Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Antonio Chiffi

Correnti irriducibili e insiemi di perimetro finito

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 37 (1967), p. 312-323

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__312_0>

CORRENTI IRRIDUCIBILI
E INSIEMI DI PERIMETRO FINITO

di ANTONIO CHIFFI (*a Padova*) *)

Dimostriamo alcuni teoremi di struttura per le correnti piane rettificabili e irriducibili (def. 2.1), facendo vedere come tali correnti siano bordi di insiemi aperti di perimetro finito, aventi un certo tipo di connessione. Questi risultati ci permetteranno, in un successivo lavoro, di dare una rappresentazione delle correnti piane chiuse e rettificabili mediante integrali curvilinei.

1. Alcune definizioni.

Adottiamo le definizioni e il simbolismo di [F F] per le *forme differenziali* $\omega \in E^k(R^n)$ di grado k e di classe ∞ su R^n e per le *correnti* $T \in E_k(R^n)$ sulle forme di $E^k(R^n)$; parimenti indicheremo con H^k la *misura k-dimensionale di Hausdorff* in R^n e con $\theta^k(\gamma, A, x)$, $\theta^{*k}(\gamma, A, x)$, $\theta^k_*(\gamma, A, x)$ rispettivamente la *k-densità*, la *k-densità superiore* e la *k-densità inferiore* rispetto alla misura di Caratheodory γ dell'insieme A nel punto x, abbreviando con $\theta^k(\gamma, x)$, ..., se $A = R^n$. Rinviamo a [DG 1], [DG 2], [M 2], per la nozione di *perimetro* $P(E)$ di un insieme misurabile $E \subset R^n$ e di *frontiera ridotta* $\mathcal{F}^*E$. Ad un insieme misurabile e limitato $E \subset R^n$ si può associare una corrente di $E_n(R^n)$ che indicheremo sempre con E, definita dalla integrazione su E delle forme $\omega \in E^n(R^n)$; si può pertanto parlare di *bordo* di E nel senso di corrente e indicarlo con ∂E. Nelle ipotesi

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto di Matematica Applicata, Via Marzolo 9, Padova.

dette E è una corrente intera [1]) e, se $P(E) < \infty$, valgono le uguaglianze [2]):

$$M(\partial E) = P(E) \tag{1.1}$$

$$\| \partial E \| (B) = H^{n-1}(B \cap \mathcal{F}^* E) \tag{1.2}$$

per ogni insieme di Borel $B \subset R^n$. Indichiamo con $\text{mis}_k\, E$ la misura secondo Lebesgue di un insieme $E \subset R^k$.

Indichiamo con $\mathcal{F}E$ la frontiera dell'insieme E e con $\overline{E}$ la sua chiusura; poniamo:

$$I_\varrho(x) = \{y: \quad y \in R^n \;, \quad | x - y | < \varrho\}$$

Indichiamo con $\mathcal{F}_e E$ la *frontiera essenziale* dell'insieme E, così definita:

$$\mathcal{F}_e E = \{x: \quad x \in R^n \;, \quad 0 < \text{mis}_n\, [E \cap I_\varrho(x)] < \text{mis}_n\, I_\varrho(x), \qquad \text{per ogni } \varrho > 0\} \;.$$

Si dice che una corrente T è *chiusa* se è: $\partial T = 0$.

Indicheremo con $Z_k(R^n)$ la famiglia delle correnti intere chiuse.

2. Correnti irriducibili

Dopo aver richiamato la definizione di corrente irriducibile, proviamo che le correnti piane irriducibili sono bordi di insiemi aperti.

DEFINIZIONE 2.1 – Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ $(0 < k < n)$ è *riducibile* [3]) se appartiene a $Z_k(R^n)$ e se esistono le correnti non nulle T_1 e T_2 di $Z_k(R^n)$ tali che:

$$T = T_1 + T_2 \;; \qquad M(T) = M(T_1) + M(T_2)$$

Diremo che la corrente $T \in E_k(R^n)$ è *irriducibile* se appartiene a $Z_k(R^n)$ e non è riducibile.

Ha luogo il seguente teorema [4]):

TEOREMA 2.2: *Una corrente $T \in Z_k(R^n)$ $(0 < k < n)$ è uguale alla somma di una successione $\{T_i\}$, eventualmente finita, di correnti $T_i \in Z_k(R^n)$ irriducibili, tali che*:

$$M(T) = \sum_i M(T_i)$$

TEOREMA 2.3: *Sia $T \in Z_{n-1}(R^n)$ una corrente irriducibile; esiste un*

---

[1]) Cfr. [F F], 8.14 a pag. 499.

[2]) Cfr. [DG 2], [F 2].

[3]) Cfr. [C], def. 1.

[4]) [C], teorema 11.

insieme misurabile, limitato e di perimetro finito $E \subset R^n$ *tale che* $T = \partial E$ *oppure* $-T = \partial E$.

Alla corrente T si può associare [5]) una corrente $V \in I_n(R^n)$ tale che $\partial V = T$ ed è $V = C\psi$, con ψ funzione sommabile, a supporto compatto in R^n ed a valori interi [6]).

Sarà sufficiente dimostrare che $\psi(x)$ oppure $-\psi(x)$ è funzione caratteristica di un insieme. Poniamo per ogni intero $i > 0$:

$$E_i = \{x: \quad x \in R^n, \quad \psi(x) \geqslant i\}$$
$$E_{-i} = \{x: \quad x \in R^n, \quad \psi(x) \leqslant -i\}$$

Si ha:

$$V = \sum_{i=1}^{\infty} E_i - \sum_{i=1}^{\infty} E_{-i} \qquad \partial V = T = \sum_{i=1}^{\infty} \partial E_i - \sum_{i=1}^{\infty} \partial E_{-i}$$

ed anche [7])

$$M(\partial V) = M(T) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} M(\partial V_i)$$

e la corrente T sarebbe riducibile se gli insiemi E_i non fossero vuoti per $i > 1$ e per $i < -1$ e se uno dei due insiemi E_1 e E_{-1} non fosse vuoto. Esiste pertanto un insieme E, con $T = \pm \partial E$.

Osservazione 2.4 – Nel precedente teorema si può sempre supporre $\mathcal{F}E = \mathcal{F}_e E$ perchè, in caso contrario, si può prendere in considerazione, al posto di E, un insieme E' che differisce da E per un insieme di misura mis_n nulla [8]) e che si identifica perciò con la stessa corrente E.

Corollario 2.5: *Nelle ipotesi del teorema* 2.2 e se $\mathcal{F}E = \mathcal{F}_e E$, si ha:

$$\text{(2.1)} \qquad \textit{supporto } T = \mathcal{F}E$$

La (2.1) segue dalla uguaglianza [9]): *supporto* $T = \overline{\mathcal{F}^* E}$ e dall'altra [10]):

$$\overline{\mathcal{F}^* E} = \mathcal{F}_e E$$

Lemma 2.6: *Sia* $T \in Z_1(R^2)$ *una corrente irriducibile. Per ogni* $x \in$ *supporto* T *si ha*:

$$\text{(2.2)} \qquad \theta^{*1}(\| T \|, \quad x) > 0 .$$

---

[5]) Cfr. [F F], teoremi 6.1 a pag. 482 e 6.2 a pag. 485.
[6]) Cfr. [F F], 3.8 a pag. 469.
[7]) Cfr. [F R], teorema I a pag. 219.
[8]) [M 1], 3.4 a pag. 44.
[9]) [DG 2], n. 4, a pag. 102-103.
[10]) [M 2], 3.7 a pag. 639.

Posto: *diametro supporto* $T = 2t$, sia $x \in$ *supporto* T e ϱ un numero positivo minore di t. Adottando le definizioni e il simbolismo di [F 3], posto $f(x^1, x^2) = [(x^1)^2 + (x^2)^2]^{1/2}$, indichiamo con $\langle T, f, \varrho \rangle$ la corrente di $E_0(R^2)$, sezione della corrente T con la curva $f(x^1, x^2) = \varrho$. La corrente $\langle T, f, \varrho \rangle$ esiste [11]) per quasi ogni $\varrho < t$ e, per tali ϱ, ha luogo l'uguaglianza [12]):

$$\langle T, f, \varrho \rangle = (\partial T) \cap I_\varrho(x) - \partial(T \cap I_\varrho(x)) \tag{2.3}$$

Il primo addendo nel secondo membro della (2.3) è nullo per ipotesi; se per un valore di ϱ per cui vale la (2.3) la corrente $\langle T, f, \varrho \rangle$ fosse nulla, si avrebbe:

$$\partial(T \cap I_\varrho(x)) = 0$$

ed anche:

$$\partial(T \cap (R^2 - I_\varrho(x))) = 0$$

Posto:

$$T_1 = T \cap I_\varrho(x) \ , \qquad T_2 = T \cap (R^2 - I_\varrho(x)) \ ,$$

si avrebbe

$$T = T_1 + T_2 \ , \qquad M(T) = M(T_1) + M(T_2) \ ,$$

con T_1 e T_2 correnti non nulle, chiuse e intere e la T risulterebbe riducibile. Pertanto per quasi ogni $\varrho < t$ la corrente $\langle T, f, \varrho \rangle$ è non nulla.

Dimostriamo che per quasi ogni $\varrho < t$ è:

$$M(\langle T, f, \varrho \rangle) \geqslant 2 \tag{2.4}$$

La corrente $\langle T, f, \varrho \rangle$ è, per quasi ogni ϱ, non nulla, intera [13]), di dimensione zero e pertanto si rappresenta nel modo seguente: esistono i punti $P_1, \ldots, P_N$, con $N \geqslant 1$ e i numeri interi $\theta_1, \ldots, \theta_N$, tali che, indicata con δ_P la corrente così definita:

$$\delta_P(\varphi) = \varphi(P) \qquad\qquad \varphi \in E^0(R^2)$$

si ha:

$$\langle T, f, \varrho \rangle = \sum_i \theta_i \delta_{P_i}$$

$$M(\langle T, f, \varrho \rangle) = \sum_i |\theta_i| \tag{2.5}$$

---

11) [F 3], 3.5 a pag. 49.
12) [F 3], 3.6 (7) a pag. 51.
13) [F 3], 3.12 a pag. 54.
14) [F F], 8.16 a pag. 500.

Ma per la (2.3) la corrente $\langle T, f, \varrho \rangle$ è, a meno del segno, bordo della corrente $T \cap I_\varrho(x)$ e si verifica subito che è

$$\sum_i \theta_i = 0$$

Dalla (2.5) segue allora la (2.4) e da questa si deduce:

$$\int_0^\varrho M(\langle T, f, r \rangle) dr \geqslant 2\varrho$$

Infine, per le relazioni [15])

$$\int_0^\varrho M(\langle T, f, r \rangle) dr \leqslant M(T \cap I_\varrho(x)) = \| T \| (I_\varrho(x))$$

si ha:

$$\| T \| (I_\varrho(x)) \geqslant 2\varrho$$

e da questa disuguaglianza segue quanto asserito.

COROLLARIO 2.7: *Nelle ipotesi del lemma* 2.6, *si ha*:

$$H^1(\mathcal{F}E) = H^1(\mathcal{F}^*E) \tag{2.6}$$

Per il lemma 2.6 e l'uguaglianza (1.2) si ha, per ogni $x \in \mathcal{F}E$:

$$\theta^{*1}(H^1, \ \mathcal{F}^*E, \ x) > 0$$

mentre in H^1-quasi tutti i punti di $R^2 - \mathcal{F}^*E$ si ha [16]):

$$\theta^1(H^1, \ \mathcal{F}^*E, \ x) = 0$$

e pertanto ha luogo la (2.6).

COROLLARIO 2.8: *Sia* $T \in Z_1(R^2)$ *una corrente irriducibile. Esiste un insieme aperto, limitato, di perimetro finito, tale che* $T = \pm \partial E$, *supporto* $T = \mathcal{F}E = \mathcal{F}_e E$.

Infatti per la (2.6) è: $\mathrm{mis}_2 \mathcal{F}E = 0$ e, poichè gli insiemi piani che differiscono per insiemi di misura mis_2 nulla si identificano con la stessa

---

[15]) [F 3], 3.6, (4) e (5) a pag. 50.
[16]) [F 1], teorema 3.2 a pag. 128.

corrente, si può, nelle proposizioni precedenti, prendere in considerazione l'insieme dei punti interni a E.

3. Insiemi di perimetro finito.

Per proseguire lo studio delle correnti irriducibili, dobbiamo approfondire talune proprietà degli insiemi di perimetro finito, non necessariamente limitati.

LEMMA 3.1: *Sia $G \subset R^2$ un insieme aperto, connesso e di perimetro finito e siano y e z due punti di G; detta $d(x, y)$ la loro distanza, risulta:*

$$P(G) \geqslant 2d(y, z) \tag{3.1}$$

Sia $\{\pi_n\}$ una successione di domini poligonali verificanti le relazioni [17])

$$\lim_{n \to \infty} P(\pi_n) = P(G) \tag{3.2}$$

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{mis}_2 \, [(\pi_n - G) \cup (G - \pi_n)] = 0 \tag{3.3}$$

Sia D_n l'insieme dei punti t del segmento di estremi y e z tali che le rette perpendicolari alla retta yz e passanti per t non incontrino π_n; sia δ la distanza tra $\mathcal{F}G$ e una poligonale contenuta in G e congiungente y con z. Si ha subito:

$$2\delta \, \mathrm{mis}_1 \, D_n < \mathrm{mis}_2 \, [(\pi_n - G) \cup (G - \pi_n)]$$

e perciò $\mathrm{mis}_1 \, D_n$ tende a zero per la (3.3); dalla ovvia disuguaglianza:

$$P(\pi_n) \geqslant 2d(y, z) - 2 \, \mathrm{mis}_1 \, D_n$$

e dalle (3.2), (3.3), segue la (3.1).

COROLLARIO 3.2: *Se G è aperto e connesso e $P(G) < \infty$, G è limitato.*

LEMMA 3.3: *Sia G aperto, connesso e di perimetro finito; se per $x \in \mathcal{F}G$ si ha $\theta^{*2}(\mathrm{mis}_2, G, x) < 1$, si ha pure: $\theta^{*1}(H^1, \mathcal{F}^*G, x) > 0$.*

Supponiamo dapprima che sia: $\theta^{*2}(\mathrm{mis}_2, G, x) = 0$ e, fissato $\sigma > 0$ determiniamo $\varrho' > 0$ tale che per ogni $\varrho < \varrho'$ si abbia

$$\mathrm{mis}_2 \, [G \cap I_\varrho(x)] < \pi\varrho^2\sigma \tag{3.4}$$

---

[17]) [DG 1], teorema VIII a pag. 207.

e tale che per ogni $\varrho < \varrho'$ l'intersezione $G \cap \mathcal{F}I_\varrho(x)$ non sia vuota. Tenendo conto del teorema del cambiamento delle variabili nell'integrale di Lebesgue, nonchè della formula che fornisce la misura H^1 di un insieme trasformato di un insieme lineare mediante una trasformazione lipschitziana [18]), la (3.4) diventa:

$$\int_0^\varrho H^1[G \cap \mathcal{F}I_r(x)]dr < \pi\varrho^2\sigma \tag{3.5}$$

Pertanto per ogni $\varrho < \varrho'$ esiste un insieme di numeri $r < \varrho$, avente misura mis_1 positiva, tale che:

$$H^1[G \cap \mathcal{F}I_r(x)] < 2\pi r\sigma \tag{3.6}$$

mentre, per quasi ogni r si ha [19]):

$$P(G \cap I_r) = H^1[\mathcal{F}^*G \cap I_r(x)] + H^1[G \cap \mathcal{F}I_r(x)] \tag{3.7}$$

Consideriamo la (3.1) scritta per la componente connessa dell'insieme $G \cap I_r$, alla quale appartenga un punto $z \in G \cap \mathcal{F}I_r$ e punti $y \in G$ distanti da x di tanto poco quanto si vuole; segue subito:

$$P(G \cap I_r) \geqslant 2r \tag{3.8}$$

Per un insieme di numeri r avente come punto di accumulazione lo zero valgono insieme le (3.6), (3.7) e (3.8); per tali valori di r si ha:

$$H^1(\mathcal{F}^*G \cap I_r(x)) \geqslant 2r - 2\pi r\sigma \tag{3.9}$$

e da questa segue:

$$\theta^{*1}(H^1, \mathcal{F}^*G, x) \geqslant 1 \ .$$

Sia ora:

$$0 < \theta^{*2}(\text{mis}_2, G, x) < 1$$

e teniamo conto che ha luogo, per ogni $\varrho > 0$ e ogni $x \in R^2$, una delle disuguaglianze isoperimetriche [20])

$$\text{mis}\,[G \cap I_\varrho(x)] \leqslant K[H^1(\mathcal{F}^*G \cap I_\varrho(x))]^2 \tag{3.10}$$

$$\text{mis}\,[(R^2 - G) \cap I_\varrho(x)] \leqslant K[H^1(\mathcal{F}^*G \cap I_\varrho(x))]^2 \tag{3.11}$$

---

[18]) [F 1], 5.9 a pag. 144.

[19]) [DG 2], lemma III a pag. 100.

[20]) [M 1], teorema 4.3 a pag. 50.

dove K è una costante indipendente da G e da ϱ. Se nel punto x vale la (3.10) si ha, indicando con K_1 una opportuna costante:

$$\theta^{*1}(H^1, \mathcal{F}^*G, x) \geqslant K_1[\theta^{*2}(\text{mis}_2, G, x)]^{1/2} > 0 \tag{3.12}$$

Se invece vale la (3.11) si ha:

$$\theta^{*1}(H^1, \mathcal{F}^*G, x) \geqslant K_1[1 - \theta^2_*(\text{mis}_2, G, x)] \geqslant$$
$$\geqslant K_1[1 - \theta^{*2}(\text{mis}_2, G, x)] > 0$$

Pertanto in ogni caso si ha:

$$\theta^{*1}(H^1, \mathcal{F}^*G, x) > 0 .$$

Corollario 3.4: *Sia G un insieme aperto, connesso e di perimetro finito; posto*:

$$D = \{x: \quad x \in \mathcal{F}G , \quad \theta^{*2}(\text{mis}_2, G, x) < 1\}$$

si ha:

$$H^1(D) = H^1(\mathcal{F}^*G) \tag{3.13}$$

Infatti per il teorema III di [DG 2], pag. 105, si ha per ogni $x \in \mathcal{F}^*G$:

$$\theta^2(\text{mis}_2, G, x) = \frac{1}{2}$$

e perciò è:

$$D \supset \mathcal{F}^*G .$$

D'altra parte si ha [21]):

$$\theta^1(H^1, \mathcal{F}^*E, x) = 0$$

in H^1-quasi tutti i punti di $R^2 - \mathcal{F}^*E$ e dal lemma 3.3 segue subito la (3.13).

Corollario 3.5: *Sia G un insieme aperto, connesso e di perimetro finito. Si ha*:

$$\text{mis}_2\, \mathcal{F}G = 0$$

---

[21]) [F 1], 3.2 a pag. 128.

L'insieme dei punti $x \in \mathcal{F}G$ nei quali è:

$$\theta^{*2}(\text{mis}_2,\ G,\ x) = 1$$

ha misura mis_2 nulla per il teorema di densità di Lebesgue. L'insieme degli altri punti di $\mathcal{F}G$ ha misura H^1 finita per la (3.13) e perciò misura mis_2 nulla.

COROLLARIO 3.6: *Sia G un insieme aperto di perimetro finito, connesso, con $R^2 - (G \cup \mathcal{F}G)$ connesso e con $\mathcal{F}_e G = \mathcal{F}G$; in queste ipotesi si ha:*

$$H^1(\mathcal{F}G) = H^1(\mathcal{F}^*G) = P(G)$$

L'insieme $R^2 - G$ ha la stessa frontiera ridotta e lo stesso perimetro di G e, essendo per il corollario 3.5: $\text{mis}_2\,\mathcal{F}G = 0$, l'insieme $R^2-(G \cup \mathcal{F}G)$ ha la stessa frontiera e la stessa frontiera ridotta di G. Tenuto conto che nei punti in cui è $\theta^{*2}(\text{mis}_2,\ G,\ x) = 1$ si ha:

$$\theta^{*2}(\text{mis}_2,\ R^2 - (G \cup \mathcal{F}G),\ x) = 0\ ,$$

dal lemma 3.3 applicato all'insieme $R^2 - (G \cup \mathcal{F}G)$ e dal corollario 3.4 segue l'asserto.

LEMMA 3.7: *Sia G un insieme aperto di perimetro finito, tale che:*

$$H^1(\mathcal{F}G) = H^1(\mathcal{F}^*G) \tag{3.14}$$

e siano A_1, A_2 due componenti connesse di G. In queste ipotesi i due insiemi A_1, A_2 hanno perimetro finito e si ha:

$$H^1(\mathcal{F}A_i) = H^1(\mathcal{F}^*A_i) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{3.15}$$

$$H^1(\mathcal{F}^*A_1 \cap \mathcal{F}^*A_2) = 0 \tag{3.16}$$

Gli insiemi A_i $(i = 1,\ 2)$ sono di perimetro finito perchè per la (3.14) si ha [22]:

$$P(A_i) \leqslant H^1(\mathcal{F}A_i) \leqslant H^1(\mathcal{F}G) < \infty \qquad (i = 1,\ 2)$$

Sempre per la (3.14) in H^1-quasi tutti i punti $x \in \mathcal{F}A_i \subset \mathcal{F}G$ si ha [23]:

$$\theta^{*2}(\text{mis}_2,\ A_i,\ x) \leqslant \theta^2(\text{mis}_2,\ G,\ x) = \frac{1}{2} \qquad (i = 1,\ 2)$$

[22] [F 2].
[23] [DG 2], teorema III a pag. 105.

e per il corollario 3.4 segue la (3.15).

Se fosse:

$$H^1(\mathcal{F}^*A_1 \cap \mathcal{F}^*A_2) > 0$$

esisterebbe un punto $x \in \mathcal{F}^*A_1 \cap \mathcal{F}^*A_2 \cap \mathcal{F}^*G$ e in tale punto la 2-densità rispetto a mis_2 dei tre insiemi in questione dovrebbe [24]) essere 1/2 e ciò è impossibile.

4. Correnti irriducibili e insiemi connessi.

LEMMA 4.1: *Sia $T \in Z_1(R^2)$ una corrente irriducibile; esiste un insieme E, aperto e connesso, tale che: $T = \pm \partial E$.*

Sia $\{A_i\}$ la successione, eventualmente finita, delle componenti connesse dell'insieme E, la cui esistenza è stata provata nel teorema 2.3. Dalla relazione:

$$\mathcal{F}E \supset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{F}A_i$$

e dalle prop. 2.8, 2.7 e 3.7 segue:

$$H^1(\mathcal{F}^*E) \geqslant \sum_i H^1(\mathcal{F}^*A_i) \tag{4.1}$$

Le correnti $T_i = \partial A_i$ appartengono a $Z_1(R^2)$ [25]) e dalle (4.1), (1.1) e (1.2) segue:

$$M(T) \geqslant \sum M(T_i) \tag{4.2}$$

e, valendo anche la disuguaglianza opposta alla (4.2), la corrente T sa rebbe riducibile se più di un insieme A_i fosse non vuoto.

LEMMA 4.2: *Nelle stesse ipotesi del lemma* 4.1 *l'insieme $R^2 - (E \cup \mathcal{F}E)$ è connesso.*

Per il corollario 3.5 gli insiemi E e $R^2 - (E \cup \mathcal{F}E)$ hanno, oltre alla stessa frontiera, lo stesso perimetro e la stessa frontiera ridotta di E. Si può ripetere la dimostrazione del precedente lemma 4.1, sostituendo a E l'insieme $R^2 - E$.

LEMMA 4.3: *Nelle ipotesi del lemma* 4.1, *l'insieme E si può considerare semplicemente connesso.*

---

[24]) Loc. cit. [23]).

[25]) [F F], 8.14 a pag. 499.

I punti interni ad ogni poligonale chiusa e semplice, costituita da punti di E e non appartenenti ad E, appartengono a $\mathcal{F}E - \mathcal{F}_e E$ e tale insieme, per l'osservazione 2.4, si può considerare vuoto.

TEOREMA 4.4: *Sia $T \in Z_1(R^2)$ una corrente irriducibile; esiste un insieme E aperto, limitato, di perimetro finito, semplicemente connesso, con $R^2 - (E \cup \mathcal{F}E)$ connesso, tale che $T = \partial E$ oppure $T = -\partial E$ e:*

$$H^1(\mathcal{F}E) = P(E)$$

Il teorema segue dalle proposizioni 2.3, 2.8, 4.1, 4.2, 4.3 e 2.7.

TEOREMA 4.5: *Sia $T \in Z_1(R^2)$; esiste una successione $\{E_i\}$, eventualmente finita, di insiemi E_i aperti, limitati, di perimetro finito, semplicemente connessi, con $R^2 - (E_i \cup \mathcal{F}E_i)$ connessi, tali che:*

$$T = \sum_{i=1}^{\infty} \pm \partial E_i$$

(dove i segni $\pm$ sono da scegliere in modo opportuno) e tali che:

$$M(T) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

Il teorema segue dai teoremi 2.2 e 4.4.

BIBLIOGRAFIA

[C] CHIFFI A.: *Correnti irriducibili*. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa vol. 21 (1966).

[DG 1] DE GIORGI E.: *Su una teoria generale della misura $(r-1)$-dimensionale in uno spazio a r dimensioni*. Annali di Matematica, vol. 36 (1954), pp. 191-213.

[DG 2] DE GIORGI E.: *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio a r dimensioni*. Ricerche di Matematica, vol. 4 (1955), pp. 95-113.

[F 1] FEDERER H.: *The (Φ, k) rectifiable subsets of n space*, Trans. Am. Math. Soc., vol. 62 (1947), pp. 114-192.

[F 2] FEDERER H.: *A note on the Gauss-Green theorem*. Proc. Am. Math. Soc., vol. 9 (1958), pp. 447-451.

[F 3] FEDERER H.: *Some theorems on integral currents*. Trans. Am. Math. Soc., vol. 117 (1965), pp. 43-67.

[F F] FEDERER H. and FLEMING W.: *Normal and integral currents*. Annals of Mathematics, vol. 72 (1960), pp. 458-520.

[F R] Fleming W. and Rishel R.: *An integral formula for total gradient variation*. Archiv der Mathematik, vol. 11 (1960), pp. 218-222.

[M 1] Miranda M.: *Distribuzioni aventi derivate misure. Insiemi di perimetro localmente finito*. Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 18 (1964), pp. 27-56.

[M 2] Miranda M.: *Sul minimo dell'integrale del gradiente di una funzione*. Annali Scuola Normale Superiore di Pisa, vol. 19 (1965), pp. 627-665.

Manoscritto pervenuto in redazione il 16 giugno 1966.