Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

G. Mattei

Sulla propagazione di piccole perturbazioni magnetofluidodinamiche in un fluido comprimibile in rotazione uniforme

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 324-340

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__324_0>

SULLA PROPAGAZIONE DI PICCOLE PERTURBAZIONI MAGNETOFLUIDODINAMICHE IN UN FLUIDO COMPRIMIBILE IN ROTAZIONE UNIFORME

di G. MATTEI (*a Pisa*) *)

Introduzione.

B. LEHNERT in [1] e [2] ha messo in luce gli effetti notevoli che ha una rotazione uniforme sulle onde magnetofluidodinamiche (m.f.d.) piane in un fluido omogeneo indefinito. Avendo di mira la parte interna del sole l'Autore ha considerato in [1] e [2] il fluido incomprimibile.

Lo scopo principale del presente lavoro è lo studio del problema nel caso del fluido comprimibile barotropico, caso che è sembrato di interesse anche in relazione a possibili problemi concreti di Astrofisica.

L'azione simultanea di un campo magnetico e di una rotazione uniforme su un fluido elettricamente conduttore comprimibile barotropico è stata già considerata, facendo uso di equazioni linearizzate, da S. CHANDRASEKHAR in [3] (cfr. anche [4] N. 120 *c*), ai fini però di studiarne l'influenza sul criterio di Jeans sulla instabilità gravitazionale [1]). In [3] e [4] l'Autore considera il fluido non viscoso e dotato di conducibilità elettrica σ talmente elevata da potersi considerare infinita.

Riprendendo qui, per lo scopo sopradetto, le equazioni usate in [3] e [4] trascurando le fluttuazioni del potenziale gravitazionale, nella prima parte di questo lavoro si considera il fluido non viscoso e di σ infinita, mentre nella seconda si esamina il problema nel caso in cui il fluido debba considerarsi viscoso e di σ finita.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematiche Applicate, Fac. Ingegneria, Università di Pisa.

[1]) Gli effetti di una rotazione uniforme in svariati altri problemi m.f.d. sono stati studiati da vari Autori. Si veda per es. la Bibliografia indicata in [5].

In tutte e due le parti si studia la propagazione di piccole perturbazioni m.f.d. sia nella direzione ortogonale che in quella parallela all'asse di rotazione.

Il campo magnetico primario, supposto uniforme, si considera dapprima di direzione arbitraria nello spazio; successivamente si esaminano i vari casi particolari che si possono presentare in relazione a particolari suoi orientamenti. La rotazione manifesta effetti rilevanti che sono sembrati di interesse.

PARTE I

FLUIDO NON VISCOSO E PERFETTO CONDUTTORE DELL'ELETTRICITÀ

Le equazioni linearizzate usate da S. CHANDRASEKHAR in [3] e [4], con riferimento ad una terna di assi uniformemente rotante con la velocità di rotazione $\boldsymbol{\Omega}$ della massa fluida, sono [2]):

$$(1) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\operatorname{grad}\varrho' + \frac{1}{4\pi\mu\varrho_0}(\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{B}_0 + 2\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\Omega}\ ,$$

$$(2) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \operatorname{rot}\,(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}_0)\ ,$$

$$(3) \qquad \operatorname{div}\boldsymbol{b} = 0\ ,$$

$$(4) \qquad \frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -\varrho_0\operatorname{div}\boldsymbol{v}\ .$$

In esse a è la velocità locale del suono, $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{b}$, ϱ' le perturbazioni dello stato d'equilibrio relativo nel quale i valori dell'induzione magnetica e della densità sono $\boldsymbol{B}_0$ e ϱ_0. Assumiamo come terna di riferimento rotante una terna sinistrorsa di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, con z asse di rotazione, di versori $\boldsymbol{i}_1$, $\boldsymbol{i}_2$, $\boldsymbol{i}_3$.

---

[2]) Oltre che da CHANDRASEKHAR queste equazioni sono state usate da vari altri Autori nello studio di problemi relativi alla instabilità gravitazionale e magnetogravitazionale. Tra essi segnaliamo: N. BEL, E. SCHATZMAN (cfr. per es. [6] in cui non si considerano gli effetti dovuti al campo magnetico); A. G. PACHOLCZYK, J. S. STODOLKIEWICZ autori di molti lavori sull'argomento fra i quali per es. [7] in cui si tiene conto della viscosità e la conducibilità elettrica è assunta infinita, [8] in cui si considera finita la conducibilità elettrica ed il fluido non viscoso, [9] in cui si considera la rotazione non uniforme.

1. Propagazione in direzione ortogonale all'asse di rotazione.

Assunto l'asse x parallelo alla direzione di propagazione, avendosi nel caso generale:

$$\boldsymbol{B}_0 = B_{0x}\boldsymbol{i}_1 + B_{0y}\boldsymbol{i}_2 + B_{0z}\boldsymbol{i}_3 \,,$$

le (1)-(4) forniscono il seguente sistema di equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho'}{\partial x} - \frac{B_{0y}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x} + 2v_y\Omega \,, \tag{5}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} - 2v_x\Omega \,, \tag{6}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x} \,, \tag{7}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = 0 \,, \tag{8}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_y}{\partial x} - B_{0y}\frac{\partial v_x}{\partial x} \,, \tag{9}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial x} - B_{0z}\frac{\partial v_x}{\partial x} \,, \tag{10}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial x} = 0 \,, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -\varrho_0\frac{\partial v_x}{\partial x} \,. \tag{12}$$

Possiamo intanto prescindere da b_x (costante rispetto al tempo ed al posto in base alle (8) e (11)) in quanto interessa solo la parte variabile dei campi.

Le rimanenti perturbazioni incognite v_x, v_y, v_z, b_y, b_z e ϱ' devono soddisfare il sistema di equazioni differenziali (5), (6), (7), (9), (10) e (12).

Di esso cerchiamo soluzioni del tipo:

$$(13)\qquad \begin{cases} v_x = \overline{v}_x e^{i(kx-\omega t)}\,, & b_y = \overline{b}_y e^{i(kx-\omega t)}\,, \\ v_y = \overline{v}_y e^{i(kx-\omega t)}\,, & b_z = \overline{b}_z e^{i(kx-\omega t)}\,, \\ v_z = \overline{v}_z e^{i(kx-\omega t)}\,, & \varrho' = \overline{\varrho}' e^{i(kx-\omega t)}\,, \end{cases}$$

di cui è chiaro il significato fisico dei simboli.

Volendo, in un primo tempo, studiare onde piane armoniche nello spazio assumiamo k reale.

Sostituendo le (13) in (5), (6), (7), (9), (10) e (12) otteniamo il seguente sistema lineare omogeneo di equazioni algebriche per le ampiezze $\overline{v}_x$, $\overline{v}_y$, $\overline{v}_z$, $\overline{b}_y$, $\overline{b}_z$ e $\overline{\varrho}'$:

$$-\,i\omega\overline{v}_x - 2\Omega\overline{v}_y + ik\,\frac{B_{0y}}{4\pi\mu\varrho_0}\,\overline{b}_y + ik\,\frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0}\,\overline{b}_z + \frac{a^2}{\varrho_0}\,ik\overline{\varrho}' = 0\,,$$

$$2\Omega\overline{v}_x - i\omega\overline{v}_y - ik\,\frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\,\overline{b}_y = 0\,,$$

$$i\omega\overline{v}_z + ik\,\frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\,\overline{b}_z = 0\,,$$

$$ikB_{0y}\overline{v}_x - ikB_{0x}\overline{v}_y - i\omega\overline{b}_y = 0\,,$$

$$ikB_{0z}\overline{v}_x - ikB_{0x}\overline{v}_z - i\omega\overline{b}_z = 0\,,$$

$$ik\varrho_0\overline{v}_x - i\omega\overline{\varrho}' = 0\,.$$

Affinchè ci siano soluzioni non banali deve annullarsi il determinante del sistema il che a conti fatti conduce alla relazione di dispersione:

$$(14)\qquad (A_x^2k^2 - \omega^2)\{\omega^4 - [k^2(A^2 + a^2) + 4\Omega^2]\omega^2 + a^2A_x^2k^4\} = 0\,,$$

dove

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \frac{1}{4\pi\mu\varrho_0}\,(B_{0x}^2 + B_{0y}^2 + B_{0z}^2)$$

è il quadrato della velocità di Alfvén.

La (14), che fornisce i valori di ω corrispondenti ad un assegnato k, si spezza nelle:

$$(15)\qquad \omega^2 = A_x^2k^2\,,$$

$$(16)\qquad \omega^4 - [k^2(A^2 + a^2) + 4\Omega^2]\omega^2 + a^2A_x^2k^4 = 0\,.$$

La (15) descrive le ben note onde di Alfvén che risultano quindi non influenzate dalla comprimibilità del fluido né dalla rotazione.

Da (16) per $\Omega = 0$ si ritrova la ben nota relazione di dispersione caratteristica dei fluidi non rotanti; cfr. per es. H. ALFVÉN [10] Eq. (43) pag. 98, dove peraltro essa è ricavata nel caso particolare in cui $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{B}_0$ e la direzione di propagazione sono complanari.

La (16) con $\Omega \neq 0$ fornisce per ω quattro valori reali a due a due opposti (il discriminante risulta positivo e vi sono due variazioni nei segni).

Possiamo quindi dire che nel caso in esame, pur sotto l'azione della rotazione, prefissato un k reale, per una generica orientazione di $\boldsymbol{B}_0$ nello spazio, vi sono, oltre quello di Alfvén descritto da (15), due possibili modi di propagazione di onde piane [3]).

A ciascuno di essi competono due valori reali ed opposti della velocità di fase $u = \omega/k$ dati da:

$$u = \pm \left[\frac{(a^2 + A^2 + 4\Omega^2/k^2) \pm \sqrt{(a^2 + A^2 + 4\Omega^2/k^2)^2 - 4A_x^2 a^2}}{2} \right]^{1/2} . \tag{17}$$

Da (17) appare come i valori della velocità di fase, a causa della rotazione, vengono a dipendere, oltre che da Ω, anche da k, al contrario di quanto accade per il fluido non rotante. La rotazione introduce quindi un effetto dispersivo.

Osserviamo che il termine $A_*^2 = 4\Omega^2/k^2$, introdotto dalla rotazione, anche per Ω molto piccolo può diventare assai sensibile a lunghezze d'onda elevate. Al proposito se, tanto per avere un'indicazione sugli ordini di grandezza, si valuta il rapporto A_*/A in base ai dati relativi al sole riportati da B. LEHNERT in [1] pag. 649:

$$\Omega = 2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{sec}^{-1} \qquad \text{(un valore intermedio)}$$

$$A = 2\ \mathrm{m/sec}\ ,$$

risulta che tale rapporto è $\simeq 14$ per

$$\frac{1}{k} = 10^{-2} R$$

con $R = 6{,}96 \cdot 10^8$ m, raggio solare.

---

[3]) Che corrispondono all'onda idromagnetica modificata e all'onda acustica modificata del fluido non rotante (cfr. per es. [10] p. 98).

Volendo ora esaminare le onde piane armoniche nel tempo assumiamo ω reale.

I corrispondenti valori di k sono forniti da (15) e dalla (16) che qui riscriviamo nella forma:

$$A_x^2 a^2 k^4 - \omega^2(a^2 + A^2)k^2 + \omega^2(\omega^2 - 4\Omega^2) = 0 .$$

Nel caso $B_{0x} \neq 0$, mentre per $\Omega = 0$ questa fornisce per k quattro valori reali ed opposti, per $\Omega \neq 0$ ciò accade solo se $\omega > 2\Omega$ e quindi solo se è verificata questa circostanza si hanno due effettivi modi di propagazione, oltre a quello caratterizzato da (15).

Qualora sia, in particolare, $\omega = 2\Omega$ abbiamo un solo modo di propagazione caratterizzato dalla velocità di fase:

$$u = \pm \frac{A_x a}{(a^2 + A^2)^{1/2}} .$$

Se è $\omega < 2\Omega$ abbiamo per k due valori reali ed opposti, cui corrisponde un modo di propagazione, e due valori immaginari coniugati, cui non corrisponde più un fenomeno di propagazione ondosa.

Nel caso $B_{0x} = 0$ abbiamo assenza di propagazione per $\omega \leqslant 2\Omega$ e un solo modo di propagazione caratterizzato dalla velocità di fase:

$$u = \pm \omega \left(\frac{A^2 + a^2}{\omega^2 - 4\Omega^2}\right)^{1/2}$$

se $\omega > 2\Omega$.

Esaminiamo ora i vari casi particolari possibili:

1.1. $B_{0z} = 0$.

Il caso è caratterizzato da (15) e da (16) con $A^2 = A_x^2 + A_y^2$.

Osserviamo che ora v_z e b_z, oltreché disaccoppiate dalle altre incognite, obbediscono, per (7) e (10), separatamente all'equazione di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = A_x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

da cui la (15).

1.1. (*a*) $B_{0z} = B_{0y} = 0.$

Per quanto riguarda v_z e b_z permane il modo di propagazione caratterizzato da (15) con $A_x = A$.

Per quanto riguarda le altre quattro perturbazioni mentre in assenza di rotazione v_y e b_y obbediscono all'equazione:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(onde di Alfvén) e v_x e ϱ' alla:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(onde acustiche), nel caso del fluido rotante invece v_x, v_y, b_y, ϱ' obbediscono ancora ad equazioni accoppiate (cfr. (5), (6), (9), (12)) e si è condotti alla (17) con $A_x = A$ [4]).

---

[4]) Nel caso generale da (5), (6), (7), (9), (10), (12) si ricavano le seguenti:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - \frac{B_{0y}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial^2 b_y}{\partial t \partial x} - \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial^2 b_z}{\partial t \partial x} + 2\Omega \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_y}{\partial x} - 4\Omega^2 v_x\,,$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial t^2} = A_x^2 \frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{B_{0y} B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - 2\Omega \frac{\partial v_x}{\partial t}\,,$$

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = A_x^2 \frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} - \frac{B_{0x} B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\,,$$

$$\frac{\partial^2 b_y}{\partial t^2} = A_x^2 \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} - B_{0y} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t} - 2\Omega B_{0z} \frac{\partial v_x}{\partial x}\,,$$

$$\frac{\partial^2 b_z}{\partial t^2} = A_x^2 \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2} - B_{0z} \frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial t}\,,$$

$$\frac{\partial^2 \varrho'}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varrho'}{\partial x^2} + \frac{B_{0y}}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2} - 2\varrho_0 \Omega \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{B_{0z}}{4\pi\mu} \frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}\,,$$

che mettono in evidenza i coefficienti di accoppiamento.

1.2. $B_{0x} = 0.$

Scompare il modo di propagazione (15). Da (17):

$$u_{1,2} = \pm \left(A^2 + a^2 + \frac{4\Omega^2}{k^2}\right)^{1/2} \; {}^{5)} \,, \qquad (18)$$

$$u_{3,4} = 0 \,.$$

In questo caso quindi c'è un solo modo di propagazione che per $\Omega = 0$ corrisponde alle onde magnetoacustiche (cfr. R. NARDINI [11] N. 3).

La rotazione ha quindi l'effetto di incrementare la velocità di fase delle onde magnetoacustiche di un termine funzione di k oltrechè di Ω (si veda l'indicazione su un suo possibile ordine di grandezza al N. 1).

La velocità di gruppo delle onde magnetoacustiche (18) risulta:

$$\boldsymbol{V}_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} \boldsymbol{i}_1 = \pm \frac{(A^2 + a^2)k}{[k^2(A^2 + a^2) + 4\Omega^2]^{1/2}} \boldsymbol{i}_1 \,.$$

Quindi anche nel caso del fluido rotante la velocità di gruppo, come quella di fase, è diretta ortogonalmente al campo magnetico primario, ma ora, oltrechè di Ω, viene ad essere funzione del numero d'onda.

Se oltre a $B_{0x} = 0$ è anche $B_{0y} = 0$ ($B_{0z} = 0$) si ha ancora (18) con la semplice sostituzione di A con A_z (con A_y) [6].

1.3. $B_{0y} = 0.$

È caratterizzato da (15) e (16) con $A^2 = A_x^2 + A_z^2$.

---

[5]) Si osservi che nel caso in esame dalla (5) per (6), (9), (10) e (12) si giunge all'equazione nella sola v_x:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial t^2} = (a^2 + A^2) \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} - 4\Omega^2 v_x$$

Imponendo a questa la $(13)_1$ si è condotti alla (18). Le altre perturbazioni si possono poi ricavare per quadrature da (6), (9), (10) e (12).

[6]) Se è $B_{0z} = 0$ è stazionario b_z, se è $B_{0y} = 0$ lo è b_y; v_z lo è in entrambi i casi.

2. Propagazione in direzione parallela all'asse di rotazione.

Assunto l'asse x nel piano di $\boldsymbol{B}_0$ ed $\boldsymbol{\Omega}$ le (1)-(4) conducono al seguente sistema di equazioni scalari:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_x}{\partial z} + 2v_y\Omega \,, \tag{19}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_y}{\partial z} - 2v_x\Omega \,, \tag{20}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho'}{\partial z} - \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_x}{\partial z} \,, \tag{21}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = -B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial z} + B_{0z}\frac{\partial v_x}{\partial z} \,, \tag{22}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_{0z}\frac{\partial v_y}{\partial z} \,, \tag{23}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = 0 \,, \tag{24}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial z} = 0 \,, \tag{25}$$

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} = -\varrho_0\frac{\partial v_z}{\partial z} \,. \tag{26}$$

Prescindiamo da b_z che risulta costante in base a (24) e (25).

Per le altre perturbazioni procedendo al solito modo si è condotti alla:

$$\begin{aligned}(A_z^2k^2 - \omega^2)[\omega^4 - k^2(A^2 + a^2)\omega^2 + k^4a^2A_z^2] - \\ - 4\Omega^2\omega^2[k^2(a^2 + A_x^2) - \omega^2] = 0 \,.\end{aligned} \tag{27}$$

Nella (27) il primo termine del primo membro, che coincide con il primo membro della (14) dove si faccia $\Omega = A_y = 0$ e si scambi A_x con A_z, descrive i tre modi di propagazione caratteristici del fluido non rotante: onde di Alfvén, onde idromagnetiche modificate e onde acustiche modificate; la rotazione, come era da attendersi, ha un effetto di accoppiamento che la (27) mette in rilievo.

Esaminiamo ora i due casi particolari possibili:

2.1. $B_{0z} = 0$.

Da (23) b_y risulta stazionario. La (27) diventa:

$$(\omega^2 - 4\Omega^2)[\omega^2 - (A^2 + a^2)k^2] = 0 ,$$

che si spezza nelle:

$$\omega^2 - 4\Omega^2 = 0 , \tag{28}$$

$$\omega^2 - (A^2 + a^2)k^2 = 0 . \tag{29}$$

A queste si può giungere anche osservando che v_x e v_y sono presenti solo nelle (19) e (20) in cui non compaiono né le altre perturbazioni, nè il campo magnetico primario; richiedendo ad esse il solito tipo di soluzioni si è condotti alla (28). Per le rimanenti perturbazioni v_z, ϱ' e b_x da (21), (22) e (26) si deduce facilmente l'equazione nella sola v_z:

$$\frac{\partial^2 v_z}{\partial t^2} = (a^2 + A^2)\,\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}$$

da cui (29).

La (28), in cui non compare k, fornisce per la velocità di fase:

$$u = \pm\, 2\Omega/k ;$$

si osservi che in assenza di rotazione non c'è questo tipo di propagazione (v_x e v_y risultano stazionari).

La (29) è caratteristica delle onde magnetoacustiche in assenza di rotazione (si osservi che anche in questo caso $\boldsymbol{B}_0$ è ortogonale alla direzione di propagazione).

In definitiva nel caso in esame si hanno, pur in presenza della rotazione, onde magnetoacustiche, oltre al nuovo modo di propagazione caratterizzato da (28).

Dai numeri 1.2 e 2.1 possiamo allora trarre questa conclusione: se il campo magnetico primario è ortogonale alla direzione di propagazione si manifestano nel fluido rotante onde magnetoacustiche e la loro velocità di fase è influenzata in modo rilevante dalla rotazione quando la direzione di propagazione è ortogonale all'asse di rotazione.

2.2. $B_{0x} = 0$.

La (27) diventa:

$$(\omega^2 - a^2k^2)[\omega^4 - (2k^2A^2 + 4\Omega^2)\omega^2 + A^4k^4] = 0$$

che si spezza nelle:

$$\omega^2 - a^2k^2 = 0 \,, \tag{30}$$

$$\omega^4 - (2k^2A^2 + 4\Omega^2)\omega^2 + A^4k^4 = 0 \,. \tag{31}$$

Alla (30) si giunge anche osservando che ora v_z e ϱ', oltrechè disaccoppiate dalle altre perturbazioni, obbediscono separatamente per (21) e (26) all'equazione di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \,,$$

che descrive onde acustiche pure.

La (31), assumendo dapprima k reale, fornisce per ω quattro valori reali a due a due opposti.

Abbiamo quindi nel caso in esame, per un prefissato valore reale di k, tre possibili modi di propagazione: uno costituito da onde acustiche pure e gli altri caratterizzati dai seguenti valori della velocità di fase:

$$u = \pm \left[\left(A^2 + \frac{2\Omega^2}{k^2}\right) \pm \frac{2\Omega}{k^2}(\Omega^2 + A^2k^2)^{1/2}\right]^{1/2} . \tag{32}$$

In assenza di rotazione il caso in esame non si differenzia dal caso 1.1, a con $\Omega = 0$ e i due modi di propagazione (32) si riducono ad uno con $u = \pm A$, come deve essere (cfr. R. Nardini [11] pp. 165-66 Caso I).

La rotazione anche qui fa dipendere u, oltrechè da Ω, anche da k introducendo quindi un effetto dispersivo. Si noti poi la indipendenza di u da a nella (32).

Se prefissiamo ω reale i corrispondenti valori di k sono le soluzioni della

$$A^4k^4 - 2A^2\omega^2k^2 + (\omega^2(\omega^2 - 4\Omega^2) = 0 \ .$$

Se $\omega > 2\Omega$ abbiamo per k i quattro valori reali ed opposti:

$$k = \pm \frac{[\omega(\omega \pm 2\Omega)]^{1/2}}{A}$$

cui corrispondono due effettivi modi di propagazione.

Se $\omega < 2\Omega$ si hanno per k due valori reali ed opposti, cui corrisponde un modo di propagazione, e due valori immaginari coniugati, cui non corrisponde più un fenomeno di propagazione ondosa.

Se è poi $\omega = 2\Omega$ si ha un solo modo di propagazione con $u = \pm A/\sqrt{2}$.

Parte II

FLUIDO VISCOSO E DI CONDUCIBILITÀ ELETTRICA FINITA [7])

Le equazioni (1) e (2) sono ora sostituite dalle:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\,\text{grad}\,\varrho' + \frac{1}{4\pi\mu\varrho_0}(\text{rot}\,\boldsymbol{b})\wedge\boldsymbol{B}_0 + \tag{33}$$

$$+ 2\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{\Omega} + \frac{\lambda+\eta}{\varrho_0}\,\text{grad div}\,\boldsymbol{v} + \frac{\eta}{\varrho_0}\Delta_2\boldsymbol{v} \ ,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \text{rot}\,(\boldsymbol{v}\wedge\boldsymbol{B}_0) + \beta\Delta_2\boldsymbol{b} \ , \tag{34}$$

dove $\beta = c^2/4\pi\mu\sigma$, η è il coefficiente di viscosità dinamica di scorrimento e λ quello di compressione.

---

[7]) Per il fluido non rotante il problema della propagazione di piccole perturbazioni m.f.d. nella direzione parallela ed in quella ortogonale al campo magnetico primario è stato trattato da A. M. Pratelli in [12] nel caso generale in cui il fluido, oltrechè viscoso e di conducibilità elettrica finita, è anche conduttore del calore.

3. Propagazione in direzione ortogonale all'asse di rotazione.

Nel caso generale in cui $\boldsymbol{B}_0$ ha direzione qualsiasi il sistema di equazioni scalari è formato da (8), (11), (12) e dalle seguenti che discendono da (33) e (34):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{a^2}{\varrho_0}\frac{\partial \varrho'}{\partial x} - \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{B_{0y}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} + 2v_y\Omega + \frac{\lambda+2\eta}{\varrho_0}\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}, \tag{35}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_y}{\partial x} - 2v_x\Omega + \frac{\eta}{\varrho_0}\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0}\frac{\partial b_z}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho_0}\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_y}{\partial x} - B_{0y}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 b_y}{\partial x^2}, \tag{38}$$

$$\frac{\partial b_z}{\partial t} = B_{0x}\frac{\partial v_z}{\partial x} - B_{0z}\frac{\partial v_x}{\partial x} + \beta\frac{\partial^2 b_z}{\partial x^2}. \tag{39}$$

Abbiamo anche qui $b_x =$ costante da cui prescindiamo. Per le altre perturbazioni procedendo al solito modo si giunge alla relazione di dispersione:

$$\begin{aligned} &\left[\left(i\omega - \frac{\eta}{\varrho_0}k^2\right)(i\omega - \beta k^2) + k^2A_x^2\right]\left\{\left(k^2a^2 - i\,\frac{\lambda+2\eta}{\varrho_0}\,\omega k^2 - \omega^2\right)\cdot\right.\\ &\quad\cdot\left[\left(i\omega - \frac{\eta}{\varrho_0}k^2\right)(i\omega - \beta k^2) + A_x^2k^2\right] - (A_y^2 + A_z^2)\cdot\\ &\quad\left.\cdot\left(ik^2\frac{\eta}{\varrho_0} + \omega\right)\omega k^2 - 4\Omega^2 i\omega(\beta k^2 - i\omega)\right\} = 0 \end{aligned} \tag{40}$$

che per $\lambda = \eta = \beta = 0$ ridà la (14).

La (40) si spezza nelle [8]):

$$\left(i\omega - \frac{\eta}{\varrho_0}k^2\right)(i\omega - \beta k^2) + k^2A_x^2 = 0\,, \tag{41}$$

[8]) Come caso particolare di (42) facendo $\Omega = \lambda = \eta = A_x = A_z = 0$ si ritrova la relazione di dispersione che sta alla base del lavoro di J. DÉ [13] (Eq.) (8).

$$(42) \qquad \left\{ k^2a^2 - i\,\frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0}\,\omega k^2 - \omega^2 \right\} \left[\left(i\omega - \frac{\eta}{\varrho_0}\,k^2 \right) (i\omega - \beta k^2) + k^2 A_x^2 \right] -$$
$$- (A_y^2 + A_z^2) \left(ik^2\,\frac{\eta}{\varrho_0} + \omega \right) \omega k^2 - 4\Omega^2 i\omega(\beta k^2 - i\omega) = 0 \,.$$

Osserviamo che nella (41) non compare Ω nè la viscosità di compressione. Essa per il fluido non rotante trovasi già in C. AGOSTINELLI [14] Eq. 5.15; (cfr. anche SHIH-I PAI [15] Cap. X, Eq. (10.31)) [9]). (In [14], nell'ipotesi che $\boldsymbol{B}_0$ e la direzione di propagazione siano complanari, si considera il fluido anche conduttore del calore).

Per quanto riguarda la (42) osserviamo intanto che l'espressione contenuta fra parentesi quadre non è altro che il primo membro di (41). L'espressione fra parentesi graffe uguagliata a zero fornisce la relazione di dispersione relativa alla propagazione di onde acustiche piane longitudinali in un fluido non rotante viscoso in assenza di campo magnetico [10]). Infatti in questo caso v_x compare solo in due equazioni che sono la (12) e la (35) con $B_{0z} = B_{0y} = \Omega = 0$; se imponiamo a queste le soluzioni solite siamo appunto condotti alla:

$$(43) \qquad - \omega^2 - i\omega\,\frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0}\,k^2 + a^2k^2 = 0 \,.$$

Dalla (42) deduciamo che, se il campo magnetico primario è parallelo alla direzione di propagazione, per $\Omega = 0$ c'è disaccoppiamento fra le onde definite da (43) e quelle definite da (41), mentre per $\Omega \neq 0$ tale disaccoppiamento cessa, fatto questo già riscontrato nel N. 1.1, *a* per il fluido non viscoso e perfetto conduttore dell'elettricità.

---

[9]) E nel caso particolare di assenza di viscosità in H. ALFVÉN [10] N. 3.4.2 (Eq. (22)).

[10]) È da rilevare che in tutta la presente nota, come anche per es. in tutto il Cap. X di [15] e in [14] § 5 N. 1, 2, la parola « onde » è usata come sinonimo di soluzioni elementari del tipo (13) del sistema di equazioni che reggono il problema. Se invece ci si riferisce ai fronti d'onda quali superfici di discontinuità ricordiamo che è stata dimostrata l'impossibilità della loro propagazione nei fluidi viscosi da P. DUHEM [16] supponendo i due coefficienti di viscosità indipendenti, entrambi diversi da zero e soddisfacenti a certe disequazioni e da G. LAMPARIELLO [17] supponendo i coefficienti di viscosità legati dalla relazione di Stokes. Recentemente poi in [18] A. M. PRATELLI ha mostrato che in gasdinamica basta sia diverso da zero uno solo dei due coefficienti di viscosità per concludere che non può esservi propagazione di fronti d'onda e che ciò accade anche in m.f.d. con l'eccezione della propagazione del fronte di Alfvén quando $\eta = 0$ e $\lambda \neq 0$.

Se è $B_{0x} = 0$ la (41) si spezza nelle:

$$- i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 = 0 \, , \qquad - i\omega + \beta k^2 = 0 \, ,$$

corrispondenti ciascuna ad un'equazione unidimensionale della diffusione.

4. Propagazione in direzione parallela all'asse di rotazione.

Il sistema di equazioni scalari è costituito da (24), (25), (26) e dalle seguenti:

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_x}{\partial z} + 2v_y\Omega + \frac{\eta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \, , \tag{44}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_{0z}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_y}{\partial z} - 2v_x\Omega + \frac{\eta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2} \, , \tag{45}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = - \frac{a^2}{\varrho_0} \frac{\partial \varrho'}{\partial z} - \frac{B_{0x}}{4\pi\mu\varrho_0} \frac{\partial b_x}{\partial z} + \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \, , \tag{46}$$

$$\frac{\partial b_x}{\partial t} = - B_{0x} \frac{\partial v_z}{\partial z} + B_{0z} \frac{\partial v_x}{\partial z} + \beta \frac{\partial^2 b_x}{\partial z^2} \, , \tag{47}$$

$$\frac{\partial b_y}{\partial t} = B_{0z} \frac{\partial v_y}{\partial z} + \beta \frac{\partial^2 b_y}{\partial z^2} \, . \tag{48}$$

Procedendo al solito modo si è condotti alla relazione di dispersione:

$$\begin{aligned} &\left[\left(- i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2\right)(- i\omega + \beta k^2) + k^2 A_z^2\right] \left\{ \left(k^2 a^2 - i\omega \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} k^2 - \omega^2\right) \cdot \right. \\ &\cdot \left[\left(- i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2\right)(- i\omega + \beta k^2) + A_z^2 k^2\right] - \\ &\left. - i\omega A_x^2 \left(- i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2\right) k^2 \right\} + 4\Omega^2 (- i\omega + \beta k^2) \cdot \\ &\cdot \left[(- i\omega + \beta k^2)\left(a^2 k^2 - i\omega \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} k^2 - \omega^2\right) - i\omega A_x^2 k^2\right] = 0 \end{aligned} \tag{49}$$

che per $\lambda = \eta = \beta = 0$ ridà la (27).

Analogamente a quanto accadeva alla (27) il primo termine del primo membro della (49) coincide con il primo membro della (40) dove si faccia $\Omega = A_y = 0$ e si scambi A_x con A_z.

4.1. $B_{0z} = 0$.

La (49) in questo caso dà origine alle:

$$- i\omega + \beta k^2 = 0 \qquad (\text{cfr. } (48)) , \tag{50}$$

$$\omega^2 + 2i \frac{\eta}{\varrho_0} k^2\omega - \frac{\eta^2}{\varrho_0^2} k^4 - 4\Omega^2 = 0 , \tag{51}$$

$$(- i\omega + \beta k^2)\left[- \omega^2 - i\omega \frac{\lambda + 2\eta}{\varrho_0} k^2 + k^2a^2\right] - i\omega A^2k^2 = 0 . \tag{52}$$

Come già nel N. 2.1 v_x e v_y compaiono solo in due equazioni, le (44) e (45), dalle quali sono assenti il campo magnetico e le altre perturbazioni; da esse si giunge direttamente alla (51).

Se assumiamo k reale la (51) fornisce per ω i due valori complessi:

$$\omega = - i \frac{\eta}{\varrho_0} k^2 \pm 2\Omega$$

e quindi:

$$v_x = \overline{v}_x e^{-(\eta/\varrho_0)k^2 t} e^{i(kz \mp 2\Omega t)}$$

e l'analoga per v_y, di cui è chiaro il significato fisico (si confronti con la (28)).

b_x, v_z, ϱ' obbediscono al sistema accoppiato (46), (47), (26) che conduce alla (52). Si osservi che il termine fra parentesi quadre nella (52) è il primo membro di (43).

4.2. $B_{0x} = 0$.

La (49) si spezza nella (43) e nella:

$$\left[\left(- i\omega + \frac{\eta}{\varrho_0} k^2\right) (- i\omega + \beta k^2) + A^2k^2\right]^2 + 4\Omega^2(\beta k^2 - i\omega)^2 = 0 ,$$

in cui il termine fra parentesi quadre è il primo membro di (41) con A_x scambiato con $A_z(= A)$.

Le perturbazioni v_z e q' sono presenti solo nelle (26) e (46) in cui non compaiono nè B_0 nè Ω nè le altre perturbazioni: queste due equazioni conducono alla (43).

BIBLIOGRAFIA

[1] Lehnert B.: *Magneto-hydrodynamic waves under the action of the Coriolis force*, « Astrophys. J. », 119, 1954, pp. 647-654.

[2] Lehnert B.: *Magneto-hydrodynamic waves under the action of the Coriolis force II*, « Astrophys. J. », 121, 1955, pp. 481-490.

[3] Chandrasekhar S.: *The gravitational instability of an infinite homogeneous. medium when Coriolis force is acting and a magnetic field is present*, « Astrophy J. », 119, 1954, pp. 7-9.

[4] Chandrasekhar S.: *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford, 1961.

[5] Mattei G.: *Sulla influenza della forza di Coriolis in un problema magneto-fluidodinamico*, « Annali Scuola Normale Pisa », in corso di pubblicazione.

[6] Bel N., Schatzman E.: *On the gravitational instability of a medium in non uniform rotation*, « Rev. Mod. Phys. », 30, 1958, pp. 1015-16.

[7] Pacholczyk A. G., Stodolkiewicz J. S.: *The magnetogravitational instability of an infinite homogeneous medium when a Coriolis force is acting and viscosity is taken into account*, « Bull. Acad. Pol. Sc. », 7, 1959, pp. 429-434.

[8] ibidem pp. 681-685.

[9] ibidem pp. 503-7.

[10] Alfvén H.: *Cosmical electrodynamics*, Oxford, 1963.

[11] Nardini R.: *Sulle onde magnetofluidodinamiche e magneto-acustiche*, « Atti Simposio magnetofluidodinamica », Bari 1961, pp. 160-67, Ed. Cremonese, Roma.

[12] Pratelli A. M.: *Sulla influenza delle varie viscosità nella propagazione di piccole perturbazioni in magnetofluidodinamica*, « Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. Cl. Sc. », 97, 1963, pp. 699-715.

[13] Dé J.: *Magnetoacustic waves in a plasma*, « Phy. Fluids », 6, 1963, p. 1772.

[14] Agostinelli C.: *Magnetofluidodinamica*, « Boll. U. M. I. », 20, 1965, pp. 1-79.

[15] Pai Shih-I: *Magnetogasdynamics and plasma dynamics*, Wien Springer-Verlag, 1962.

[16] Duhem P.: *Recherches sur l'hidrodynamique* (nouv. éd.), Paris, 1961.

[17] Lampariello G.: *Sull'impossibilità di propagazioni ondose nei fluidi viscosi*, « Rend. Lincei », (6), 1931, pp. 688-691.

[18] Pratelli A. M.: *Sui fronti d'onda nei fluidi*, « Rend. Ist. Lombardo Sc. Lett. Cl. Sc. », 99, 1965, pp. 187-97.

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° ottobre 1966.