| \rightarrow +\infty.$$

Per le ipotesi (i) ed (ii) si può applicare il teorema di Phragmén-Lindelöf<sup>7)</sup> alle regioni  $\{r \in \mathbb{C}; r = \mu_0 - \lambda; |r| \geq L, \theta_s \leq \arg \lambda \leq \theta_{s-1}\}$   $s = 1, \dots, k-1$  ed allora si ha in tutto  $\mathbb{C}$  la maggiorazione voluta.

C.V.D.

**DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 1.1.**  $S$  è una trasformazione compatta da  $E$  in sè e quindi per  $|\mu| > \|S\|_{E \rightarrow E}$  risulta

$$R(\mu; S)f = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{-n} S^{n-1} f \quad \text{per ogni } f \in E;$$

dunque per  $|\mu_0 - \lambda| < \frac{1}{\|S\|_{E \rightarrow E}}$  e  $\lambda \neq \mu_0$  è

$$F(\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} (\mu_0 - \lambda)^n \langle S^{n-1} f, f^* \rangle_{E, E'}$$

per cui  $F(\lambda)$  è continua per  $\lambda = \mu_0$  ed anzi è analitica per  $0 \leq |\lambda - \mu_0| < \frac{1}{\|S\|_{E \rightarrow E}}$ .

<sup>7)</sup> Vedere per es. Titchmarsh [22] pag. 177. Dunford-Schwartz [10] pag. 1115.

Sempre per la compattezza di  $S$  la risolvente  $R(\mu; S)$  è analitica per  $\mu \in \rho(S)$  ed ha singolarità polari per  $\mu = \tilde{\mu}_k = \frac{1}{\mu_0 - \lambda_k}$  e per  $0 < |\mu - \tilde{\mu}^k| < \delta$  ammette lo sviluppo di Laurent

$$(1.8) \quad R(\mu; S) = \sum_{\nu=1}^m (\mu - \tilde{\mu}_k)^{-\nu} B_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} (\mu - \tilde{\mu}_k)^\nu A_\nu$$

dove gli operatori  $A_\nu, B_\nu$  sono lineari e continui da  $E$  in sè e commutano con  $S$  (si osservi che  $\delta = \delta(\tilde{\mu}_k) \delta > 0$  per ogni  $k$  ed  $m = m(\tilde{\mu}_k)$  è  $< +\infty$  per ogni  $k$ ).

Risulta dunque  $R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right)$  analitica per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\lambda \neq \lambda_k$  ed inoltre, per  $\lambda = \lambda_k$ ,  $R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right)$  ha singolarità (isolate) polari ed ammette per  $0 < |\lambda - \lambda_k| < \varepsilon$  ( $\varepsilon = \varepsilon(\lambda_k) > 0$  per ogni  $k$ ) lo sviluppo di Laurent:

$$R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right) = \sum_{\nu=1}^m ((\mu_0 - \lambda)^{-1} - \tilde{\mu}_k)^{-\nu} B_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} ((\mu_0 - \lambda)^{-1} - \tilde{\mu}_k)^\nu A_\nu.$$

Osserviamo che  $\tilde{\mu}_k = (\mu_0 - \lambda_k)^{-1}$  e quindi

$$\begin{aligned} ((\mu_0 - \lambda)^{-1} - (\mu_0 - \lambda_k)^{-1})^{-\nu} &= (\mu_0 - \lambda)^\nu (\mu_0 - \lambda_k)^\nu (\lambda - \lambda_k)^{-\nu} \\ &= (\lambda_k - \mu_0)^\nu [(\lambda - \lambda_k) + (\lambda_k - \mu_0)]^\nu (\lambda - \lambda_k)^{-\nu} \\ &= \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (\lambda_k - \mu_0)^{\mu+\nu} (\lambda - \lambda_k)^{-\mu} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right) &= \sum_{\nu=1}^m \sum_{\mu=0}^{\nu} \binom{\nu}{\mu} (\lambda_k - \mu_0)^{\mu+\nu} (\lambda - \lambda_k)^{-\mu} B_\nu + \\ &+ \sum_{\nu=0}^{\infty} ((\mu_0 - \lambda)^{-1} - (\mu_0 - \lambda_k)^{-1})^\nu A_\nu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{\mu=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{-\mu} \left[ \sum_{\nu=\mu}^m \binom{\nu}{\mu} (\lambda_k - \mu_0)^{\mu+\nu} B_\nu \right] + \\
&+ \sum_{\nu=1}^m (\lambda_k - \mu_0)^\nu B_\nu + \sum_{\nu=0}^{\infty} ((\mu_0 - \lambda)^{-1} - (\mu_0 - \lambda_k)^{-1})^\nu A_\nu \\
&= \sum_{\mu=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{-\mu} C_\mu + R_s(\lambda)
\end{aligned}$$

dove  $R_s(\lambda)$  è una funzione analitica per  $0 \leq |\lambda - \lambda_k| < \varepsilon$ .

Si ricava allora per  $|\lambda - \lambda_k| < \varepsilon$ ,  $\lambda \neq \lambda_k$ :

$$F(\lambda) = \sum_{\mu=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{-\mu} \langle C_\mu f, f^* \rangle_{E, E'} + \tilde{R}_s(\lambda)$$

con  $\tilde{R}_s(\lambda)$  funzione analitica per  $0 \leq |\lambda - \lambda_k| < \varepsilon$ .

È facile verificare che se  $B_\nu \varphi \neq 0$  per  $\varphi \in E$  allora  $B_\nu \varphi$  è un autovettore generalizzato di  $S$  relativo all'autovalore  $\tilde{\mu}_k$ <sup>8)</sup> e quindi

<sup>8)</sup> Si osservi che da (1.8) risulta

$$\begin{aligned}
I &= R(\mu; S)(\mu I - S) = R(\mu; S)[(\mu - \tilde{\mu}_k)I + (\tilde{\mu}_k I - S)] \\
&= (\mu - \tilde{\mu}_k)^{-m} B_m (\tilde{\mu}_k I - S) + \sum_{\nu=1}^{m-1} [B_\nu (\tilde{\mu}_k I - S) + B_{\nu+1}]. (\mu - \tilde{\mu}_k)^{-\nu} + \\
&+ B_1 + A_0 (\tilde{\mu}_k I - S) + \sum_{\nu=1}^{\infty} [A_\nu (\tilde{\mu}_k I - S) + A_{\nu-1}] (\mu - \tilde{\mu}_k)^\nu
\end{aligned}$$

e quindi

$$B_m (\tilde{\mu}_k I - S) = 0, \quad B_\nu (\tilde{\mu}_k I - S) = -B_{\nu+1} \quad \nu = 1, \dots, m-1;$$

si ha perciò

$$(\tilde{\mu}_k I - S)^{m+1-\nu} B_\nu = 0 \quad \text{per } \nu = 0, 1, \dots, m \quad \text{da cui si ha per } \varphi \in E:$$

$$(\tilde{\mu}_k I - S)^m B_1 \varphi = 0, \quad (\tilde{\mu}_k I - S)^{m-1} B_2 \varphi = 0, \dots, (\tilde{\mu}_k I - S) B_m \varphi = 0$$

e quindi se  $B_\nu \varphi \neq 0$  allora  $B_\nu \varphi$  è un autovettore generalizzato di  $S$  relativo all'autovalore  $\tilde{\mu}_k$ .

per la (1.6) risulta per  $\mu = 1, \dots, m$

$$\langle C_\mu f, f^* \rangle_{E, E'} = \sum_{\nu=\mu}^m \binom{\nu}{\mu} (\lambda_k - \mu_0)^{\mu+\nu} \langle B_\nu f, f^* \rangle_{E, E'} = 0$$

e dunque  $\lambda = \lambda_k$  è una singolarità apparente di  $F(\lambda)$  che è perciò una funzione analitica intera rappresentabile per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con la formula (1.7) oppure con

$$(1.9) \quad F(\lambda) = \langle R\left(\frac{1}{\mu_0 - \lambda}; S\right) f, f^* \rangle_{E, E'}$$

C. V. D.

**OSSERVAZIONE.** Se  $E$  è uno spazio di Hilbert e se  $R(\mu; S)$  è un operatore compatto di classe  $C_p$  (per la cui def. v. per es. Dunford-Schwartz [10] cap. XI § 9) allora dall'ipotesi (ii) si ricava  $sp(S) \supset \text{Im}(S^N)$ . Tuttavia nelle applicazioni alle equazioni a derivate parziali è difficile provare che  $R(\mu; S)$  è un operatore di classe  $C_p$ . Agmon [1] th. A. 1.1' ha dimostrato una maggiorazione del tipo (i); usando poi una maggiorazione del tipo (ii) da lui provata sempre in [1], egli ottiene teoremi di completezza degli autovettori generalizzati con un ragionamento al quale quello sopra fatto si ispira.

Si può ora dimostrare il seguente teorema.

**TEOREMA 1.3.** *Sia  $T$  un operatore chiuso non limitato nello spazio di Banach  $E$ , di dominio  $D(T)$  denso in  $E$ . L'iniezione di  $D(T)$ , munito della norma del grafico, in  $E$  sia compatta; sia  $\chi(T) = 0$  e sia  $\varrho(T) \neq \emptyset$ ; sia  $\mu_0 \in \varrho(T)$  e sia  $S = R(\mu_0; T)$ . Risultino inoltre verificate le condizioni:*

( $\alpha$ ) *esiste una successione di numeri positivi  $\varrho_i \rightarrow 0, i = 1, 2, \dots$  tali che  $R(\mu; S)$  esiste ovunque su  $|\mu| = \varrho_i$  ed inoltre*

$$\|R(\mu; S)\|_{E \rightarrow E} \leq C_1 \exp(|\mu|^{-q}) \quad \text{per } |\mu| = \varrho_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

con  $q$  numero reale fissato con  $0 < q < +\infty$ ;



( $\beta$ ) esistono dei raggi  $\gamma_s = \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg \lambda = \theta_s\}$   $s = 1, 2, \dots$ ,  $k < +\infty$  che dividono il piano complesso in angoli di ampiezza  $< \frac{\pi}{q}$  e tali che  $\lambda \in \gamma_s$  con  $|\lambda| \geq L$  opportuno implica  $\lambda \in \rho(T)$  e la maggiorazione

$$(1.10) \quad \|R(\lambda; T)\|_{E \rightarrow E} \leq c_2 |\lambda|^N \quad \text{per } |\lambda| \rightarrow +\infty, \quad \arg \lambda = \theta_s$$

per  $s = 1, 2, \dots, k$  con  $N$  intero  $\geq -2$  fissato.

Allora  $\text{sp}(T) = E$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Siccome  $\text{Im}(S) = D(T)$  è densa in  $E$  per la continuità di  $S$  è anche  $\text{Im}(S^n)$  densa in  $E$  per ogni  $n \geq 2$ . Usando poi la relazione

$$R\left(\frac{1}{\mu_0 - 1}; S\right) = (\mu_0 - \lambda) I - (\mu_0 - \lambda)^2 R(\lambda; T)$$

si ricava dalla (1.10) la (1.5) e per la prop. 1.4 si ha l'asserto.

C. V. D.

## n. 2. Problemi ai limiti ellittici.

1. Sia  $G$  un aperto, eventualmente non limitato, di  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) di frontiera  $\partial G$  varietà di classe  $C^s$ ,  $s = 0, 1, \dots, \infty$  fissato,  $\bar{G} = G \cup \partial G$  essendo considerato come varietà a bordo di classe  $C^s$  con bordo  $\partial G$ .

Con nomenclatura abituale se  $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$  e  $|k| = k_1 + \dots + k_n$  si pone  $D^k u = \frac{\partial^{|k|} u}{\partial x_1^{k_1} \dots \partial x_n^{k_n}}$ ,  $D^{(0, \dots, 0)} u = u$ .

$\mathcal{D}(G)$  è lo spazio delle funzioni (a valori complessi) indefinitamente differenziabili con continuità a supporto compatto in  $G$ .  $W^{h,p}(G)$  per  $1 < p < +\infty$ ,  $h = 0, 1, \dots, s$  è lo spazio delle (classi di) funzioni di potenza  $p$ -esima sommabile in  $G$  con le derivate  $D^k u$ ,  $|k| \leq h$ , intese nel senso delle distribuzioni su  $G$ , normato da

$$u \rightarrow \|u\|_{W^{h,p}(G)} = \left( \sum_{|k| \leq h} \|D^k u\|_{L^p(G)}^p \right)^{1/p}$$

$W^{h,p}(G)$  per  $0 < h < 1$ ,  $1 < p < +\infty$  è lo spazio delle  $u \in L^p(G)$  tali che sia finita la quantità

$$\|u\|_{L^p(G)}^p + \iint_G \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+ph}} dx dy$$

normato prendendo come norma la radice  $p$ -esima di essa.

Per  $h$  reale,  $1 < h < s$ , detta  $[h]$  la parte intera di  $h$ ,  $h = [h] + \sigma$ ,  $W^{h,p}(G)$ ,  $1 < p < +\infty$ , è lo spazio delle  $u \in W^{[h],p}(G)$  tali che  $D^k u \in W^{\sigma,p}(G)$  per  $|k| = [h]$ , normato da

$$u \rightarrow \|u\|_{W^{h,p}(G)} = (\|u\|_{W^{[h],p}(G)}^p + \sum_{|k|=[h]} \|D^k u\|_{W^{\sigma,p}(G)}^p)^{1/p}.$$

Detta poi  $\overset{\circ}{W}^{h,p}(G)$  la chiusura di  $\mathcal{D}(G)$  in  $W^{h,p}(G)$  si definisce infine per  $1 < p < +\infty$ ,  $h$  reale,  $0 \leq h \leq s$

$$W^{-h,p}(G) = (\overset{\circ}{W}^{h,p'}(G))' \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Gli stessi spazi possono essere naturalmente definiti in  $\mathbb{R}^n$  in modo analogo e quindi per carte locali si possono definire gli spazi  $W^{h,p}(\partial G)$  (v. per es. Lions-Magenes [14], ...).

Indicato con  $W_{\bar{G}}^{-h,p}(\mathbb{R}^n)$  lo spazio delle  $u \in W^{-h,p}(\mathbb{R}^n)$  con  $\text{supp}(u) \subset \bar{G}^9$  munito della norma indotta da  $W^{-h,p}(\mathbb{R}^n)$  si può dimostrare (v. per es. Magenes-Stampacchia [17], ...) che

$$(W^{h,p}(G))' \simeq W_{\bar{G}}^{-h,p'}(\mathbb{R}^n), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Inoltre data  $f \in W^{h,p}(G)$  e detto  $F$  un suo arbitrario prolungamento

<sup>9)</sup> Se  $u \in W_{\bar{G}}^{-h,p}(\mathbb{R}^n)$  si indica per comodità sempre con  $u$  la distribuzione definita in  $\mathbb{R}^n$  e la restrizione di tale distribuzione a  $\bar{G}$ .

in  $W^{h,p}(\mathbb{R}^n)$  si definisce

$$\langle f, u \rangle_{W^{h,p}(G), W_{\bar{G}}^{-h,p'}(\mathbb{R}^n)}$$

ponendo

$$\langle f, \bar{u} \rangle_{W^{h,p}(G), W_{\bar{G}}^{-h,p'}(\mathbb{R}^n)} = \langle F, \bar{u} \rangle_{W^{h,p}(\mathbb{R}^n), W^{-h,p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Per  $f \in W^{h,p}(G)$ ,  $u \in W_{\bar{G}}^{-k,p'}(\mathbb{R}^n)$  con  $0 \leq k \leq h$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , risulta dalla definizione data

$$\langle f, \bar{u} \rangle_{W^{h,p}(G), W_{\bar{G}}^{-h,p'}(\mathbb{R}^n)} = \langle f, \bar{u} \rangle_{W^{k,p}(G), W_{\bar{G}}^{-k,p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

Si indica con  $W^{h,\infty}(G)$ ,  $h = 0, 1, \dots, s$  lo spazio delle  $u \in L^\infty(G)$  insieme con tutte le derivate di ordine  $\leq h$  munito della norma abituale

$$u \rightarrow \|u\|_{W^{h,\infty}(G)} = \sum_{|k| \leq h} \|D^k u\|_{L^\infty(G)}.$$

In modo analogo si definisce  $W^{h,\infty}(\mathbb{R}^n)$  e per carte locali  $W^{h,\infty}(\partial G)$ .

Si indica con  $C^h(\bar{G})$ ,  $h = 0, 1, \dots, s$  lo spazio delle funzioni continue e limitate in  $\bar{G}$  con le derivate parziali di ordine  $\leq h$ ; si ottiene uno spazio di Banach quando si definisce la norma

$$u \rightarrow \|u\|_{C^h(\bar{G})} = \sum_{|k| \leq h} \sup_{x \in \bar{G}} |D^k u(x)|.$$

In maniera analoga si definisce  $C^h(\partial G)$ .

Nel caso in cui  $G$  sia un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  si scriverà sempre  $\Omega$  invece di  $G$ , e  $\Gamma$  invece di  $\partial G$ .

2. Sia  $G$  un aperto (eventualmente non limitato) di  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) di frontiera  $\partial G$  varietà di dimensione  $n - 1$  sufficientemente regolare;  $\bar{G} = G \cup \partial G$  è considerato come varietà a bordo sufficientemente regolare con bordo  $\partial G$ . Le ipotesi di regolarità verranno precisate più avanti (v. ipotesi (IV;  $\alpha$ )).

Si consideri in  $\bar{G}$  l'operatore differenziale lineare

$$A = A(x; D) = \sum_{|\mu| \leq 2m} a_\mu(x) D^\mu$$

a coefficienti  $a_\mu$  (a valori complessi) sufficientemente regolari (v. ipotesi (V;  $\alpha$ )) di parte principale

$$A^0 = A^0(x; D) = \sum_{|\mu| = 2m} a_\mu(x) D^\mu.$$

Si facciano sull'operatore  $A$  le seguenti ipotesi.

(I) (IPOTESI DI ELLITTICITÀ). Per ogni  $x \in \bar{G}$ , per ogni  $\xi \in \mathbb{R}_*^n$  <sup>10)</sup> risulta

$$A^0(x, \xi) \neq 0.$$

(II) (IPOTESI DI ELLITTICITÀ PROPRIA). Per ogni  $x \in \partial G$ , per ogni  $\xi \in \mathbb{R}_*^n$  tangente a  $\partial G$  in  $x$ , per ogni  $\nu \in \mathbb{R}_*^n$  normale a  $\partial G$  (interna a  $G$ ) in  $x$ , il polinomio, in  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $A^0(x; \xi + \tau\nu)$  ha  $m$  radici  $\tau_k^+(x; \xi, \nu)$   $k = 1, \dots, m$ , con parte immaginaria positiva ed  $m$  radici  $\tau_k^-(x; \xi, \nu)$ ,  $k = 1, \dots, m$ , con parte immaginaria negativa.

Come è noto (v. per es. [3], ...) se  $n \geq 3$  l'ipotesi (II) è conseguenza dell'ipotesi (I).

Si consideri su  $\partial G$  la famiglia di operatori differenziali lineari

$$B_j = B_j(x; D) = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu \quad j = 1, \dots, m$$
 <sup>11)</sup>

a coefficienti (a valori complessi) sufficientemente regolari (v. ipotesi

<sup>10)</sup>  $\mathbb{R}_*^n = \{x \in \mathbb{R}^n; x \neq 0\}$ .

<sup>11)</sup> Si intende che per  $u$  « regolari » tali operatori sono definiti da

$$u \rightarrow B_j u = \sum_{|\mu| \leq m_j} b_{j\mu}(x) [(D^\mu u)|_{\partial G}]$$

e per  $u \in \mathcal{W}^{h,p}(G)$  mediante opportuni « teoremi di tracce ».

(VI;  $\alpha$ ) definiti su  $\Gamma$  con parte principale

$$B_j^0 = B_j^0(x; D) = \sum_{|\mu|=m_j} b_{j\mu}(x) D^\mu \quad j = 1, \dots, m.$$

Si faccia sugli operatori  $B_j$  la seguente ipotesi.

(III) (CONDIZIONE COMPLEMENTARE). Per ogni  $x \in \partial G$ , per ogni  $\xi \in \mathbb{R}_*^n$  tangente a  $\partial G$  in  $x$ , per ogni  $\nu \in \mathbb{R}_*^n$  normale a  $\partial G$  (interna a  $G$ ) in  $x$ , i polinomi in  $\tau \in \mathbb{C}$ ,  $B_j^0(x; \xi + \tau\nu)$ ,  $j = 1, \dots, m$  sono linearmente indipendenti modulo  $\prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^+(x; \xi, \nu))$ .

Per  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato si considerino le seguenti ipotesi di regolarità

(IV;  $\alpha$ )  $G$  è un aperto di  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) di frontiera  $\partial G$  varietà di dimensione  $n-1$  di classe  $C^{l+\alpha}$  con  $l_1 = \max(2m, m_1 + 1, \dots, m_m + 1)$ ;  $\bar{G} = G \cup \partial G$  è considerata come varietà di classe  $C^{l+\alpha}$  a bordo, con bordo  $\partial G$ .

(V;  $\alpha$ ) Risulta  $a_\mu \in C^{l-2m+\alpha}(\bar{G})$  per  $|\mu| = 2m$ ,  $a_\mu \in W^{l-2m+\alpha, \infty}(G)$  per  $|\mu| < 2m$ .

(VI;  $\alpha$ ) Risulta  $b_{j\mu} \in C^{l-m_j+\alpha}(\bar{G})$  per  $|\mu| = m_j$ ;  $b_{j\mu} \in W^{l-m_j+\alpha, \infty}(\partial G)$  per  $|\mu| < m_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ .

Grazie alle ipotesi di regolarità (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) è facile verificare che se  $x \in K$  con  $K$  compatto di  $\bar{G}$  (nel caso di  $G$  limitato, si può assumere  $K = \bar{G}$ ) allora:

(i) esistono due circuiti fissi  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$  limitati e completamente contenuti nei semipiani  $\text{Im } \tau > 0$  ed  $\text{Im } \tau < 0$  che racchiudono le radici  $\tau_k^+(x; \xi, \nu)$  e  $\tau_k^-(x; \xi, \nu)$  al variare di  $x \in K$ ;

(ii) posto

$$B_j^0(x; \xi + \tau\nu) = \sum_{i=0}^{m-1} b_{ij}(x; \xi, \nu) \tau^i + k_j(x; \xi, \nu) \prod_{k=1}^m (\tau - \tau_k^+(x; \xi, \nu))$$

per  $j = 1, \dots, m$  e posto  $d(x; \xi, \nu) = \det \| b_{ij}(x; \xi, \nu) \|_{\substack{i=0, \dots, m-1 \\ j=1, \dots, m}}$  esi-

ste  $\Delta > 0$  tale che per ogni  $x \in K \cap \partial G$  risulta

$$\Delta(x) = \min_{|\xi|=|\nu|=1} |d(x; \xi, \nu)| \geq \Delta > 0.$$

3. Sotto le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato si consideri per  $p \in ]1, +\infty[$  e per  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$  fissati l'operatore

$$u \rightarrow T_{p,k} u = \{Au, B_1 u, \dots, B_m u\}$$

lineare e continuo da  $W^{l+k,p}(G)$  in

$$W^{l-2m+k,p}(G) \times \prod_{j=1}^m W^{l-m_j+k-1/p,p}(\partial G)$$

(se  $k = 0$  si scrive  $T_p$  e non  $T_{p,0}$ ). Agmon-Douglis-Nirenberg [3], Browder [8] hanno dimostrato il seguente risultato

**TEOREMA 2.1.** *Siano verificate (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato. Allora per ogni compatto  $K \subset \bar{G}$ , per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  e per  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$  esiste una costante  $C = C(K, p, k)$  tale che per ogni  $u \in W^{l+k,p}(G)$  a supporto compatto contenuto in  $K$  vale la maggiorazione*

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{l+k,p}(G)} &\leq C \left\{ \|T_{p,k} u\|_{W^{l+k-2m,p}(G) \times \prod_{j=1}^m W^{l+k-m_j-1/p,p}(\partial G)} + \right. \\ (2.1) \quad &\left. + \|u\|_{W^{l+k-1,p}(G)} \right\}. \end{aligned}$$

Considerato l'operatore  $'T_p$  esso è lineare e continuo da

$$\begin{aligned} \left( W^{l-2m,p}(G) \times \prod_{j=1}^m W^{l-m_j-1/p,p}(\partial G) \right)' &\simeq \\ &\simeq W_{\bar{G}}^{-l+2m,p'}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+1/p,p'}(\partial G) \end{aligned}$$

<sup>12)</sup> Se  $\alpha = \infty$  allora  $k \in \mathbb{N}$ .

in  $(W^{-l,p}(G))' \simeq W_{\bar{G}}^{-l,p'}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Peetre [18] ha dimostrato per tale operatore il seguente risultato.

**TEOREMA 2.2.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ) (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato. Allora per ogni compatto  $K \subset \bar{G}$  e per ogni  $\varepsilon > 0$  con  $\varepsilon \leq \alpha + \frac{1}{2} + \inf_{j=1, \dots, m} (m_j)$ <sup>43</sup> esiste una costante  $C_1 = C_1(K, \varepsilon)$  tale che per ogni*

$$F = \{f; g_1, \dots, g_m\} \in W_{\bar{G}}^{-l+2m,2}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+\frac{1}{2},2}(\partial G)$$

a supporto compatto contenuto in  $K \times (\partial G \cap K) \times \dots \times (\partial G \cap K)$  vale la maggiorazione

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \|F\|_{W_{\bar{G}}^{-l+2m,2}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+\frac{1}{2},2}(\partial G)} &\leq C_1 \left\{ \|{}^t T_2 F\|_{W_{\bar{G}}^{-l,2}(\mathbb{R}^n)} + \right. \\ &\left. + \|F\|_{W_{\bar{G}}^{-l+2m-1,2}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+\frac{1}{2}-\varepsilon,2}(\partial G)} \right\}. \end{aligned}$$

4. Nel caso in cui  $G$  sia un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  che allora si indicherà con  $\Omega$ , l'iniezione di  $W^{l+k,p}(\Omega)$  in  $W^{l+k-1,p}(\Omega)$  e di

$$\begin{aligned} W_{\bar{\Omega}}^{-l+2m,2}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+\frac{1}{2},2}(\Gamma) &\text{ in} \\ W_{\bar{\Omega}}^{-l+2m-1,2}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+\frac{1}{2}-\varepsilon,2}(\Gamma) & \end{aligned}$$

sono compatte per ogni  $\varepsilon > 0$  e quindi dalla proposizione 1.1 si ricava che  $\dim \text{Ker}(T_{p,k}) < +\infty$ ,  $\dim \text{Ker}({}^t T_2) < +\infty$ ; dal teorema 1.2 ii) segue poi che  $\chi(T_2) < +\infty$ .

<sup>43</sup>) Se  $\alpha = \infty$  allora  $\varepsilon$  può essere un qualsiasi numero reale  $> 0$

Nel caso di  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  segue poi dai teoremi di regolarizzazione di [3] che se  $u \in W^{l+k,p}(\Omega)$  e  $T_{p,k} u \in W^{l+k-2m+1,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{l+k-m_j-1/p+1,p}(\Gamma)$  allora  $u \in W^{l+k+1,p}(\Omega)$  ( $k=0, 1, \dots, \alpha-1$ )<sup>12)</sup> e quindi risulta in particolare  $\text{Ker}(T_{p,k})$  indipendente da  $k$ ; applicando poi le inclusioni di Sobolev si prova con il ragionamento di [11] (dim. del corollario 1.1, pag. 214) che  $\text{Ker}(T_{p,k})$  non dipende né da  $p \in ]1, +\infty[$  né da  $k=0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup>. Sempre nel caso di  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  applicando i risultati di regolarizzazione all'operatore  ${}^tT_2$  si può provare (v. per es. [18], [11], ...) che  $T_{2,k}$  ammette indice per  $k=0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup> e tale indice non dipende da  $k=0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup>.

È stato inoltre provato il seguente teorema (v. per es. [11], [20], [23].)

**TEOREMA 2.3.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $G = \Omega$  limitato. Allora l'operatore  $T_{p,k}$  ammette indice  $\chi(T_{p,k})$  per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ ,  $k=0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup>; se poi  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  allora l'indice non dipende né da  $p \in ]1, +\infty[$  né da  $k=0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup>.*

Le dimostrazioni date di tale teorema per  $p \neq 2$  si basano sulla costruzione di una opportuna « parametrix » per provare che  $\text{Im}(T_{p,k})$  ha codimensione finita; la costruzione di tale parametrix è sempre piuttosto laboriosa. Pare quindi utile riportare qui una dimostrazione, che sembra nuova, di questo teorema nel caso in cui sia  $\alpha = 1, \dots, \infty$  fissato e che non fa uso della « parametrix », ma invece utilizza il risultato di Peetre [18] e le immersioni di Sobolev.

Per la dimostrazione è utile il seguente lemma.

**LEMMA 2.1.** *Siano verificate le ipotesi del teor. 2.3. con  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  fissato. Posto  $E_{p,k} = W^{l-2m+k,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{l-m_j+k-1/p,p}(\Gamma)$ , sia  $1 < p < +\infty$  fissato.*

*Se per un certo  $k^* = 0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup>  $\text{Im}(T_{p,k^*})$  ha codimensione finita in  $E_{p,k^*}$ , allora  $\text{Im}(T_{p,k})$  ha codimensione finita in  $E_{p,k}$  per ogni  $k = 0, 1, \dots, \alpha$ <sup>12)</sup> e risulta*

$$\text{codim}_{E_{p,k}} \text{Im}(T_{p,k}) = \text{codim}_{E_{p,k^*}} \text{Im}(T_{p,k^*}).$$



DIMOSTRAZIONE. Sia  $0 \leq k < k^*$ ; si applichi la prop. 1.2 assumendo  $E_0 = E_{p,k}$ ,  $E_1 = E_{p,k^*}$ ,  $A_0 = \text{Im}(T_{p,k})$ ,  $A_1 = \text{Im}(T_{p,k^*})$ . Sia  $k^* < k$ ; si applichi la prop. 1.2 assumendo  $E_0 = E_{p,k^*}$ ,  $E_1 = E_{p,k}$ ,  $A_0 = \text{Im}(T_{p,k^*})$ ,  $A_1 = \text{Im}(T_{p,k})$ . Si osservi che in ogni caso le ipotesi di tale prop. 1.2 sono verificate grazie ai risultati di regolarizzazione di [3] sopra ricordati.

C. V. D.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOR 2.3 (nel caso  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  fissato). Per quanto osservato in precedenza basta provare che  $\text{codim}_{E_{p,k}} \text{Im}(T_{p,k})$  non dipende da  $p \in ]1, +\infty[$  e da  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$  perchè allora si ha  $\text{codim}_{E_{p,k}} \text{Im}(T_{p,k}) = \text{codim}_{E_{2,0}} \text{Im}(T_{2,0}) < +\infty$  e l'esistenza dell'indice finito sarà provata.

Sia  $k$  intero  $\geq 1$  fissato; sia poi  $p$  fissato in modo che  $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}$ . Grazie al teorema di Sobolev risulta  $E_{p,k} \subset E_{2,k-1}$  algebricamente e topologicamente. Applichiamo la prop. 1.2 assumendo  $E_0 = E_{2,k-1}$ ,  $E_1 = E_{p,k}$ ,  $A_0 = \text{Im}(T_{2,k-1})$ ,  $A_1 = \text{Im}(T_{p,k})$ . Le ipotesi (i) ed (ii) della prop. 1.2 sono verificate in modo evidente. Si hanno poi le inclusioni algebriche e topologiche

$$\text{Im}(T_{p,k}) \subset \text{Im}(T_{2,k-1}) \cap E_{p,k}$$

$$\text{Im}(T_{2,k-1}) \subset \text{Im}(T_{p,k-1}) \cap E_{2,k-1}$$

e inoltre per i teoremi di regolarizzazione di [3] è

$$\text{Im}(T_{p,k}) = \text{Im}(T_{p,k-1}) \cap E_{p,k}$$

risulta quindi

$$\text{Im}(T_{p,k}) \subset \text{Im}(T_{2,k-1}) \cap E_{p,k} \subset \text{Im}(T_{p,k-1}) \cap E_{p,k} = I_m(T_{p,k})$$

e quindi anche l'ipotesi (iii) della prop. 1.2 è verificata. Si ottiene dunque applicando anche il lemma 2.1 e il risultato di Peetre [18] sopra ricordato

$$\text{codim}_{E_{p,k}} \text{Im}(T_{p,k}) = \text{codim}_{E_{2,0}} \text{Im}(T_{2,0}) < +\infty.$$

Se poi si fissa  $p$  in modo che  $\frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}$  allora per applicare la prop. 1.2 basta assumere  $E_0 = E_{p, k-1}$ ,  $E_1 = E_{2, k}$ ,  $A_0 = \text{Im}(T_{p, k-1})$ ,  $A_1 = \text{Im}(T_{2, k})$  e ripetere il ragionamento fatto sopra.

Procedendo in modo analogo si può provare per tappe successive che per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  per ogni  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12})$  è

$$\text{codim}_{E_{p, k}} \text{Im}(T_{p, k}) = \text{codim}_{E_{2, 0}} \text{Im}(T_2) < +\infty.$$

C. V. D.

5. Grazie ad un teorema di esistenza locale (v. ad es. [11] n. 3 dove da tale risultato si deduce il teorema 2.3) dalla prop. 1.1 applicata all'operatore  ${}^tT_p$  si ricava senza difficoltà il seguente risultato

**TEOREMA 2.4.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato. Allora per ogni compatto  $K \subset \bar{G}$  per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  per ogni  $\varepsilon > 0$  con  $\varepsilon \leq \alpha + \frac{1}{p} + \inf_{j=1, \dots, m} (m_j)^{13}$ , esiste una costante  $C_2 = C_2(K, p, \varepsilon)$  tale che per*

*ogni  $F = \{f; g_1, \dots, g_m\} \in W^{-l+2m, p'}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+\frac{1}{p}, p'}(\partial G)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , a supporto compatto contenuto in  $K \times (\partial G \cap K) \times \dots \times (\partial G \cap K)$  vale la maggiorazione*

$$\begin{aligned} (2.3) \quad & \|F\|_{W_K^{-l+2m, p'}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W^{-l+m_j+1/p, p'}(\partial G)} \leq C_2 \{ \|{}^tT_p F\|_{W_K^{-l, p'}(\mathbb{R}^n)} + \\ & + \|F\|_{W_K^{-l+2m-1, p'}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=1}^m W_{K \cap \partial G}^{-l+m_j+1/p-\varepsilon, p'}(\partial G)} \}. \end{aligned}$$

6. Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $G = \Omega$  limitato; si consideri l'operatore  $A_{p, k}$  non limitato di  $W^{l-2m+k, p}(\Omega)$  in sè di dominio  $D(A_{p, k}) = \{u \in W^{l+k, p}(\Omega); B_j u = 0 \ j = 1, \dots, m\}$  definito da

$$u \rightarrow A_{p, k} u = A(x, D) u \quad \text{per } u \in D(A_{p, k}).$$

Tale operatore viene detto *la realizzazione di  $A$  sotto le condizioni ai limiti*  $\{B_j\}_{j=1}^m$  (v. Agmon [1], Browder [8], ...).

Applicando il teor. 1.1 risulta immediatamente dal teor. 2.3 il seguente risultato.

**TEOR. 2.5.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $G = \Omega$  limitato. L'operatore  $A_{p,k}$  è chiuso, ha immagine chiusa, verifica  $\text{Ker}(A_{p,k}) = \text{Ker}(T_{p,k})$  ed ammette indice finito  $\chi(A_{p,k})$  legato a  $\chi(T_{p,k})$  dalla (1.4). Se inoltre  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  fissato  $\chi(A_{p,k})$  e  $\text{Ker}(A_{p,k})$  non dipendono né da  $p \in ]1, +\infty[$  né da  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$ .*

Grazie alle maggiorazioni a priori (2.1) risulta su  $D(A_{p,k})$  la norma del grafico equivalente a quella indotta da  $W^{h+k,p}(\Omega)$  e quindi l'iniezione di  $D(A_{p,k})$  in  $W^{h-2m+k,p}(\Omega)$  è compatta.

Applicando allora la prop. 1.3 ed il teor. 2.5 si ottengono innanzitutto i seguenti primi risultati di teoria spettrale per l'operatore  $A_{p,k}$ .

**PROPOSIZIONE 2.1.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ) (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $G = \Omega$  limitato. Allora:*

(i)  $\sigma(A_{p,k}) = \mathbb{C}$  oppure  $\sigma(A_{p,k})$  è discreto senza punti di accumulazione al finito;

(ii) condizione necessaria, ma non sufficiente, perchè  $\varrho(A_{p,k}) \neq \emptyset$  è che sia  $\chi(A_{p,k}) = 0$ ; se inoltre  $\varrho(A_{p,k}) \neq \emptyset$  ogni  $\lambda_0 \in \sigma(A_{p,k})$  è un polo di ordine finito di  $R(\lambda; A_{p,k})$ .

Se  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  fissato allora  $\sigma(A_{p,k})$  non dipende né da  $p \in ]1, +\infty[$  né da  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$ .

In virtù di questa proposizione ci si può limitare a studiare, per quanto riguarda le proprietà dello spettro, il caso in cui sia  $k = 0$  (si scriverà allora  $A_p$  e non  $A_{p,0}$ ).

Per verificare che per un  $\lambda_0$  fissato risulta  $\text{Ker}(A_p - \lambda_0 I) = \{0\}$  è ovviamente sufficiente verificare che esiste una costante  $C(\lambda_0) > 0$  tale che per ogni  $u \in D(A_p)$  sia

$$(2.4) \quad \|u\|_{W^{h-2m,p}(\Omega)} \leq C(\lambda_0) \|A_p u - \lambda_0 u\|_{W^{h-2m,p}(\Omega)},$$

Siccome però interessa anche studiare la completezza degli autovettori generalizzati (nel senso del teor. 1.3) è utile stabilire un risultato più generale in cui si provi che  $C(\lambda_0) = C|\lambda_0|^N$  e che tale maggiorazione vale per ogni  $\lambda_0$  di modulo abbastanza grande con  $\arg \lambda_0 = \theta$  (tale risultato verrà provato nel n. 3 con il teor. 3.1). Considerato l'operatore  $E: u \rightarrow \{u; 0, \dots, 0\}$  lineare e continuo da  $W^{l,p}(\Omega)$  in  $W^{l-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=i}^m W^{l-m_j-1/p,p}(\Gamma)$ , per provare che  $\text{Im}(A_p - \lambda_0 I) = W^{l-2m,p}(\Omega)$  è sufficiente provare che

$$\text{Im}(T_p - \lambda_0 E) = W^{l-2m,p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m \text{Im}(B_j)$$

e quindi è sufficiente provare che

$$\text{Ker}({}^t T_p - \bar{\lambda}_0 {}^t E) = \{0\} \times \prod_{j=1}^m \text{Im}(B_j)^0.$$

Per stabilire quest'ultimo fatto basta verificare la seguente maggiorazione a priori per

$$\begin{aligned} F &= \{f; g_1, \dots, g_m\} \in W_{\Omega}^{-l+2m,p'}(\mathbb{R}^n) \times \\ &\quad \times \prod_{j=i}^m W^{-l+m_j+1/p,p'}(\Gamma), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \\ (2.5) \quad \|F\|_{W_{\Omega}^{-l+2m,p'}(\mathbb{R}^n) \times \prod_{j=i}^m W^{-l+m_j+1/p,p'}(\Gamma)} &\leq \\ &\leq C(\lambda_0) \|({}^t T_p - \bar{\lambda}_0 {}^t E)F\|_{W_{\Omega}^{-l,p'}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

ed anzi basta verificare tale maggiorazione per  $g_1 = \dots = g_m = 0$ ; la (2.5) nel caso generale assicura infatti che  $\text{Ker}({}^t T_p - \bar{\lambda}_0 {}^t E) = \{0\}$  e quindi che  $T_p - \lambda_0 E_p$  è *suriettiva*.

Nel successivo n. 3 verrà dimostrata (teor. 3.2) una maggiorazione del tipo (2.5) applicando ad una maggiorazione del tipo (2.3) una idea di Agmon-Nirenberg già usata da Agmon [1] per ottenere da una maggiorazione del tipo (2.1) una maggiorazione del tipo (2.4).

Nel caso  $\alpha = 0$  si può portare il seguente complemento alla prop. 2.1 (v. Agmon [1] pag 131-132).

**LEMMA 2.2.** *Siano verificate le ipotesi della prop. 2.1 con  $\alpha = 0$ . Se per  $1 < p_0 < p_1 < +\infty$  fissati è  $\varrho(A_{p_0}), \varrho(A_{p_1}) \neq \emptyset$  allora è  $\varrho(A_p) \neq \emptyset$  per ogni  $p \in [p_0, p_1]$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** È facile provare che per  $p \in [p_0, p_1]$  è  $\chi(A_{p_1}) \leq \chi(A_p) \leq \chi(A_{p_0})$  e dunque  $\chi(A_p) = 0$ . Inoltre risulta anche ovviamente  $\varrho(A_{p_0}) \subset \varrho(A_p) \subset \varrho(A_{p_1})$  poichè  $W^{l-2m, p_1}(\Omega) \subset W^{l-2m, p}(\Omega) \subset W^{l-2m, p_0}(\Omega)$ .

C. V. D.

Si ha il seguente risultato di regolarizzazione (v. Agmon [1] pag. 131-132).

**PROPOSIZIONE 2.2.** *Siano verificate le ipotesi della prop. 2.1. Inoltre se  $\alpha = 0$  sia  $\varrho(A_{p_0}), \varrho(A_{p_1}) \neq \emptyset$  per  $1 < p_0 < p_1 < +\infty$  fissati; se  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  sia  $\varrho(A_{p_0}) \neq \emptyset$  per un  $p_0 \in ]1, +\infty[$ . Se  $u \in D(A_{p_0})$  ed  $A_{p_0} u = f \in W^{l-2m, p}(\Omega)$  con  $p > p_0$  (e  $p \leq p_1$  per  $\alpha = 0$ ), allora risulta  $u \in D(A_p)$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Dalla prop. 2.1 nel caso  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  e dal lemma 2.2 nel caso  $\alpha = 0$  segue  $\varrho(A_p) \neq \emptyset$ . Sia  $\bar{p} = p$  se  $p_0 \geq \frac{n}{2m}$ , sia  $\frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{p_0} - \frac{2m}{n}$  se  $p_0 < \frac{n}{2m}$ ; in ogni caso è  $p_0 < \bar{p} \leq p (\leq p_1$  se  $\alpha = 0)$ ; sia dunque  $\mu \in \varrho(A_{p_0}) \cap \varrho(A_{\bar{p}})$  e data  $u \in D(A_{p_0})$  sia  $A_{p_0} u = f \in W^{l-2m, p}(\Omega) \subset W^{l-2m, \bar{p}}(\Omega)$  e si ponga

$$g = f - \mu u = (A_{p_0} - \mu I) u$$

Poichè  $u \in W^{l, p_0}(\Omega)$  per il teorema di Sobolev  $u \in W^{l-2m, \bar{p}}(\Omega)$  e dunque  $g \in W^{l-2m, \bar{p}}(\Omega)$ ; sia ora  $v \in D(A_{\bar{p}})$  l'unico elemento tale che

$$(A_{\bar{p}} - \mu I) v = g$$

poichè  $D(A_{\bar{p}}) \subset D(A_{p_0})$  e  $\mu \in \varrho(A_{p_0}) \cap \varrho(A_{\bar{p}})$  deve essere  $v = u$  e dun-

que  $u \in W^{l, \bar{p}}(\Omega)$ ; proseguendo allo stesso modo in un numero finito di tappe si ha  $u \in D(A_p)$ .

C. V. D.

**COROLLARIO.** *Sotto le ipotesi del lemma 2.2 risulta  $\rho(A_{p_0}) = \rho(A_p) = \rho(A_{p_1})$  per ogni  $p \in [p_0, p_1]$ .*

**n. 3. Le maggiorazioni a priori.**

In tutto questo numero è  $\Omega$  un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$ .

1. Adattando una idea di Agmon-Nirenberg (v. [1] ed anche Agranovich-Vishik [6]) si introduca la seguente ipotesi per  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato.

$(AN; \theta)$  *L'operatore definito su  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$*

$$L_\theta = L_\theta \left( x; D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) = A(x; D_x) - (-1)^m e^{i\theta} \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} \quad 14)$$

è ellittico in  $\bar{Q}$  e gli operatori definiti su  $\partial Q = \Gamma \times \mathbb{R}$

$$B_j = B_j \left( x; D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) = B_j(x; D_x) \quad j = 1, \dots, m$$

verificano su  $\partial Q$  la condizione complementare rispetto ad  $L_\theta$ .

Il seguente risultato è sostanzialmente contenuto in Agmon-Nirenberg [5] th. 5.2 pag. 204 e si ottiene ripetendo gli stessi ragionamenti di Agmon [1] th. 2.1.

**TEOREMA 3.1.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato ed inoltre  $(AN; \theta)$  con  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato. Allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ , per ogni  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$ ) esiste una costante  $C = C(p, k) > 0$  tale che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$*

---

<sup>14)</sup> Per comodità si indica con  $D_x$  il simbolo di derivazione rispetto ad  $x \in \mathbb{R}^n$ .

con  $\arg \lambda = \theta$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande sia

$$(3.1) \quad \|u\|_{W^{l_1+k-2m, p}(\Omega)} \leq c |\lambda|^{\frac{l_1+k}{2m}-2} \|Au - \lambda u\|_{W^{l_1+k-2m, p}(\Omega)}$$

per ogni  $u \in W^{l_1+k, p}(\Omega)$  con  $B_j u = 0$   $j = 1, \dots, m$ .

2. Considerato l'operatore lineare e continuo

$$T_p : u \rightarrow \{Au; B_1 u, \dots, B_m u\}$$

da  $W^{l_1-2m, p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{l_1-m_j-1/p, p}(\Gamma)$  si definisce l'operatore

$$E : u \rightarrow \{u; 0, \dots, 0\}$$

lineare e continuo da  $W^{l_1, p}(\Omega)$  in  $W^{l_1-2m, p}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{l_1-m_j-1/p, p}(\Gamma)$ .

Sia  ${}^tT_p$  il trasposto di  $T_p$  e sia  ${}^tE$  il trasposto di  $E$ ; risulta allora  ${}^t(T_p - \lambda E) = {}^tT_p - \bar{\lambda}^t E$ .

Si ha il seguente teorema.

**TEOREMA 3.2.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (IV;  $\alpha$ ) con*

$$l_1 = 2m, \alpha = 2m - \inf_{j=1, \dots, m} (m_j), 2m - \inf_{j=1, \dots, m} (m_j) + 1, \dots, \infty$$

fissato; sia inoltre verificata l'ipotesi (AN;  $\theta$ ) con  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato. Allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  fissato, esiste una costante  $\tilde{c} = \tilde{c}(p)$  tale che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda = \theta$  di modulo abbastanza grande e per ogni  $F = \{f; g_1, \dots, g_m\} \in L^{p'}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)$

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , sia valida la seguente maggiorazione

$$(3.2) \quad \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m |\lambda|^{-1 + \frac{m_j+1/p}{2m}} \|g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)} \leq \tilde{c} \|({}^tT_p - \bar{\lambda}^t E) F\|_{W^{-2m, p'}(\mathbb{R}^n)}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** Sia  $Q = \Omega \times \mathbb{R}$ ,  $\partial Q = \Gamma \times \mathbb{R}$ ,  $K = \bar{\Omega} \times \times [-1, +1]$ ; grazie all'ipotesi  $(AN; \theta)$  ed al fatto che  $L_\theta$  è propriamente ellittico poichè  $n + 1 \geq 3$ , l'operatore  $\mathcal{C}_{\theta, p}: v \rightarrow \{L_\theta v, B_1 v, \dots, B_m v\}$  è lineare e continuo da  $W^{2m, p}(Q)$  in

$$L^p(Q) \times \prod_{j=1}^m W^{2m-m_j-1/p, p}(\partial Q)$$

e verifica le ipotesi del teorema 2.4; considerato dunque l'operatore  ${}^v\mathcal{C}_{\theta, p}$  lineare e continuo da

$$L^{p'}(Q) \text{ in } \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q), \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

in  $W_{\bar{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})$  vale la seguente maggiorazione per ogni

$$\mathcal{F} \in L^{p'}(Q) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)$$

a supporto compatto contenuto in  $K \times (K \cap \partial Q) \times \dots \times (K \cap \partial Q)$ :

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \|\mathcal{F}\|_{L^{p'}(Q) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)} &\leq \\ &\leq C_2 \{ \|\mathcal{C}_{\theta, p} \mathcal{F}\|_{W_{\bar{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} + \\ &+ \|\mathcal{F}\|_{W_{\bar{Q}}^{-1, p'}(\mathbb{R}^{n+1}) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p-\varepsilon, p'}(\partial Q)} \} \end{aligned}$$

con  $C_2 = C_2(K, p', \varepsilon)$  indipendente da  $\mathcal{F}$  e con  $\varepsilon$  tale che  $0 < \varepsilon \leq \alpha + \frac{1}{p} + \inf_{j=1, \dots, m} (m_j)^{13}$ .

Data  $F \{f; g_1, \dots, g_m\} \in L^{p'}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)$  si assuma

$$\mathcal{F} = \{ \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes f; \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_1, \dots, \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_m \}$$

con  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \Phi(t) \leq 1$  per  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(t) \equiv 0$  per  $|t| \geq 1$   $\Phi(t) = 1$  per  $|t| \leq \frac{1}{2}$  e  $\mu$  numero reale  $> 0$ .  $\mathcal{F}$  così definita ha ovviamente



supporto compatto in  $K \times (K \cap \partial Q) \times \dots \times (K \cap \partial Q)$ ; è evidente che  $\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes f \in L^{p'}(Q)$ .

Per verificare che  $\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_j \in W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)$  per  $j = 1, \dots, m$  sia  $\xi(t, x) \in \mathcal{D}(\partial Q)$ ; allora

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_j, \overline{\xi(t, x)} \rangle_{\mathcal{D}'(\partial Q), \mathcal{D}(\partial Q)} \right| = \\ & = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(t) e^{i\mu t} \langle g_j, \xi(t) \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma), \mathcal{D}(\Gamma)} dt \right| \leq \\ & \leq \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t) e^{i\mu t}|^{p'} dt \right)^{1/p'} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \|\xi(t, \cdot)\|_{W^{2m-m_j-1/p, p}(\Gamma)}^p dt \right)^{1/p} \|g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)} \leq \\ & \leq c \|\xi\|_{W^{2m-m_j-1/p, p}(\partial Q)} \|g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)} \end{aligned}$$

e quindi per densità si ha che  $\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_j \in W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)$  ed inoltre vale la maggiorazione per  $j = 1, \dots, m$

$$\|\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)} \leq c \|g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)}$$

dove  $c$  non dipende da  $\mu$  poichè  $c = \left( \int_{-\infty}^{+\infty} |\Phi(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'}$ .

Si è così provato che  $\mathcal{F} \in L^{p'}(Q) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)$ ; per calcolare  ${}^t\mathcal{C}_{\theta, p} \mathcal{F}$  si ottiene, indicando con  $v(t, x)$  un qualsiasi elemento di  $W^{2m, p}(Q)$ :

$$\begin{aligned} & \langle v, {}^t\mathcal{C}_{\theta, p} \mathcal{F} \rangle_{W^{2m, p}(Q), W_{\overline{Q}}^{-m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} = \\ & = \langle \mathcal{C}_{\theta, p} v, \overline{\mathcal{F}} \rangle_{L^p(Q) \times \prod_{j=1}^m W^{2m-m_j-1/p, p}(\partial Q), L^{p'}(Q) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)} \\ & = \langle L_{\theta} v, \overline{\Phi(t) e^{-i\mu t} \otimes f} \rangle_{L^p(Q), L^{p'}(Q)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j=1}^m \langle B_j v, \overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t} \otimes \overline{g_j} \rangle_{W^{2m-m_j-1/p, p}(\partial Q), W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)} \\
& = \langle Av, \overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t} \otimes \overline{f} \rangle_{L^p(Q), L^{p'}(Q)} \\
& - (-1)^m e^{i\theta} \langle v, \frac{\partial^{2m}}{\partial t^{2m}} (\overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t}) \otimes \overline{f} \rangle_{L^p(Q), L^{p'}(Q)} \\
& + \sum_{j=1}^m \langle B_j v, \overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t} \otimes \overline{g_j} \rangle_{W^{2m-m_j-1/p, p}(\partial Q), W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)} \\
& = \langle [A - \mu^{2m} e^{i\theta}] v, \overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t} \otimes \overline{f} \rangle_{L^p(Q), L^{p'}(Q)} \\
& + \langle v, (-1)^{m+1} e^{i\theta} \left[ \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m}{k} (-i\mu)^k \overline{\Phi^{(2m-k)}(t)} \right] e^{-i\mu t} \otimes \overline{f} \rangle_{L^p(Q), L^{p'}(Q)} \\
& + \sum_{j=1}^m \langle B_j v, \overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t} \otimes \overline{g_j} \rangle_{W^{2m-m_j-1/p, p}(\partial Q), W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial Q)}.
\end{aligned}$$

Ponendo  $\mu^{2m} e^{i\theta} = \lambda$  si ottiene dunque :

$$\begin{aligned}
& \langle v, \overline{{}^t\mathcal{C}_{\theta, p} \mathcal{F}} \rangle_{W^{2m, p}(Q), W_{\overline{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} = \\
& = \langle v, \overline{\Phi(t)} e^{-i\mu t} \otimes \overline{{}^tT_p - \overline{\lambda} {}^tE} F \rangle_{W^{2m, p}(Q), W_{\overline{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n-1})} \\
& + \langle v, (-1)^{m+1} e^{i\theta} \left[ \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m}{k} (-i\mu)^k \overline{\Phi^{(2m-k)}(t)} \right] e^{-i\mu t} \otimes \overline{f} \rangle_{L^p(Q), L^{p'}(Q)}
\end{aligned}$$

e quindi si ha l'uguaglianza nel senso di  $W_{\overline{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})$  :

$$\begin{aligned}
(3.4) \quad & {}^t\mathcal{C}_{\theta, p} \mathcal{F} = \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes ({}^tT_p - \overline{\lambda} {}^tE) F + \\
& + (-1)^{m+1} e^{-i\theta} \left[ \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m}{k} (+i\mu)^k \overline{\Phi^{(2m-k)}(t)} \right] e^{i\mu t} \otimes f.
\end{aligned}$$

Dalla (3.4) e dalla (3.3) si ricava la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned}
 (3.5) \quad & \|\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes f\|_{L^{p'}(\mathcal{Q})} + \sum_{j=1}^m \|\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\partial\mathcal{Q})} \leq \\
 & \leq C_2 \left\{ \|\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes ({}^t T_p - \bar{\lambda}^t E) F\|_{W_{\bar{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=0}^{2m-1} \binom{2m}{k} \mu^k \|\Phi^{(2m-k)}(t) e^{i\mu t} \otimes f\|_{W_{\bar{Q}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} \right. \\
 & \left. + \|\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes f\|_{W_{\bar{Q}}^{-1, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} + \sum_{j=1}^m \|\Phi(t) e^{i\mu t} \otimes g_j\|_{W^{-2m+m_j+1/p-\varepsilon, p'}(\partial\mathcal{Q})} \right\}
 \end{aligned}$$

con  $C_2 = C_2(K, p, \varepsilon)$  indipendente da  $\mu, f, g_j, j = 1, \dots, m$ .

Si ammettano provvisoriamente i seguenti lemmi

**LEMMA 3.1.** *Se  $u \in W^{-k, p}(\mathbb{R}^n)$  con  $k$  intero  $\geq 0$ ,  $1 < p < +\infty$  fissati allora risulta per ogni  $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  con  $\eta(t) = 0$  per  $|t| \geq 1$ :*

$$(3.6) \quad \|\eta \otimes u\|_{W^{-k, p}(\mathbb{R}^{n+1})} \leq c \|u\|_{W^{-k+l, p}(\mathbb{R}^n)} \|\eta\|_{W^{-l}(\mathbb{R})}^{15)}$$

con  $l$  intero,  $0 \leq l \leq k$ ,  $c$  costante  $> 0$  indipendente da  $u$  e da  $\eta$ .

Se  $u \in W^{-k, p}(\Gamma)$  con  $k$  reale  $\geq 0$ ,  $1 < p < +\infty$  fissati, allora risulta

$$\begin{aligned}
 (3.7) \quad & C_1 \|u\|_{W^{-k, p}(\Gamma)} \|\eta\|_{W^{-k, p}(\mathbb{R})} \leq \|\eta \otimes u\|_{W^{-k, p}(\mathbb{R} \times \Gamma)} \leq \\
 & \leq C_2 \|u\|_{W^{-k+l, p}(\Gamma)} \|\eta\|_{W^{-l, p}(\Gamma)}^{15}
 \end{aligned}$$

con  $l$  intero,  $0 \leq l \leq h$ ,  $c_1, c_2$  costanti  $> 0$  indipendenti da  $\eta$  e da  $u$ .

<sup>15)</sup> Se  $u \notin W^{-k+l, p}(\mathbb{R}^n)$ , risp.  $u \notin W^{-k+l, p}(\Gamma)$ , allora si pone

$$\|u\|_{W^{-k+l, p}(\mathbb{R}^n)} = \|u\|_{W^{-k+l, p}(\Gamma)} = +\infty.$$

LEMMA 3.2. *Risulta per  $1 < p < +\infty$ ,  $s$  reale  $\geq 0$  fissati,  $\eta(t) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\eta(t) = 0$  per  $|t| \geq 1$ :*

$$(3.8) \quad \frac{C'}{\mu^s} \leq \| \eta(t) e^{i\mu t} \|_{W^{-s,p}(\mathbb{R})} \leq \frac{C''}{\mu^s}$$

con  $C', C''$  costanti  $> 0$  indipendenti da  $\mu$  per  $\mu \geq L$  opportuno.

Applicando (3.6), (3.7) e (3.8) alla (3.5) si ottiene con facili calcoli la seguente maggiorazione

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \mu^{-2m+m_j+1/p} \| g_j \|_{W^{-2m+m_j+1/p,p'}(\Gamma)} &\leq \\ &\leq C_0 \left\{ \| ({}^t T - \bar{\lambda} {}^t E) F \|_{W_{\bar{\Omega}}^{-2m,p'}(\mathbb{R}^n)} + \mu^{-1} \| f \|_{L^{p'}(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^m \mu^{-\varepsilon} \| g_j \|_{W^{-2m+m_j+1/p,p'}(\Gamma)} \right\} \end{aligned}$$

con  $C_0$  indipendente da  $\mu \geq L$ , da  $f$  e da  $g_j, j = 1, \dots, m$ .

Se si assume quindi  $\varepsilon = 2m - \inf_{j=1, \dots, m} (m_j) \geq 2m - m_j \geq 1$  cosa possibile in virt\`u dell'ipotesi fatta su  $\alpha$ , si ha allora per  $\mu$  abbastanza grande

$$\begin{aligned} \| f \|_{L^{p'}(\Omega)} + \sum_{j=1}^m \mu^{-2m+m_j+1/p} \| g_j \|_{W^{-2m+m_j+1/p,p'}(\Gamma)} &\leq \\ &\leq \tilde{C}_0 \| ({}^t T_p - \bar{\lambda} {}^t E) F \|_{W_{\bar{\Omega}}^{-2m,p'}(\mathbb{R}^n)} \end{aligned}$$

e quindi poich\`e  $\mu = |\lambda|^{1/2m}$  si ha l'asserto.

C.V.D.

DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3.1. La (3.6) significa che l'applicazione bilineare

$$(\eta, u) \rightarrow \eta \otimes u$$

\`e continua da  $W^{-l,p}(\mathbb{R}) \times W^{-k+l,p}(\mathbb{R}^n)$  in  $W^{-k,p}(\mathbb{R}^{n+1})$ ; come \`e noto per provare questa affermazione \`e sufficiente provare che l'applica-

zione  $(\eta, u) \rightarrow \eta \otimes u$  è separatamente debolmente continua <sup>16)</sup>. Fissato  $u = \sum_{|\mu| \leq k-l} D_x^\mu V_\mu \in W^{-k+l, p}(\mathbb{R}^n)$  con  $V_\mu \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , sia  $\eta_i \rightarrow 0$  debolmente in  $W^{-l, p}(\mathbb{R})$ ; si vuole provare che  $\eta_i \otimes u \rightarrow 0$  debolmente in  $W^{-k, p}(\mathbb{R}^{n+1})$ . Si ha  $\eta_i = \sum_{\beta=0}^l \frac{\partial^\beta \varphi_{\beta, i}}{\partial t^\beta}$  con  $\varphi_{\beta, i} \in L^p(\mathbb{R})$  e  $\varphi_{\beta, i} \rightarrow 0$  debolmente in  $L^p(\mathbb{R})$  per  $\beta = 0, \dots, l$  e dunque  $\|\varphi_{\beta, i}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c_1 < +\infty$  per ogni  $\beta$  ed ogni  $i$ . Sia  $\psi(x, t) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n+1})$  fissato; allora

$$\langle \eta \otimes u, \psi \rangle = \sum_{|\mu| \leq k-l} \sum_{\beta=0}^l (-1)^{|\mu|+\beta} \int_{\mathbb{R}^n} V_\mu(x) \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\beta, i}(t) D_x^\mu \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \psi(x, t) dx dt;$$

posto  $\psi_{\mu, \beta, i}(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\beta, i}(t) D_x^\mu \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} \psi(x, t) dt$  si ha che per ipotesi  $\psi_{\mu, \beta, i}(x) \rightarrow 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ ; inoltre è

$$|\psi_{\mu, \beta, i}(x)| \leq \|\varphi_{\beta, i}\|_{L^p(\mathbb{R})} \|D_x^\mu \psi(x, t)\|_{W^{l, p'}(\mathbb{R})} \leq c_1 \alpha_\mu(x)$$

con  $\alpha_\mu(x)$  sommabile in  $\mathbb{R}^n$ , a supporto compatto ed indipendente da  $i$ .

Passando al limite sotto il segno di integrale si ha che  $\langle \eta_i \otimes u, \psi \rangle \rightarrow 0$  come volevasi.

In modo analogo si prova che l'applicazione  $u \rightarrow \eta \otimes u$  è, fissata  $\eta \in W^{-l, p}(\mathbb{R})$ , debolmente continua da  $W^{-k+l, p}(\mathbb{R}^n)$  in  $W^{-k, p}(\mathbb{R}^{n+1})$ .

Del tutto simile è la dimostrazione della seconda disuguaglianza della (3.7) per  $k, l$  interi  $\geq 0$ ; applicando poi il teorema di interpolazione per le applicazioni bilineari e continue di Lions-Peetre [15, pag. 14] all'applicazione  $(\eta, u) \rightarrow \eta \otimes u$  si completa la dimostrazione dell'ultima disuguaglianza della (3.7).

Per provare la prima disuguaglianza della (3.7) per  $k$  reale  $\geq 0$  si osservi innanzitutto che con facili ragionamenti risulta per  $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ ,  $\sigma \in \mathcal{D}(I)$ ,  $k$  reale  $\geq 0$ ,  $1 < p < +\infty$ :

$$\|\psi \otimes \sigma\|_{W^{k, p}(\mathbb{R} \times I)} \leq c \|\psi\|_{W^{k, p}(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{W^{k, p}(I)}$$

<sup>16)</sup> Allora (v. Bourbaki, Esp. vect. top. cap. IV, § 4 n. 2 prop. 6) l'applicazione è separatamente continua e dunque (v. Bourbaki Esp. vect. top. cap. III § 4 n. 1 prop. 2) anche continua.

con  $c > 0$  costante indipendente da  $\psi$  e da  $\sigma$ . Si ha allora

$$\begin{aligned} \|\eta \otimes u\|_{W^{-k,p}(\mathbb{R} \times \Gamma)} &= \sup_{\substack{\varphi \in W^{k,p}(\mathbb{R} \times \Gamma) \\ \varphi \neq 0}} \frac{|\langle \eta \otimes u, \varphi \rangle|}{\|\varphi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R} \times \Gamma)}} \\ &\geq \frac{1}{c} \sup_{\substack{\varphi = \psi \otimes \sigma \neq 0 \\ \psi \in W^{k,p}(\mathbb{R}) \\ \sigma \in W^{k,p}(\Gamma)}} \frac{|\langle \eta \otimes u, \psi \otimes \sigma \rangle|}{\|\psi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})} \|\sigma\|_{W^{k,p}(\Gamma)}} \\ &\geq \frac{1}{c} \sup_{\substack{\psi \in W^{k,p}(\mathbb{R}) \\ \psi \neq 0}} \frac{|\langle \eta, \psi \rangle|}{\|\psi\|_{W^{k,p}(\mathbb{R})}} \sup_{\substack{\sigma \in W^{k,p}(\Gamma) \\ \sigma \neq 0}} \frac{|\langle u, \sigma \rangle|}{\|\sigma\|_{W^{k,p}(\Gamma)}} \\ &= \frac{1}{c} \|\eta\|_{W^{-k,p}(\mathbb{R})} \|u\|_{W^{-k,p}(\Gamma)} \end{aligned}$$

C.V.D.

**DIMOSTRAZIONE DEL LEMMA 3.2 i).** Sia  $\varphi \in W^{s,p'}(\mathbb{R})$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $s$  intero  $\geq 0$ , con  $\|\varphi\|_{W^{s,p'}(\mathbb{R})} = 1$ ; si ha per definizione di norma in  $W^{-s,p}(\mathbb{R})$ :

$$\|\eta(t) e^{i\mu t}\|_{W^{-s,p}(\mathbb{R})} = \sup_{\|\varphi\|_{W^{s,p'}(\mathbb{R})} = 1} |\langle \eta(t) e^{i\mu t}, \varphi \rangle|.$$

Risulta d'altro lato per tali  $\varphi$

$$\langle \eta(t) e^{i\mu t}, \varphi \rangle = \langle e^{i\mu t}, \eta(t) \varphi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\mu t} \eta(t) \varphi(t) dt = 2\pi \widehat{(\eta\varphi)}(\mu) \quad ^{17)}$$

da cui

$$\begin{aligned} |\mu^s \langle \eta e^{i\mu t}, \varphi \rangle| &= |2\pi (D^s \widehat{(\eta\varphi)}) (\mu)| \leq c' \|D^s(\eta\varphi)\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ &\leq c'' \|D^s(\eta\varphi)\|_{L^{p'}(\mathbb{R})} \leq c \|\varphi\|_{W^{s,p'}(\mathbb{R})} = c; \end{aligned}$$

---

<sup>17)</sup> Si indica, come al solito, con  $\widehat{\psi}$  la trasformata di Fourier di  $\psi$ .

si ottiene così

$$\|\eta(t) e^{i\mu t}\|_{W^{-s,p}(\mathbb{R})} \leq \frac{1}{\mu^s} \sup_{\|\varphi\|_{W^{s,p'}(\mathbb{R})}=1} |\mu^s \langle \eta e^{i\mu t}, \varphi \rangle| \leq \frac{c}{\mu^s}.$$

Sia ora  $s$  reale  $\geq 0$ ,  $s = m + 1 - \theta$ ,  $m$  intero  $\geq 0$ , allora per interpolazione risulta (v. per. es. [15], ...) poichè  $\eta e^{i\mu t} \in W^{-m,p}(\mathbb{R})$ :

$$\|\eta e^{i\mu t}\|_{W^{-s,p}(\mathbb{R})} \leq c_1 \|\eta e^{i\mu t}\|_{W^{-(m+1),p}(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|\eta e^{i\mu t}\|_{W^{-m,p}(\mathbb{R})}^{\theta} \leq c_2 \frac{1}{\mu^s}.$$

La seconda disuguaglianza della (3.8) è così provata.

ii) Per la definizione di  $\eta(t)$  risulta  $\|\eta(t) e^{i\mu t}\|_{W^{-s,p}(\mathbb{R})} \geq \|\eta(t) e^{i\mu t}\|_{W^{-s,p}([-1,+1])}$ . Sia ora  $f \in \overset{\circ}{W}{}^{k,p'}([-1,+1])$  con  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ ,  $k$  intero  $\geq 0$ ; allora è

$$\|\eta(t) e^{i\mu t}\|_{W^{-k,p}([-1,+1])} \|f\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,p'}([-1,+1])} \geq |\langle \eta(t) e^{i\mu t}, f(t) \rangle|.$$

Prendendo  $f = \eta(t) e^{-i\mu t}$  si ha

$$|\langle \eta(t) e^{i\mu t}, \eta(t) e^{-i\mu t} \rangle| = \left| \int_{-1}^{+1} (\eta(t))^2 dt \right| \geq 1;$$

inoltre risulta

$$\begin{aligned} \|e^{-i\mu t} \eta(t)\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,p'}([-1,+1])} &\leq c_1 \left( \int_{-1}^{+1} |D^k(e^{-i\mu t} \eta(t))|^{p'} dt \right)^{1/p'} \\ &\leq c_1 \left( \int_{-1}^{+1} \sum_{j=0}^k |\mu^j \eta^{(k-j)}(t)|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leq c_2 (1 + \mu^k) \end{aligned}$$

e quindi per  $k$  intero e  $\mu \geq 1$  si ha  $\|\eta(t) e^{i\mu t}\|_{W^{-k,p}(\mathbb{R})} \geq \frac{c}{\mu^k}$ . Nel caso  $s$  reale  $\geq 0$ ,  $s = k - 1 + \theta$ ,  $k$  intero  $\geq 1$  ripetendo lo stesso ragionamento ed usando la maggiorazione

$$\|\eta(t) e^{-i\mu t}\|_{W^{k-1+\theta,p'}(\mathbb{R})} \leq c \|\eta(t) e^{-i\mu t}\|_{W^{k-1,p'}(\mathbb{R})}^{1-\theta} \|\eta(t) e^{-i\mu t}\|_{\overset{\circ}{W}{}^{k,p'}(\mathbb{R})}^{\theta}$$

si ha per  $\mu$  abbastanza grande che la prima disuguaglianza di (3.8) è verificata per ogni  $s$  reale  $\geq 0$ .

C.V.D.

**PROPOSIZIONE 3.1.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $l_1 = 2m$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato; sia inoltre verificata l'ipotesi (AN;  $\theta$ ) con  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato. Allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  fissato esiste una costante  $c = c(p)$  tale che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda = \theta$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande e per ogni  $f \in L^{p'}(\Omega)$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , sia valida la seguente disuguaglianza*

$$(3.9) \quad \|f\|_{L^{p'}(\Omega)} \leq c \|({}^t T_p - \bar{\lambda} {}^t E) F\|_{W_{\bar{\Omega}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^n)}$$

ove si è posto  $F = \{f; 0, \dots, 0\} \in L^{p'}(\Omega) \times \prod_{j=1}^m W^{-2m+m; +1/p, p'}(\Gamma)$ .

**DIMOSTRAZIONE.** Si ripete la dim. del teor. 3.2 osservando che la (3.5) diviene poichè  $g_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, m$ :

$$\begin{aligned} & \| \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes f \|_{L^{p'}(\mathcal{Q})} \leq c_2 \{ \| \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes ({}^t T_p - \bar{\lambda} {}^t E) F \|_{W_{\bar{\mathcal{Q}}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} \\ & + \sum_{k=0}^{2m} \binom{2m}{k} \mu^k \| \Phi^{(2m-k)}(t) e^{i\mu t} \otimes f \|_{W_{\bar{\mathcal{Q}}}^{-2m, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} \\ & + \| \Phi(t) e^{i\mu t} \otimes f \|_{W_{\bar{\mathcal{Q}}}^{-1, p'}(\mathbb{R}^{n+1})} \} \end{aligned}$$

con  $c_2$  indipendente da  $\mu$  e da  $f$ . Applicando poi i lemmi 3.1 e 3.2 si ha l'asserto senza usare il fatto che nella (3.3)  $\varepsilon$  deve poter essere grande, precisamente  $\varepsilon = 2m - \inf_{j=1, \dots, m} (m_j)$ , come invece avviene alla fine della dimostrazione del teor. 3.2.

C.V.D.



#### n. 4. Applicazioni della teoria spettrale.

1. Dai risultati ottenuti nel n. 3 si ricava innanzitutto il seguente teorema che estende il th. 2.1 di Agmon [1].

**TEOREMA 4.1.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e con  $l_1 = 2m$ . Sia inoltre verificata per  $\theta_0$  fissato con  $-\pi < \theta_0 \leq \pi$  l'ipotesi  $(AN; \theta_0)$ . Allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  l'operatore  $A_p$  lineare non limitato di  $L^p(\Omega)$  in sè di dominio  $D(A_p) = \{u \in W^{2m,p}(\Omega); B_j u = 0 \text{ su } \Gamma, j = 1, \dots, m\}$  definito da*

$$A_p : u \rightarrow A_p u = A(x; D)u \quad \text{per } u \in D(A_p)$$

ha spettro discreto, indipendente da  $p \in ]1, +\infty[$ , senza punti di accumulazione al finito; inoltre ogni  $\lambda$  con  $\arg \lambda = \theta_0$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande è in  $\rho(A_p)$  e per tali  $\lambda$  vale la seguente maggiorazione su  $R(\lambda; A_p)$ :

$$(4.1) \quad \|R(\lambda; A_p)\|_{L^p(\Omega) \rightarrow L^p(\Omega)} \leq \frac{\text{cost}}{|\lambda|}.$$

**DIMOSTRAZIONE.** In virtù del teorema 3.1 si ha  $\text{Ker}(-A_p + \lambda I) = \{0\}$  per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda = \theta_0$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande. Per provare che per tali  $\lambda$  è  $\text{Im}(-A_p + \lambda I) = L^p(\Omega)$  è sufficiente verificare che  $\text{Im}(-T_p + \lambda E) = L^p(\Omega) \times \prod_{j=1}^m \text{Im}(B_j)$  e dunque passando all'applicazione trasposta basta dimostrare che

$$\text{Ker}({}^t(-T_p + \lambda E)) = \text{Ker}(-{}^t T_p + \bar{\lambda} {}^t E) = \{0\} \times \prod_{j=1}^m N_j$$

dove  $N_j \subset W^{-2m+m_j+1/p, p'}(\Gamma)$  è il polare di  $\text{Im}(B_j)$ . Quest'ultimo fatto discende dalla prop. 3.1. L'indipendenza di  $\sigma(A_p)$  da  $p \in ]1, +\infty[$  è conseguenza del corollario alla prop. 2.2 e la maggiorazione (4.1) segue dalla maggiorazione (3.1) del teor. 3.1.

C.V.D.

OSSERVAZIONE 1. Con lo stesso ragionamento si verifica da sotto le ipotesi del teor. 3.2 risulta  $\text{Im}(-T_p + \lambda E) = L_p(\Omega) \times \times \prod_{j=1}^m W^{2m-m_j-1/p, p}(\Gamma)$  e quindi sotto tali ipotesi risulta  $T_p + \lambda E$  un isomorfismo di  $W^{2m, p}(\Omega)$  su  $L^p(\Omega) \times \times \prod_{j=1}^m W^{2m-m_j-1/p, p}(\Gamma)$ ; siccome poi  $\lambda E$  è un operatore compatto di  $W^{2m, p}(\Omega)$  in  $L^p(\Omega) \times \times \prod_{j=1}^m W^{2m-m_j-1/p, p}(\Gamma)$  si ottiene, grazie al teor. 1.2 iii), che  $\chi(-T_p + \lambda E) = \chi(T_p) = 0$  e siccome anche  $\chi(A_p) = 0$  si è provato  $\chi(T_p) = \chi(A_p) (= 0)^{18}$ .

OSSERVAZIONE 2. Agranovich-Vishik [6] hanno dimostrato che la condizione  $(AN; \theta_0)$  è sufficiente perchè sia  $\varrho(A_2) \neq \emptyset$  anche quando è  $l_1 \geq 2m + 1$ ; per la prop. 2.1 tale risultato implica che per  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  fissato è  $\emptyset \neq \varrho(A_2) = \varrho(A_p) \supset \{\lambda \in \mathbb{C}; \arg \lambda = \theta_0, \text{ e } |\lambda| \geq L\}$ . Tuttavia i risultati sulla completezza delle autofunzioni generalizzate sono stati ottenuti nel n. 1 sotto l'ipotesi supplementare che  $D(A_p)$  sia denso in  $W^{4-2m, p}(\Omega)$ . In generale se  $l_1 \geq 2m + 1$  tale ipotesi non è però verificata, mentre se  $l_1 = 2m$  tale ipotesi segue automaticamente dalle inclusioni  $\mathcal{D}(\Omega) \subset D(A_p) \subset L^p(\Omega)$  e dalla densità di  $\mathcal{D}(\Omega)$  in  $L^p(\Omega)$ . In vista di tali risultati l'ipotesi  $l_1 = 2m$  non pare dunque troppo restrittiva.

OSSERVAZIONE 3. Ci si può porre il problema se l'ipotesi  $(AN; \theta_0)$  sia necessaria perchè lo spettro di  $A_p$  sia discreto. Seeley [19] ha costruito esempi di problemi ai limiti di Dirichlet che non verificano l'ipotesi  $(AN; \theta)$  per alcun  $\theta \in ]-\pi, +\pi]$  e per i quali lo spettro è discreto. Tuttavia Agmon [1] (v. anche Agranovich-Vishik

---

<sup>18)</sup> La relazione  $\chi(T_p) = \chi(A_p)$  è sempre vera se  $\{B_j\}_{j=1}^m$  è un sistema normale secondo Aronszajn-Milgram [7]; infatti basta osservare che allora

$$\prod_{j=1}^m \text{Im}(B_j) = \prod_{j=1}^m W^{2m-m_j-1/p, p}(\Gamma)$$

ed applicare poi il teor. 1.1.

[6]) ha dimostrato che l'ipotesi  $(AN; \theta_0)$  è necessaria perchè lo spettro di  $A_2$  sia discreto e sia verificata la (4.1) per ogni  $\lambda$  con  $\arg \lambda = \theta_0$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande.

2. I risultati di completezza degli autovettori generalizzati sono conseguenza del teorema 1.4 non appena se ne siano verificate le ipotesi. Il problema è semplificato dal seguente teorema che è una facile estensione del teor. a pag. 132 di Agmon [1].

**TEOREMA 4.2.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $l_1 = 2m$ . Sia inoltre verificata l'ipotesi  $(AN; \theta_0)$  con  $-\pi < \theta_0 \leq \pi$  fissato. Se le autofunzioni generalizzate sono complete in  $L^{p_0}(\Omega)$  con  $p_0 > 1$  fissato, allora le autofunzioni generalizzate sono complete in  $L^p(\Omega)$  ed anche in  $D(A_p)$  per la norma indotta da  $W^{2m,p}(\Omega)$  per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ .*

Si ha allora senza difficoltà il seguente risultato che estende il teor. 3.4 di Agmon [1].

**TEOREMA 4.3.** *Siano verificate le ipotesi (I), (II), (III), (IV;  $\alpha$ ), (V;  $\alpha$ ) e (VI;  $\alpha$ ) con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e con  $l_1 = 2m$ . Sia inoltre verificata l'ipotesi  $(AN; \theta_s)$  con  $-\pi < \theta_s \leq \pi$ ,  $s = 1, \dots, k$  fissati in modo che il piano complesso sia diviso dai raggi  $\arg \lambda = \theta_s$  in angoli di ampiezza  $\leq \frac{2\pi m}{n}$ .*

*Allora le autofunzioni generalizzate sono complete in  $L^p(\Omega)$  ed in  $D(A_p)$ , munito della norma indotta da  $W^{2m,p}(\Omega)$ , per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ .*

**DIMOSTRAZIONE.** Per il teor. 4.1 è sufficiente provare il risultato per  $p = 2$ . In questo caso il risultato segue dal teor. 1.3; per quanto riguarda l'ipotesi  $(\alpha)$  essa è conseguenza del teor. A1.1' di Agmon [1]. Per quanto riguarda l'ipotesi  $(\beta)$  essa segue dal teor. 3.1; bisogna però ricordare che nel teor. 1.3 è richiesto che l'ampiezza degli angoli in cui è diviso il piano complesso sia  $< 2\pi \frac{m}{n}$ .

Osservando però che se è verificata l'ipotesi  $(AN; \theta_0)$  per  $\theta_0$  fissato è anche vera l'ipotesi  $(AN; \theta)$  per ogni  $\theta$  con  $|\theta - \theta_0| < \varepsilon$  opportuno si dimostra completamente l'ipotesi  $(\beta)$  del teor. 1.3.

## n. 5. Estensione al caso di certi sistemi ellittici.

1. Si consideri la matrice di operatori lineari a derivate parziali, definiti in  $\bar{\Omega}$  regolari nel senso che verrà precisato più avanti (v. l'ipotesi  $(\tilde{V}; \alpha)$ ) a valori complessi

$$A = A(x; D) = \| l_{ij}(x; D) \|_{i,j=1, \dots, m}.$$

Si dice che tale matrice è ellittica secondo Douglis-Nirenberg [9] se è verificata la seguente ipotesi

( $\tilde{I}$ ) (IPOTESI DI ELLITTICITÀ). *Esistono degli  $s_i, t_i \in \mathbf{Z}$  tali che  $l_{ij}(x; D)$  sia un operatore lineare a derivate parziali in  $\bar{\Omega}$  di ordine  $\leq s_i + t_i$ , dove se  $s_i + t_j < 0$  allora  $l_{ij}(x; D) \equiv 0$ ; detta  $l_{ij}^0(x; D)$  la parte principale di  $l_{ij}(x; D)$ <sup>49)</sup> sia  $A^0(x; D) = \| l_{ij}^0(x; D) \|_{i,j=1, \dots, m}$ ; posto per  $\xi \in \mathbf{R}^n$  ed  $x \in \bar{\Omega}$ ,  $L^0(x; \xi) = \det A^0(x; \xi)$ , allora per ogni  $x \in \bar{\Omega}$  e per ogni  $\xi \in \mathbf{R}_*^n$  risulta  $L^0(x; \xi) \neq 0$ .*

Siccome l'ipotesi ( $\tilde{I}$ ) non cambia sostituendo  $s_i$  con  $s_i - \varrho$ , e  $t_i$  con  $t_i + \varrho$ ,  $\varrho \in \mathbf{Z}$ , si può supporre, come sarà fatto d'ora in avanti:

$$\max(s_1, \dots, s_m) = 0, \quad \min(t_1, \dots, t_m) \geq 0.$$

Si faccia anche la seguente ipotesi (v. [4], [20], ...)

( $\tilde{II}$ ) (IPOTESI DI ELLITTICITÀ PROPRIA). *Risulta  $\sum_{i=1}^m (s_i + t_i) = 2r$  con  $r > 0$ ; inoltre per ogni  $x \in \Gamma$ , per ogni  $\xi \in \mathbf{R}_*^n$  tangente a  $\Gamma$  in  $x$ , per ogni  $\nu \in \mathbf{R}_*^n$  normale a  $\Gamma$  (interna ad  $\Omega$ ) in  $x$ , il polinomio, in  $\tau \in \mathbf{C}$ ,  $L^0(x; \xi + \tau \nu)$  ha esattamente  $r$  radici  $\tau_k^+(x; \xi, \nu)$   $k = 1, \dots, r$  con parte immaginaria positiva ed  $r$  radici  $\tau_k^-(x; \xi, \nu)$   $k = 1, \dots, r$  con parte immaginaria negativa.*

<sup>49)</sup> Cioè quella di ordine  $s_i + t_j$ .

Si indichi per  $x \in \Gamma$  e  $\xi \in \mathbb{R}_*^n$  con  $\mathcal{A}(x; \xi)$  la matrice aggiunta della matrice  $A^0(x; \xi)$  per cui risulta  $A^0(x; \xi) \mathcal{A}(x; \xi) = L^0(x; \xi)I$  ove  $I$  è la matrice  $m \times m$  identità.

Si consideri ora la matrice di operatori lineari a derivate parziali a coefficienti definiti su  $\Gamma$  (per la cui regolarità v. l'ipotesi  $(\tilde{V}I; \alpha)$ ) a valori complessi

$$B = B(x; D) = \| B_{qj}(x; D) \|_{\substack{q=1, \dots, r \\ j=1, \dots, m}}$$

e si faccia la seguente ipotesi (v. per es. [4], [20], ...)

(III) (CONDIZIONE COMPLEMENTARE). *Esistono dei  $\sigma_q \in \mathbb{Z}$ ,  $q = 1, \dots, m$  tali che  $B_{qj}(x; D)$  è un operatore lineare a derivate parziali definito su  $\Gamma$  di ordine  $\leq \sigma_q + t_j$  dove se  $\sigma_q + t_j < 0$  allora  $B_{qj}(x; D) \equiv 0$ ; sia  $B_{qj}^0(x; D)$  la parte principale di  $B_{qj}(x; D)$ <sup>20)</sup> e sia  $B^0(x; D) = \| B_{qj}^0(x; D) \|_{\substack{q=1, \dots, r \\ j=1, \dots, m}}$ ; per ogni  $x \in \Gamma$ , per ogni  $\xi \in \mathbb{R}_*^n$  tangente a  $\Gamma$  in  $x$ , per ogni  $\nu \in \mathbb{R}_*^n$  normale a  $\Gamma$  (interna ad  $\Omega$ ) in  $x$ , le righe della matrice  $B^0(x; \xi + \tau\nu)$   $\mathcal{A}(x; \xi + \tau\nu)$ , i cui elementi sono considerati come polinomi in  $\tau \in \mathbb{C}$ , sono linearmente indipendenti modulo  $\prod_{k=1}^r (\tau - \tau_k^+(x; \xi, \nu))$ .*

Per  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  si facciano le seguenti ipotesi di regolarità (v. per es. [11], ...)

(IV)  $\Omega$  è un aperto limitato di  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) di frontiera  $\Gamma$  varietà di dimensione  $n - 1$  di classe  $C^{l_1 + \lambda + \alpha}$  con  $l_1 = \max(0, \sigma_1 + 1, \dots, \sigma_r + 1)$  e  $\lambda = \max(t_1, \dots, t_m)$ <sup>21)</sup>;  $\bar{\Omega}$  è considerato come una varietà a bordo di classe  $C^{l_1 + \lambda + \alpha}$  con bordo  $\Gamma$ .

(V) Posto  $l_{ij}(x; D) = \sum_{|\mu| \leq s_i + t_j} a_{ij; \mu}(x) D^\mu$  risulta  $a_{ij\mu} \in C^{l_1 - s_i + \alpha}(\bar{\Omega})$  per  $|\mu| = s_i + t_j$ , ed  $a_{ij\mu} \in W^{l_1 - s_i + \alpha, \infty}(\Omega)$  per  $|\mu| < s_i + t_j$ ,  $i, j = 1, \dots, m$ .

<sup>20)</sup> Cioè quella di ordine  $\sigma_q + t_j$ .

<sup>21)</sup> Nel caso  $m = 1$ , il numero qui indicato con  $l_1 + \lambda$  è stato indicato nei nn. 2, 3 e 4 con il simbolo  $l_1$ .

$(\tilde{V}I; \alpha)$  Posto  $B_{qj}(x; D) = \sum_{|\mu| \leq \sigma_q + t_j} b_{qj\mu}(x) D^\mu$  risulta  $b_{qj\mu} \in O^{l_1 - \sigma_q + \alpha}(\Gamma)$  per  $|\mu| = \sigma_q + t_j$ , e  $b_{qj\mu} \in W^{l_1 - \sigma_q + \alpha, \infty}(\Gamma)$  per  $|\mu| < \sigma_q + t_j$ ,  $q = 1, \dots, l, j = 1, \dots, m$ .

OSSERVAZIONE. Naturalmente come è stato fatto nel n. 2.2 le ipotesi avrebbero potuto essere fatte in  $G$  aperto non limitato di  $\mathbb{R}^n$  di frontiera  $\partial G$ ; per comodità sono state scritte per  $\Omega$  anche se verranno usate per  $G$  negli analoghi dei teor. 3.1 e 3.2.

2. Sotto le ipotesi  $(\tilde{I}), (\tilde{II}), (\tilde{III}), (\tilde{IV}; \alpha), (\tilde{V}; \alpha)$  e  $(\tilde{VI}; \alpha)$  con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato, si consideri per  $p \in ]1, +\infty[$  e per  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12})$  fissati l'operatore

$$\vec{u} = (u_1, \dots, u_m) \rightarrow T_{p,k} \vec{u} = (A\vec{u}, B\vec{u})$$

lineare e continuo da  $\prod_{j=1}^m W^{l_1 + t_j + k, p}(G)$  in

$$\prod_{i=1}^m W^{l_1 - s_i + k, p}(G) \times \prod_{q=1}^r W^{l_1 - \sigma_q + k - 1/p, p}(\partial G).$$

I teoremi ricordati nel n. 2.3 sono ancora validi per questo operatore  $T_{p,k}$  e le considerazioni svolte nei nn. 2.4 e 2.5 possono essere ripetute senza alcuna modificazione ed in particolare la dimostrazione dell'analogo del teor. 2.3 nel caso  $\alpha = 1, 2, \dots, \infty$  fissato.

Per  $p \in ]1, +\infty[$  e per  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12})$  fissati e per  $G = \Omega$  limitato sia poi  $A_{p,k}$  l'operatore non limitato di  $\prod_{i=1}^m W^{l_1 - s_i + k, p}(\Omega)$

in sè di dominio  $D(A_{p,k}) = \left\{ \vec{u} \in \prod_{j=1}^m W^{l_1 + t_j + k, p}(\Omega); B\vec{u} = 0 \right\}$  definito da

$$\vec{u} \rightarrow A_{p,k} \vec{u} = A(x; D) \vec{u} \quad \text{per } \vec{u} \in D(A_{p,k})$$

detto *realizzazione di A sotto le condizioni ai limiti B*.

Applicando il teor. 1.1 risulta dall'analogo del teor. 2.3 il seguente risultato.

**TEOREMA 5.1.** *Siano verificate le ipotesi  $(\tilde{I}), (\tilde{II}), (\tilde{III}), (\tilde{IV}; \alpha), (\tilde{V}; \alpha)$ , e  $(\tilde{VI}; \alpha)$  con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato. L'operatore  $A_{p,k}$  è chiuso,*

ha immagine chiusa, verifica  $\text{Ker}(A_{p,k}) = \text{Ker}(T_{p,k})$  e ammette indice finito  $\chi(A_{p,k})$  legato a  $\chi(T_{p,k})$  dalla (1.4). Se inoltre è  $\alpha = 1, \dots, \infty$  fissato allora  $\chi(A_{p,k})$  e  $\text{Ker}(T_{p,k})$  non dipendono nè da  $p \in ]1, +\infty[$  nè da  $k = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$ .

Si possono poi estendere senza difficoltà le prop. 2.1, 2.2, con il suo corollario, ed il lemma 2.2 al caso dei sistemi presi in considerazione.

3. Per quanto riguarda l'estensione del teorema 3.1 al caso dei sistemi il ragionamento fatto per tale teorema può essere ripetuto con l'unica avvertenza di supporre  $s_i + t_i = \rho$  indipendente da  $i = 1, \dots, m$ . Precisamente si introduca per  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato la seguente ipotesi

$(\tilde{A}\tilde{N}; \theta)$  Definiti su  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$  gli operatori per  $k, j = 1, \dots, m$

$$l_{kj; \theta} = l_{kj; \theta} \left( x; D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) = l_{kj} (x; D_x) - (-1)^{\frac{3}{2}(s_k+t_j)} \delta_{kj} e^{i\theta} \frac{\partial^{s_k+t_j}}{\partial t^{s_k+t_j}} \quad 22)$$

L'operatore  $\mathcal{L}_\theta = \| l_{kj; \theta} \|_{k, j=1, \dots, m}$  è ellittico in  $\bar{Q}$ ; gli operatori definiti su  $\partial Q = \Gamma \times \mathbb{R}$ :

$$B_{qj} = B_{qj} \left( x; D_x, \frac{\partial}{\partial t} \right) = B_{qj} (x; D_x) \quad q = 1, \dots, r; j = 1, \dots, m.$$

sono tali che  $B = \| B_{qj} \|_{\substack{q=1, \dots, r \\ j=1, \dots, m}}$  verifica su  $\partial Q$  l'ipotesi complementare rispetto ad  $\mathcal{L}_\theta$ .

Si ha allora il seguente risultato che estende il teor. 3.1.

**TEOREMA 5.2.** Siano verificate le ipotesi  $(\tilde{\text{I}}), (\tilde{\text{II}}), (\tilde{\text{III}}), (\tilde{\text{IV}}; \alpha), (\tilde{\text{V}}; \alpha)$  e  $(\text{VI}; \alpha)$  con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $s_k + t_k = \rho$  per  $k = 1, \dots, m$ ; sia inoltre verificata l'ipotesi  $(\tilde{A}\tilde{N}; \theta)$  con  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato. Allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  e per ogni  $h = 0, 1, \dots, \alpha^{12}$

---

<sup>22)</sup> Si indica per comodità con  $D_x$  la derivazione rispetto ad  $x \in \mathbb{R}^n$ ;  $\delta_{kj}$  è il simbolo di Kronecher.

esiste una costante  $c = c(p, h) > 0$  tale che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda = \theta$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande sia

$$\sum_{j=1}^m \|u_j\|_{W^{l_1-s_j+h,p}(\Omega)} \leq c |\lambda|^{\frac{l_1+\lambda-h}{e}-2} \sum_{k=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m (l_{kj} - \delta_{kj} \lambda) u_j \right\|_{W^{l_1-s_k+h,p}(\Omega)}$$

per ogni  $\vec{u} \in \prod_{j=1}^m W^{l_1+t_j+h,p}(\Omega)$  tale che  $B\vec{u} = 0$ .

**DIMOSTRAZIONE.** In virtù dell'ipotesi  $(AN; \theta)$  si può applicare l'analogo del teor. 2.1 al problema  $\{\mathcal{L}_\theta, B\}^{23}$  in  $Q = \Omega \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n+1}$  assumendo  $K = \bar{\Omega} \times [-1, +1]$ . Se  $\vec{v} = (v_1, \dots, v_m) \in \prod_{j=1}^m W^{l_1+t_j+h,p}(Q)$  con  $\text{supp}(v_j) \subset K$  e  $B\vec{v} = 0$  su  $\partial Q$  allora risulta

$$\begin{aligned} \|\vec{v}\|_{\prod_{j=1}^m W^{l_1+t_j+h,p}(Q)} &\leq c \{ \|\mathcal{L}_\theta \vec{v}\|_{\prod_{j=1}^m W^{l_1-s_j+h,p}(Q)} + \\ &+ \|\vec{v}\|_{\prod_{j=1}^m W^{l_1+t_j+h-1,p}(Q)} \} \end{aligned}$$

con  $c = c(K, p, h)$  indipendente da  $\vec{v}$ .

Si prenda  $v_j = \Phi(t) e^{i\mu t} u_j(x)$  con  $u_j \in W^{l_1+t_j+h,p}(\Omega)$ ,  $j=1, \dots, m$ ,  $B\vec{u} = 0$  su  $\Gamma$ ,  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \Phi(t) \leq 1$  per  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\Phi(t) \equiv 0$  per  $|t| \geq 1$ ,  $\Phi(t) \equiv 1$  per  $|t| \leq \frac{1}{2}$ ,  $\mu$  reale  $> 0$ .

Risulta con facili calcoli

$$\begin{aligned} l_{kj\theta} v_j &= \Phi(t) e^{i\mu t} (l_{kj} - \delta_{kj} \mu^{s_k+t_j} e^{i\theta}) u_j + \\ &- (-1)^{\frac{3}{2}(s_k+t_j)} \delta_{kj} e^{i\theta} \left[ \sum_{\beta=0}^{s_k+t_j-1} \binom{s_k+t_j}{s_k+t_j-1-\beta} \Phi^{(\beta+1)}(t) (i\mu)^{s_k+t_j-\beta-1} \right] e^{i\mu t} u_j \end{aligned}$$

<sup>23</sup> Siccome  $n+1 \geq 3$   $\mathcal{L}_\theta$  verifica automaticamente l'ipotesi di ellitticità propria.



$$\begin{aligned}
\|v_j\|_{W^h, p(Q)}^p &= \sum_{\gamma=0}^h \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \left\| \frac{\partial^{h-\gamma}}{\partial t^{h-\gamma}} D_x^\alpha e^{i\mu t} \Phi(t) u_j(x) \right\|_{L^p(Q)}^p \\
&\leq c' \sum_{\gamma=0}^h \mu^{(h-\gamma)p} \|u_j\|_{W^{\gamma, p}(\Omega)}^p \leq c'' \{ \|u_j\|_{W^h, p(\Omega)}^p + \mu^{hp} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}^p \} \\
\|v_j\|_{W^{h, p}(Q)}^p &= \sum_{\gamma=0}^h \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \left( \int_{-1}^{+1} \left| \frac{\partial^{h-\gamma}}{\partial t^{h-\gamma}} e^{i\mu t} \Phi(t) \right|^p dt \right) \left( \int_{\Omega} |D_x^\alpha u_j|^p dx \right) \\
&\geq \sum_{\gamma=0}^h \sum_{|\alpha| \leq \gamma} \left( \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left| \frac{\partial^{h-\gamma}}{\partial t^{h-\gamma}} e^{i\mu t} \right|^p dt \right) \left( \int_{\Omega} |D_x^\alpha u_j|^p dx \right) \\
&= \sum_{\gamma=0}^h \mu^{(h-\gamma)p} \|u_j\|_{W^{\gamma, p}(\Omega)}^p
\end{aligned}$$

con  $c', c''$  indipendenti da  $\mu$  per  $\mu \geq 1$ .

Osservato poi che è  $\mathcal{L}_\theta \vec{v} = \left( \sum_{j=1}^m l_{kj\theta} v_j \right)_{k=1, \dots, m}$  si ha per  $\mu \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^m \sum_{\gamma=0}^{l_1+t_j+h} \mu^{l_1+t_j+h-\gamma} \|u_j\|_{W^{\gamma, p}(\Omega)} \leq \\
&\leq C \left\{ \sum_{k=1}^m \left\| \Phi(t) e^{i\mu t} \sum_{j=1}^m (l_{kj} - \delta_{kj} \mu^{s_k+t_j} e^{i\theta}) u_j \right\|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)} + \right. \\
&+ \sum_{j=1}^m \sum_{\beta=0}^{s_j+t_j-1} \mu^{s_j+t_j-\beta-1} \left\| \Phi^{(\beta+1)} e^{i\mu t} u_j \right\|_{W^{l_1-s_j+h, p}(Q)} + \\
&\left. + \sum_{j=1}^m \sum_{\beta=0}^{l_1+t_j+h-1} \mu^{l_1+t_j+h-1-\beta} \|u_j\|_{W^{\beta, p}(\Omega)} \right\} \\
&\leq c_1 \left\{ \sum_{k=1}^m \mu^{l_1-s_k+h} \left\| \sum_{j=1}^m (l_{kj} - \delta_{kj} \mu^{s_k+t_j} e^{i\theta}) u_j \right\|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)} \right. \\
&\left. + \sum_{j=1}^m \sum_{\beta=0}^{l_1+t_j+h-1} \mu^{l_1+t_j+h-\beta-1} \|u_j\|_{W^{\beta, p}(\Omega)} \right\}
\end{aligned}$$

con  $C, c_1$  indipendenti da  $\mu \geq 1$  e da  $\vec{u}$ ; si ottiene quindi poichè  $s_k + t_k = \varrho$ :

$$\begin{aligned} (1 - 2c_1 \mu^{-1}) \sum_{j=1}^m \sum_{\beta=0}^{l_1+t_j+h} \mu^{l_1+t_j+h-\beta} \|_{W^{\beta, p}(\Omega)} &\leq \\ &\leq c_1 \mu^{l_1+\lambda-e+h} \sum_{k=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m (l_{kj} - \delta_{kj} \mu^e e^{i\theta}) u_j \right\|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ponendo  $\lambda = \mu^e e^{i\theta}$  si ha

$$\begin{aligned} \mu^e \| u_k \|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)} &\leq \\ &\leq c_2 \mu^{l_1+\lambda-e+h} \sum_{k=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m (l_{kj} - \delta_{kj} \lambda) u_j \right\|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)} \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \| u_k \|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)} &\leq \\ &\leq m c_2 |\lambda|^{\frac{l_1+\lambda-h}{e}-2} \sum_{k=1}^m \left\| \sum_{j=1}^m (l_{kj} - \delta_{kj} \lambda) u_j \right\|_{W^{l_1-s_k+h, p}(\Omega)} \end{aligned}$$

con  $c_2$  indipendente da  $\lambda \in \mathbf{C}$  con  $\arg \lambda = \theta$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande.  
C. V. D.

4. Considerato l'operatore lineare e continuo  $T_p: \vec{u} \rightarrow (A\vec{u}, B\vec{u})$  da  $\prod_{j=0}^m W^{l_1+t_j, p}(\Omega)$  in  $\prod_{j=1}^m W^{l_1-s_j, p}(\Omega) \times \prod_{q=1}^r W^{l_1-s_q-1/p, p}(\Gamma)$  si definisca l'operatore

$$E: \vec{u} \rightarrow (\vec{u}, 0)$$

lineare e continuo da  $\prod_{j=1}^m W^{l_1+t_j, p}(\Omega)$  in

$$\prod_{j=1}^m W^{l_1-s_j, p}(\Omega) \times \prod_{q=1}^r W^{l_1-s_q-1/p, p}(\Gamma).$$

Sia  ${}^tT_p$  il trasposto di  $T_p$  e sia  ${}^tE$  il trasposto di  $E$ ; risulta allora ovviamente  ${}^t(T_p - \lambda E) = {}^tT_p - \bar{\lambda} {}^tE$ .

Se si suppone  $l_1 = 0$ ,  $s_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ , si ha  $t_k = \rho$  e per l'operatore  $A$  la condizione  $(\tilde{I})$  coincide con l'ellitticità secondo Petrowsky.

Il teorema 3.2 e la prop. 3.1 possono essere estesi senza difficoltà al caso di sistemi ellittici secondo Petrowsky; in particolare la prop. 3.1 può essere estesa nel modo seguente.

**PROPOSIZIONE 5.1.** *Siano verificate le ipotesi  $(\tilde{I})$ ,  $(\tilde{II})$ ,  $(\tilde{III})$ ,  $(I\tilde{V}; \alpha)$ ,  $(\tilde{V}; \alpha)$  e  $(\tilde{VI}; \alpha)$  con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e con  $l_1 = 0$ ,  $s_k = 0$ ,  $k = 1, \dots, m$ ; sia inoltre verificata l'ipotesi  $(\tilde{AN}; \theta)$  con  $-\pi < \theta \leq \pi$  fissato.*

Allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  esiste una costante  $C = C(p) > 0$  tale che per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda = \theta$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande e per ogni  $\vec{f} = (f_1, \dots, f_m) \in [L^{p'}(\Omega)]^m$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$  sia valida la seguente maggiorazione

$$\|\vec{f}\|_{[L^{p'}(\Omega)]^m} \leq C \|({}^tT_p - \bar{\lambda} {}^tE) F\|_{[W_{\Omega}^{-\rho, p'}(\mathbb{R}^n)]^m}$$

ove si è posto  $F = (\vec{f}, 0) \in [L^{p'}(\Omega)]^m \times \prod_{q=1}^r W^{\sigma_q+1/p, p'}(\Gamma)$ .

5. Si possono ora estendere al caso dei sistemi ellittici secondo Petrowsky i risultati sulla teoria spettrale ottenuti nel n. 4; siccome le dimostrazioni sono del tutto analoghe a quelle fatte nel n. 4 esse non verranno qui ripetute.

**TEOREMA 5.3.** *Siano verificate le ipotesi  $(\tilde{I})$ ,  $(\tilde{II})$ ,  $(\tilde{III})$ ,  $(I\tilde{V}; \alpha)$ ,  $(\tilde{V}; \alpha)$  e  $(\tilde{VI}; \alpha)$  con  $\alpha = 0, 1, \dots, \infty$  fissato e sia  $l_1 = s_1 = \dots = s_m = 0$*

i) *Se per  $\theta_0 \in ]-\pi, +\pi[$  fissato l'ipotesi  $(\tilde{AN}; \theta_0)$  è verificata allora per ogni  $p \in ]1, +\infty[$  l'operatore  $A_p$  ha spettro discreto, indipendente da  $p \in ]1, +\infty[$ , senza punti di accumulazione al finito ed inoltre ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda = \theta_0$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande è in*

$\rho(A_p)$  e per tali  $\lambda$  si ha

$$\|R(\lambda; A_p)\|_{[L^p(\Omega)]^m \rightarrow [L^p(\Omega)]^m} \leq \frac{\text{cost}}{|\lambda|}.$$

ii) Sia verificata l'ipotesi  $(\tilde{A}\tilde{N}; \theta_s)$  con  $\theta_s \in ]-\pi, +\pi]$ ,  $s = 1, \dots, k$  in modo che il piano complesso sia diviso dai raggi  $\arg \lambda = \theta_s$  in angoli di ampiezza  $\leq \frac{\pi Q}{n}$ . Allora le autofunzioni generalizzate sono complete in  $[L^p(\Omega)]^m$  e in  $D(A_p) = \{u \in [W^{e,p}(\Omega)]^m; B\vec{u} = 0 \text{ su } \Gamma\}$  munito della norma indotta da  $[W^{e,p}(\Omega)]^m$ , per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ .

*Esempio.* Siano  $A$  l'operatore dell'elasticità:

$$A\vec{u} = -\Delta\vec{u} - \chi \text{grad div } \vec{u}$$

$B$  le condizioni di Dirichlet; allora per  $\chi$  reale  $> -1$  è  $A$  fortemente ellittico (per la def. di fortemente ellittico v. per es. [4], ...) e quindi anche  $\mathcal{L}_\theta$  è fortemente ellittico per  $|\theta| > \frac{\pi}{2}$  e dunque

per  $|\theta| > \frac{\pi}{2}$  la condizione  $(\tilde{A}\tilde{N}; \theta)$  è verificata (v. [4]). Si ricava allora dal teor. 5.3 i) che lo spettro di  $-\Delta - \chi \text{grad div}$  è discreto senza punti di accumulazione al finito e indipendente da  $p \in ]1, +\infty[$ . È poi facile verificare che risulta

$$(A_2\vec{u}, \vec{v})_{[L^2(\Omega)]^n} = (\vec{u}, A_2\vec{v})_{[L^2(\Omega)]^n}$$

per ogni  $\vec{u}, \vec{v} \in D(A_2) = \{\vec{u} \in [W^{2,2}(\Omega)]^n; \vec{u}|_\Gamma = 0\}$  e dunque lo spettro di  $A$  è reale. Inoltre per il teor. 12.7 di Agmon [2] vale la maggiorazione

$$\|\vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n} \leq \frac{1}{|\sin \theta| |\lambda|} \|A_2\vec{u} - \lambda\vec{u}\|_{[L^2(\Omega)]^n}$$

per ogni  $\lambda \in \mathbb{C}$  con  $\arg \lambda \neq 0, \pi$  e  $|\lambda|$  abbastanza grande. Segue allora direttamente dal teor. 1.3 che le autofunzioni generalizzate sono dense in  $[L^2(\Omega)]^n$ . Applicando poi l'analogo del teor. 4.2 si ottiene che le autofunzioni generalizzate sono dense in  $[L^p(\Omega)]^n$  e in  $D(A_p)$  per ogni  $p \in ]1, +\infty[$ . Si osservi infine che tutti gli autovalori sono  $> 0$ . In questo modo si generalizzano risultati ben noti (v. ad es. S. Campanato Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa XIII (1959) pp. 275-301, ...).

## BIBLIOGRAFIA

- [1] S. AGMON: *On the eigenfunctions...* Comm. Pure Appl. Math. XV (1962) pp. 119-147.
- [2] S. AGMON: *Lectures on elliptic...* Van Norstrand Mathematical Studies vol. 2, 1965.
- [3] S. AGMON-A. DOUGLIS-L. NIRENBERG: *Estimates...* (I) Comm. Pure Appl. Math. XII (1959) pp. 623-727.
- [4] S. AGMON-A. DOUGLIS-L. NIRENBERG: *Estimates...* (II) Comm. Pure Appl. Math. XVII (1964) pp. 35-92.
- [5] S. AGMON-L. NIRENBERG: *Properties of solutions...* Comm. Pure Appl. Math. XVI (1963) pp. 121-239.
- [6] M. S. AGRANOVICH-M. J. VISHIK: *Elliptic problems...* Uspehi Mat. Nauk. 19 (1964) n. 3 pp. 53-161 (trad inglese. Russian Math. Surv. 19 (1964) n. 3 pp. 53-157).
- [7] N. ARONSAJAN-A. N. MILGRAM: *Differential operators...* Rend. Circ. Mat. Palermo 2 (1954) pp. 266-325.
- [8] F. E. BROWDER: *Estimates...* Proc. Nat. Ac. Sc. USA 45 (1959) pp. 365-372.
- [9] A. DOUGLIS-L. NIRENBERG: *Interior estimates...* Comm. Pure Appl. Math. VIII (1955). pp. 503-538.
- [10] N. DUNFORD-J. SCHWARTZ: *Linear Operators...* vol I (1958), vol. II (1965) Interscience.
- [11] G. GEYMONAT: *Sui problemi ai limiti...* Ann. Mat. Pura ed Appl. LXIX (1965) pp. 207-284.
- [12] I. C. GOHBERG-M. G. KREIN: *The basic propositions...* Uspehi Mat. Nauk. 12 (1957) n. 1. pp. 43-118 (trad. ingl. in A.M.S. Translations (2) 13 (1960) pp. 185-264).
- [13] T. KATO: *Perturbation theory...* J. Analyse Math. 6 (1958) pp. 261-322.
- [14] J. L. LIONS-E. MAGENES: *Problemi ai limiti...* (III) Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 15 (1961) pp. 39-101.
- [15] J. L. LIONS-J. PEETRE: *Sur une classe d'espaces...* Pubbl. Math. I.H.E.S. 19 (1964) pp. 5-68.
- [16] E. MAGENES: *Spazi di interpolazione...* Atti VII Congresso UMI Genova 1963 pp. 1-64 Cremonese (1965).
- [17] E. MAGENES-G. STAMPACCHIA: *I problemi al contorno...* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa 12 (1958) pp. 147-258.
- [18] J. PEETRE: *Another approach...* Comm. Pure Appl. Math. XIV (1961) pp. 711-731.

- [19] R. T. SEELEY: *An example of instability...* preprint (v. anche Notices AMS vol. 11 (1964) p. 570).
- [20] V. A. SOLONNIKOV: *Sui problemi...* (in russo) (I) *Isvestia Ak. Nauk.* 28. (1964) pp. 665-706 (II) *Trudy Mat Inst. Steklova* 92 (1966) pp. 233-297.
- [21] A. E. TAYLOR: *Introduction to functional analysis...* J. Wiley 1958.
- [22] TITCHMARSH: *The theory of functions*, Oxford University Press 1939.
- [23] L. R. VOLEVICH: *Problemi ai limiti...* (in russo) *Mat. Sb.* 18 (1965) pp 373-416.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1 marzo 1967.