

RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

EDMONDO MORGANTINI

Su alcune questioni di assonometria

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 37 (1967), p. 214-229

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__214_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1967, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques*
<http://www.numdam.org/>

SU ALCUNE QUESTIONI DI ASSONOMETRIA

di EDMONDO MORGANTINI (a Padova) *)

Premessa.

Questo lavoro è nato da una semplice osservazione (Teor. 1.1), fatta durante lo svolgimento delle esercitazioni di un corso di Geometria descrittiva con disegno, e dal desiderio di vedere se e fino a che punto il Teor. 1.1. si potesse invertire.

Tale inversione è espressa dal Teor. 2.1. Esso afferma che, riportate sul quadro π (le trasformate affini di) due proiezioni parallele $F_1(P_1)$, $F_2(P_2)$ di una stessa figura $F(P)$ dello spazio e scelte su π due direzioni distinte M_1 , M_2 , la figura $F_3(P_3)$ luogo dei punti P_3 intersezione delle coppie di rette M_1P_1 , M_2P_2 risulta in generale simile ad una terza proiezione parallela della stessa figura F , fatta da un centro determinato su di un piano, di giacitura pure determinata.

Così ad es., disposte opportunamente sul quadro le due proiezioni mongiane (« pianta » F_1 ed « alzata » F_2) di una figura F , si possono scegliere M_1 ed M_2 in modo da ottenere direttamente (v. n. 3) la 3^a proiezione F' di F (nella fattispecie, una sua prospettiva assonometrica ortogonale) su di un piano di giacitura assegnata. Tale costruzione è altrettanto semplice di quella che permette, a partire da F_1 ed F_2 , di ottenere la proiezione di profilo F_3 di F .

Nel n. 4 si chiarisce il significato proiettivo (espresso dal Teor. 4.1) delle precedenti considerazioni affini e metriche, estendendo così ulteriormente la validità della costruzione usata nel Teor. 2.1.

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Via S. Bellino 4, Padova.

La Osservazione I del n. 5 fa vedere perchè la costruzione suddetta non possa usarsi per la « restituzione prospettica », cioè per la costruzione diretta di una proiezione parallela della F , a partire da due sue proiezioni centrali.

Infine la Osservazione II dello stesso n. 5 insegna come disporre sul quadro le trasformate omografiche di due prospettive centrali di una figura F , in modo da poter « leggere » agevolmente (come misure di segmenti orientati e con la stessa tecnica usata nell'assonometria parallela) le coordinate proiettive non omogenee dei punti della F , rispetto ad un riferimento del quale due punti fondamentali sono i centri delle due proiezioni date.

1. Relazioni tra assonometria ortogonale e ribaltamenti dei piani coordinati sul quadro.

È ben noto ¹⁾ che fra le proiezioni ortogonali ed i ribaltamenti su di un « quadro » π delle figure di un piano α intercorre una omologia affine ortogonale avente per asse la traccia di α sul quadro e per caratteristica il coseno dell'angolo descritto da α durante il suo ribaltamento.

Il quadro π sia quello di una prospettiva assonometrica ortogonale e, su di esso, mettiamo in evidenza la configurazione degli assi assonome-

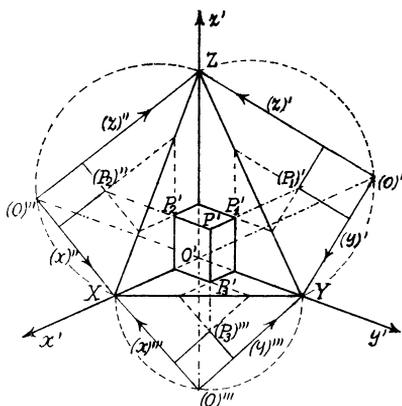


Fig. 1.1.

¹⁾ Cfr. ad es. A. COMESSATTI [3], p. 316; G. FANO [4], p. 103. I numeri tra parentesi quadra rinviano alla Bibliografia, posta alla fine del lavoro.

trici $x'y'z'$ ed un triangolo delle tracce XYZ (acutangolo, di cui quegli assi sono le altezze)²⁾. Si considerino inoltre le prospettive assonometriche P' , P'_1 , P'_2 , P'_3 di un generico punto P dello spazio e delle sue proiezioni ortogonali P_1 , P_2 , P_3 sui piani coordinati yz , zx , xy .

Ribaltiamo sul quadro, attorno alla sua traccia, uno dei piani coordinati, ad es. xy , e sia (P_3) il ribaltamento di P_3 (v. Fig. 1.1). Tanto la prospettiva del segmento P_3P (obbiettivamente parallelo all'asse z) quanto il segmento $P'_3(P_3)$ sono perpendicolari alla traccia XY , cosicchè i tre punti (P_3) , P'_3 , P' sono allineati e la retta loro congiungente è parallela all'asse assonometrico z' . Si può anche dire (v. Fig. 1.1):

TEOREMA 1.1: *La prospettiva assonometrica P' di un punto P si può ottenere come intersezione (di due) delle tre rette parallele ai rispettivi assi assonometrici condotte dai ribaltamenti (P_1) , (P_2) , (P_3) delle sue piante prospettiche, fatti rispettivamente attorno alle tracce YZ , ZX , XY .*

2. Costruzione diretta di una terza prospettiva parallela di una figura dello spazio, a partire da due altre sue prospettive parallele.

Supponiamo viceversa che siano date le proiezioni parallele F'_1 , F'_2 , su due piani propri π_1 e π_2 da due punti impropri S_1 ed S_2 , di una medesima figura F dello spazio. Supponiamo che la posizione della figura F e quella — nota — dei piani e dei centri di proiezione siano tali che non solo F individui F_1 ed F_2 , ma che viceversa F_1 ed F_2 individuino F . Tale è ad es. il caso quando S_1 ed S_2 sono distinti e non appartenenti a π_1 o rispettivamente a π_2 (che possono anche coincidere) ed i punti che determinano la figura F sono propri, e quindi non appartengono alla retta (impropria) S_1S_2 .

Assoggettando ciascuno dei due piani π_1 e π_2 ad un movimento rigido (come nell'esempio precedente; o più in generale ad una affinità, giacchè anche in tale ipotesi le considerazioni seguenti seguitano a sussistere), portiamoli a sovrapporsi ad un medesimo piano π (il « quadro »). Sicchè F_1 ed F_2 possono pensarsi come figure del quadro.

Sia P un punto proprio della figura F e siano $P_1 \in F_1$, $P_2 \in F_2$ le sue due proiezioni.

²⁾ Cfr. ad es. A. COMESSATI [3], p. 349.

Fissiamo sul quadro due punti impropri distinti M_1 ed M_2 : le due rette proiettanti M_1P_1 ed M_2P_2 sono proprie ed hanno direzioni distinte, cosicchè si intersecano in un punto P_3 del quadro π . Alla figura F resta così associata (oltre alle due proiezioni F_1 ed F_2) una terza « immagine » F_3 , costruita direttamente a partire da F_1 ed F_2 .

Vogliamo vedere se la F_3 si può pensare (congruente o simile ad) una terza proiezione della F , fatta da un centro S_3 su di un piano π_3 .

È chiaro che, in caso affermativo, il centro di proiezione S_3 risulterà improprio, ossia anche F_3 sarà una proiezione parallela di F . Infatti P_3 è improprio solo se sono impropri P_1 , P_2 e quindi anche P . Dunque, eventualmente, i raggi proiettanti i punti impropri di F sono impropri, ossia anche S_3 è improprio.

D'altra parte i punti P di F che hanno la stessa 3ª immagine P_3 sono quelli che hanno la 1ª proiezione P_1 sulla retta $r_1 = M_1P_3$ e la 2ª proiezione P_2 sulla retta $r_2 = M_2P_3$. Si tratta dunque di punti di una medesima retta $r = (r_1, r_2)$, passante per il punto P , giacchè $P_1 \in r_1$, $P_2 \in r_2$.

Si noti che tutte queste rette « proiettanti » r sono parallele, passando per lo stesso punto improprio $S_3 = (M_1, M_2)$: quello di tutte le rette aventi le direzioni della 1ª e della 2ª proiezione coincidenti rispettivamente con M_1 e con M_2 . Ovviamente tale conclusione sussiste solo se (obiettivamente) le rette proiettanti S_1M_1 ed S_2M_2 sono distinte, ossia se M_1 (su π_1) ed M_2 (su π_2) non coincidono entrambi con i « punti nodali »³⁾ dei piani π_1 e π_2 , ossia con le intersezioni di π_1 e π_2 con la retta impropria S_1S_2 .

È chiaro inoltre che, scegliendo opportunamente M_1 ed M_2 , si può far in modo che S_3 coincida con un punto improprio prefissato.

Per concludere che F_3 si può ottenere proiettando F da S_3 e riferendo poi omograficamente la stella S_3 al quadro $\pi = \pi_3$, poichè si lavora nel campo reale, basterà osservare che punti allineati P, Q, R dello spazio hanno allineate le loro immagini. P_3, Q_3, R_3 . Infatti la corrispondenza fra la 1ª e la 2ª proiezione dei punti della retta $g = PQR$ è una similitudine, che induce una prospettività fra i due fasci di rette che li proiettano rispettivamente da M_1 e da M_2 , perchè la retta impropria, comune ai due fasci, risulta unita. Sicchè P_3, Q_3, R_3 (in quanto intersezione di tre coppie di rette corrispondenti) appartengono all'asse g_3 di quella prospettività, ossia sono allineati, c.v.d.

³⁾ Secondo la denominazione di G. HAUCK; cfr. A. COMESSATTI [3], p. 373.

Ci si può chiedere se si possa e, (in caso affermativo) come si debba disporre ⁴⁾ π_3 rispetto ad S_3 per far sì che la suddetta omografia $\Omega : S_3 \rightarrow \pi_3$ divenga una prospettività.

Intanto si osservi che, sebbene la costruzione della Ω non sia definita per i punti impropri di π_3 , tuttavia si sa che al piano improprio (pensato come piano della stella S_3) corrisponde la retta impropria di π_3 .

Dopo di chè basta mettere in evidenza un triangolo $A_3B_3C_3$ con i vertici propri di π_3 ed il prisma corrispondente $a'b'c'$ della stella impropria S_3 . Si tratta allora di vedere se è possibile disporre π_3 in modo che i tre spigoli del prisma passino per i vertici corrispondenti del triangolo.

Se la 3^a immagine F_3 di F si pensa definita a meno di una similitudine (e ciò equivale a supporre indeterminata la « scala » della rappresentazione), è chiaro che il problema si riduce a quello ben noto di determinare la giacitura dei piani che segano un prisma triangolare dato $a'b'c'$ secondo un triangolo $A'B'C'$ simile ad un triangolo dato; ossia a quello di determinare la giacitura dei piani seganti tre piani dati di un fascio (paralleli alle facce del prisma precedente) secondo una terna di rette congruente ad una terna data ⁵⁾.

Tale problema ha com'è noto ⁶⁾ in generale due soluzioni (simmetriche rispetto alla direzione di S_3), che possono anche coincidere. Solo allora la 3^a proiezione è ortogonale: perciò occorre e basta che il triangolo $A_3B_3C_3$ sia simile ad una sezione *normale* del prisma $a'b'c'$.

Concludendo si può enunciare il seguente

TEOREMA 2.1: *Riportate su un quadro π (le trasformate affini di) due proiezioni piane $F_1(P_1)$, $F_2(P_2)$, di una medesima figura $F(P)$ dello spazio, fatte da punti impropri distinti, e scelte su π due direzioni distinte M_1 , M_2 , la figura $F_3(P_3)$, luogo dei punti di intersezione P_3 delle coppie di rette M_1P_1 , M_2P_2 , risulta simile ad una terza proiezione parallela della stessa figura F .*

La direzione del centro e la giacitura del piano della 3^a proiezione restano determinati, assieme alla scala di riduzione, dal modo nel quale sul quadro π si sono scelte le direzioni M_1 , M_2 e si sono riportate le prime due proiezioni F_1 , F_2 .

⁴⁾ Ad es. distaccandolo dal quadro π ed assoggettandolo ad un movimento rigido.

⁵⁾ A tali problemi H. A. SCHWARZ (1863) e TH. REYE (1866) ridussero la dimostrazione del teorema di K. POHLKE (1853); cfr. A. COMESSATTI [3], p. 348.

⁶⁾ Cfr. ad es. G. FANO [4], p. 204.

Si osservi che se, senza pretendere che la 3^a proiezione sia ortogonale, si richiede che una delle due possibili giaciture del piano π_3 della 3^a proiezione sia quella del piano di un triangolo dato della figura F , basterà disporre F_1 ed F_2 e scegliere i punti impropri M_1 ed M_2 in modo che il triangolo $A_3B_3C_3$ risulti simile (od addirittura congruente) a quello obbiettivo ABC .

Se poi si pretende che la 3^a proiezione sia ortogonale, bisognerà contemporaneamente far in modo che le direzioni M_1 ed M_2 siano quelle rispettive della 1^a e della 2^a proiezione di una retta normale al piano ABC .

3. Passaggio diretto da una rappresentazione mongiana ad una prospettiva assonometrica ortogonale, assegnata la giacitura del quadro dell'assonometria.

In pratica, ed a titolo d'esempio, può interessare il caso in cui sul quadro sia data una rappresentazione mongiana (F_1, F_2) della figura F , ossia che di F si conoscano la « pianta » F_1 ed il « prospetto » F_2 e che di F si voglia costruire direttamente sullo stesso quadro una prospettiva assonometrica ortogonale F' , assegnando la direzione dei raggi proiettanti, ossia la giacitura obbiettiva (ortogonale a quella direzione) del quadro dell'assonometria.

Si noti che si sono lievemente cambiate le notazioni, avendo sostituito un apice all'indice 3 usato nel numero precedente.

Per semplicità possiamo supporre che la figura F si riduca al tetraedro $OPQR$ avente un vertice nell'origine O del sistema cartesiano xyz di riferimento e gli altri tre nelle « tracce » P, Q, R degli assi su di un piano parallelo al quadro dell'assonometria.

I piani fondamentali π_1 e π_2 del metodo di Monge siano paralleli a quelli cartesiani yz e zx . Sul quadro non sia segnata la linea di terra, ma ne sia assegnata solo la direzione (v. Figg. 3.1, 3.2).

Converrà tener presente che — per quanto precede e per la nota condizione di perpendicolarità retta-piano in proiezioni ortogonali — le direzioni M_1 ed M_2 risultano determinate, dovendo essere quelle rispettivamente perpendicolari alla Q_1R_1 ed alla R_2P_2 , ossia perpendicolari alle direzioni rispettive della 1^a e della 2^a traccia mongiana del quadro dell'assonometria, e dunque del piano PQR .

D'altra parte — e sempre per quanto precede —, volendo che il quadro dell'assonometria (ossia il quadro della 3^a proiezione, secondo le notazioni

del n. 2) risulti parallelo a quello PQR e che la scala di riduzione sia quella stessa della rappresentazione mongiana, si dovranno disporre sul foglio del disegno le due proiezioni $F_1 = O_1P_1Q_1R_1$ ed $F_2 = O_2P_2Q_2R_2$ della figura F in modo che nella F' il triangolo $P'Q'R'$ risulti simile a quello obbiettivo (ed acutangolo) PQR e sia $Q'R' = Q_1R_1$, $R'P' = R_2P_2$.

Ma Q_1R_1 ed R_2P_2 sono proiezioni ortogonali (nelle direzioni M_1 ed M_2) rispettivamente di $Q'R'$ ed $R'P'$. Dunque i segmenti $Q'R'$ ed $R'P'$ dovranno essere (paralleli, e perciò addirittura) equipollenti a quelli Q_1R_1 ed R_2P_2 . In altre parole: *si devono disporre la F_1 e la F_2 sul quadro in modo che l'angolo convesso delle due rette orientate R_1Q_1 ed R_2P_2 sia acuto ed uguale a quello obbiettivo \widehat{QRP} .*

Si noti che questo in sostanza è quello che era suggerito dal Teor. 1.1 e dalla Fig. 1.1.

Supponiamo per semplicità che la scala della rappresentazione mongiana sia quella « naturale » 1 : 1. Converterà anzitutto procurarsi un triangolo $P^*Q^*R^*$ uguale a quello obbiettivo PQR . Nelle Figg. 3.1, 3.2 lo si è ottenuto con un ribaltamento sul 1° piano di proiezione yz , attorno ad RQ . Per la costruzione della prospettiva assonometrica $F' = O'P'Q'R'$ si può così sfruttare direttamente la 1ª proiezione F_1 .

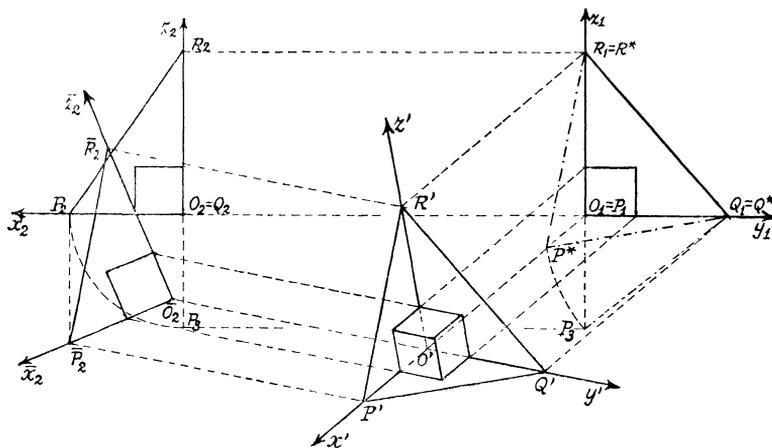


Fig. 3.1.

Alla 2ª proiezione F_2 occorre invece sostituire una figura \overline{F}_2 congruente ad F_2 e tale che il segmento orientato $\overline{P}_2\overline{R}_2$ risulti equipollente a quello P^*R^* .

Nella Fig. 3.2 la \bar{F}_2 si è ottenuta con una rotazione attorno ad R_2 ; nella Fig. 3.1 con una rotazione attorno a P_2 ed una successiva traslazione, per evitare che la F' si sovrapponesse ad F_1 .

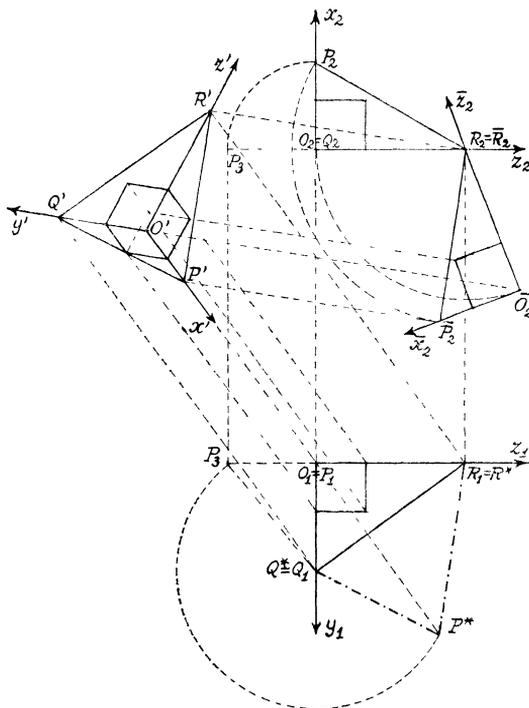


Fig. 3.2.

Si noti che i due modi possibili del ribaltamento $P^*Q^*R^*$ del triangolo PQR conducono rispettivamente ad una prospettiva *dall'alto* (Fig. 3.1), oppure *dal basso* (Fig. 3.2).

Per rendere più espressive le Figg. 3.1, 3.2, vi si è messa in evidenza anche la prospettiva di un « cubo di paragone », che si può pensare sia quello con le facce parallele ai piani coordinati ed avente come vertici opposti O ed il punto unità del sistema cartesiano di riferimento.

Si noti anche che, come caso limite, la costruzione precedente coincide con quella ben nota che consente il passaggio alla 3^a proiezione F_3 di profilo della figura data $F = (F_1, F_2)$.

4. Generalizzazione proiettiva delle precedenti considerazioni affini e metriche.

Le considerazioni precedenti traggono la loro utilità pratica dal loro aspetto affine e metrico. Tuttavia non è privo di interesse (anche perchè ne chiarisce il significato intrinseco) considerare il loro aspetto proiettivo, nello spazio proiettivo reale tridimensionale R_3 .

Ivi si considerino tre piani « di proiezione » π_1, π_2, π_3 , in generale distinti e non appartenenti allo stesso fascio, e tre « centri di proiezione », ossia tre punti S_1, S_2, S_3 , pure distinti, non appartenenti (in generale) ad una stessa retta, nè ai piani di proiezione.

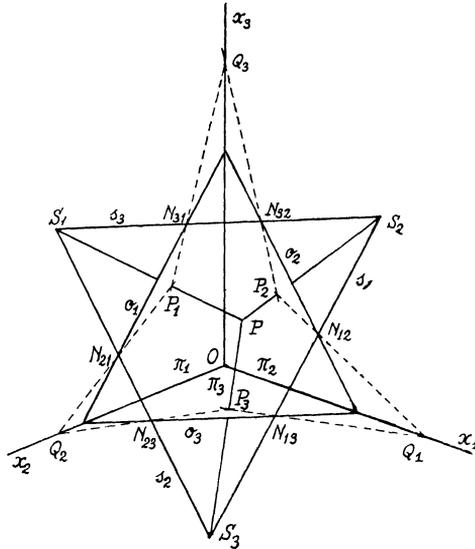


Fig. 4.1.

Ha luogo allora (v. Fig. 4.1) la considerazione delle tre rette $x_1 = \pi_2 \cdot \pi_3$, $x_2 = \pi_3 \cdot \pi_1$, $x_3 = \pi_1 \cdot \pi_2$, concorrenti nel punto $O = \pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \pi_3$, del piano $\Omega = S_1 S_2 S_3$ e, su di esso, delle tre rette $o_1 = \Omega \cdot \pi_1$, $o_2 = \Omega \cdot \pi_2$, $o_3 = \Omega \cdot \pi_3$ e delle altre tre $s_1 = S_2 S_3$, $s_2 = S_3 S_1$, $s_3 = S_1 S_2$. « Punti nodali » sono i sei punti $N_{12} = s_1 \cdot o_2$, $N_{13} = s_1 \cdot o_3$; $N_{23} = s_2 \cdot o_3$, $N_{21} = s_2 \cdot o_1$; $N_{31} = s_3 \cdot o_1$, $N_{32} = s_3 \cdot o_2$.

Un punto generico P dello spazio determina le sue tre proiezioni P_1, P_2, P_3 dai centri S_1, S_2, S_3 sui rispettivi piani π_1, π_2, π_3 . Al variare di P , le terne $P_1P_2P_3$ descrivono una corrispondenza « trilineare concorrente » T (di G. Hauck ⁷⁾) fra i tre piani π_1, π_2, π_3 , la cui considerazione interessa in alcune questioni di fotogrammetria.

Si noti che la condizione necessaria e sufficiente affinché due punti P_i, P_k dei piani di proiezione π_i, π_k possano pensarsi come proiezioni di un punto P dello spazio (da essi determinato, se $P_i \neq N_{ri}$ o $P_k \neq N_{rk}$) è che le due rette « di richiamo » $N_{ri}P_i, N_{rk}P_k$ si intersechino sull'asse x_r ($r \neq i \neq k \neq r = 1, 2, 3$). Acquistano così particolare interesse le tre « prospettività fondamentali » K_r ($r = 1, 2, 3$), intercorrenti fra le tre coppie di fasci nodali $(N_{ri}), (N_{rk})$ e di asse x_r .

Ciascuno dei tre piani di proiezione π_1, π_2, π_3 si può riferire omograficamente ad un medesimo « quadro » π , sul quale si ottiene una corrispondenza trilineare T' , insieme delle terne P_1^1, P_2^2, P_3^3 dei punti corrispondenti a quelli di una terna $P_1P_2P_3$ della T , rispettivamente nelle tre omografie H_1, H_2, H_3 .

Il riferimento può farsi in modo che le immagini K'_1, K'_2, K'_3 delle tre prospettività fondamentali K_1, K_2, K_3 siano ancora prospettività, ad esempio scegliendo le omografie H_i ($i = 1, 2, 3$) in modo che in ciascuna di esse alla retta o_i corrisponda sempre la stessa retta o' del quadro π (v. Fig. 4.2).

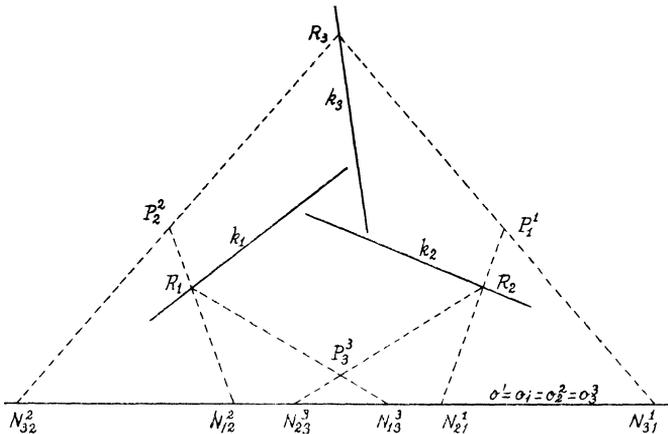


Fig. 4.2.

⁷⁾ Cfr. ad es. gli articoli citati in [6].

L'omografia H_1 trasforma N_{21} in un punto N_{21}^1 di $o' = o_1^1$ distinto da N_{31}^1 .

L'omografia H_2 trasforma N_{12} in un punto N_{12}^2 di $o' = o_2^2$ distinto da N_{32}^2 .

L'omografia H_3 trasforma N_{23} ed N_{13} in due punti distinti N_{23}^3, N_{13}^3 di $o' = o_3^3$.

Supponiamo che N_{21}^1 ed N_{12}^2 siano due punti *distinti* di o' e fissiamo l'attenzione sulle prospettività:

$$K'_2 = \bar{H}_3 \cdot K_2 \cdot \bar{H}_1^{-1}, \quad K'_1 = \bar{H}_3 \cdot K_1 \cdot \bar{H}_2^{-1},$$

immagini sul quadro delle due prospettività fondamentali K_2 e K_1 , ed in ciascuna delle quali la retta o' è unita. La sopralineatura sta ad indicare le restrizioni delle omografie H_i ai fasci aventi per centri i punti nodali che interessano.

Pensiamo ora il quadro π come il piano π_3^3 , trasformato di π_3 mediante H_3 . Vi è una ed una sola omografia H di π_3^3 in sè, avente unita la retta o' , che trasforma N_{23}^3 in N_{21}^1 , N_{13}^3 in N_{12}^2 e subordina tra i fasci di rette, aventi come centri queste due coppie di punti corrispondenti, le prospettività $(K'_2)^{-1}, (K'_1)^{-1}$.

Sicchè, se alla omografia H_3 si sostituisce la omografia $\bar{H} = H \cdot H_3$, la immagine sul quadro π della trilinearità T diviene tale che \bar{N}_{23}^3 coincide con N_{21}^1 , \bar{N}_{13}^3 coincide con N_{12}^2 e ciascuna delle prospettività fondamentali K_2, K_1 ha per immagine \bar{K}_2, \bar{K}_1 l'identità.

Si noti che N_{21}^1 ed N_{12}^2 sono, sul quadro π e sulla retta o' , le immagini della 1ª e della 2ª proiezione del punto S_3 .

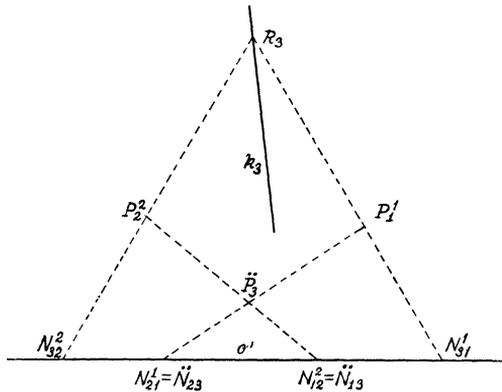


Fig. 4.3.

Inoltre, riportate sul quadro le immagini P_1^1 e P_2^2 delle prime due proiezioni (da S_1, S_2 su π_1, π_2) di un medesimo punto P non appartenente ad Ω , la immagine \ddot{P}_3 della sua 3^a proiezione si ottiene intersecando le due rette $N_{21}^1 P_1^1, N_{12}^2 P_2^2$.

L'aspetto proiettivo del Teorema 2.1 afferma che viceversa sussiste il seguente:

TEOREMA 4.1: *Fissati: un piano Ω per S_1, S_2 ; una retta o' sul quadro π ; due omografie H_1, H_2 trasformanti π_1, π_2 nel quadro π ed entrambe le rette $o_1 = \pi_1 \cdot \Omega, o_2 \cdot \Omega$ in o' ; due punti distinti $M_1 = N_{21}^1 \neq N_{31}^1, M_2 = N_{12}^2 \neq N_{32}^2$ della retta o' ;*

Chiamato \ddot{P}_3 l'intersezione delle due rette $M_1 P_1^1, M_2 P_2^2$.

Data una figura $F = (F_1, F_2)$, luogo di punti $P = (P_1, P_2)$:

l'insieme dei punti \ddot{P}_3 del quadro π , costruiti come detto sopra, a partire dalle immagini P_1^1, P_2^2 delle proiezioni P_1, P_2 dei punti P di F , può sempre pensarsi ottenuto trasformando con una omografia \ddot{H} (nella quale alla retta $o_3 = \Omega \cdot \pi_3$ corrisponde la retta o') la 3^a proiezione F_3 della F , fatta dal punto $S_3 = (N_{21}, N_{12})$ del piano Ω , su di un piano π_3 non passante per S_3 .

Dunque: l'insieme delle terne $P_1^1 P_2^2 \ddot{P}_3$ è una trilinearità, dello stesso tipo (di fronte alla trasformazione omografica dei piani sovrapposti π_1^1, π_2^2, π_3 nei tre piani distinti π_1, π_2, π_3) di quella « concorrente » di Hauck.

Inoltre si riconosce che: la posizione nello spazio del piano della 3^a proiezione π_3 (non passante per S_3) si può dare ad arbitrio, e la sua scelta determina l'omografia \ddot{H} .

Infatti, fissato π_3 , restano determinati su di esso la retta o_3 , i punti N_{23}, N_{13} e le prospettività K_2 e K_1 . Sicchè restano determinate anche le proiettività che la omografia \ddot{H} deve subordinare tra i due fasci $(M_1), N_{23}$ ed $(M_2), N_{13}$, ossia resta determinata la stessa \ddot{H} , c.v.d.

Viceversa, se si impone che la \ddot{H} debba possedere determinate proprietà, queste possono determinare la posizione di π_3 rispetto agli altri dati del Teor. 4.1. Così, nell'aspetto affine della questione (Teor. 2.1) Ω era il piano improprio e si poneva la condizione (di carattere metrico) che la \ddot{H} fosse una similitudine. Abbiamo appunto visto come questa condizione determinasse la posizione di π_3 .

5. Osservazioni.

I) Ci si può chiedere se la costruzione illustrata dalla Fig. 4.3 consenta, anche a partire da due proiezioni $F_1(P_1), F_2(P_2)$ di una figura $F(P)$, fatte da centri propri, di costruire direttamente sul quadro la tra-

sformata affine $\ddot{F}_3(\ddot{P}_3)$ di una proiezione *parallela* $F_3(P_3)$ della F , fatta da un centro S_3 distinto dal punto improprio della retta S_1S_2 .

Perciò scegliamo intanto (v. Fig. 4.1) il punto improprio S_3 (non allineato con S_1 ed S_2), ossia i suoi due punti di fuga $S_{31} = N_{21}$ ed $S_{32} = N_{12}$, distinti rispettivamente da $S_{21} = N_{31}$ ed $S_{12} = N_{32}$. Si dovranno poi riportare sul quadro π la F_1 e la F_2 , in modo che i due punti distinti S_{21}^1 ed S_{31}^1 siano allineati con gli altri due S_{21}^2 ed S_{32}^2 , distinti fra loro e dai precedenti (v. Fig. 4.3).

Comunque sia fissato π_3 , la costruzione della Fig. 43 permette allora di costruire una trasformata omografica \ddot{F}_3 della proiezione F_3 di F da S_3 su π_3 , e l'omografia \ddot{H} resta determinata. In particolare resta determinata quella retta q di π_3 che ha per immagine \ddot{q}_3 la retta impropria del quadro π .

Nello spazio le rette q siffatte sono tutte e sole quelle del piano χ proiettante in 3^a proiezione, avente per immagine (nella omografia indotta dalla costruzione tra la stella di centro S_3 ed il quadro) la retta impropria di π . Sicchè, se π_3 non è parallelo a questo piano, ossia se π_3 non contiene S_3 , come si deve necessariamente supporre, la omografia \ddot{H} non può *mai* essere una affinità.

In altre parole è *negativa* la risposta alla questione proposta ^{a)}.

II) Immaginiamo fissati nello spazio un punto $O = S_4$ non appartenente al piano $\Omega = S_1S_2S_3$ ed un punto U non appartenente ad alcuna delle facce del tetraedro $S_1S_2S_3S_4$. Si può assumere questo tetraedro come fondamentale di un sistema di coordinate proiettive, del quale sia U il punto unità.

La proiezione $F_i(P_i)$ di una figura $F(P)$ dello spazio, fatta da S_i sul piano di proiezione π_i , è omografica alla proiezione della stessa figura, fatta dallo stesso centro S_i sulla faccia opposta della piramide fondamentale. Tale omografia risulta determinata da 4 coppie di punti corrispondenti, purchè in posizione « generale ». Ad es. la omografia fra π_1

^{a)} La risposta è *negativa* anche per la proiezione dal punto improprio della retta S_1S_2 . Infatti allora dovrebbe essere $N_{12}^2 = N_{32}^2 = \dot{N}_{13}$, $N_{21}^1 = N_{31}^1 = \dot{N}_{23}$, e se le prospettività tra i fasci nodali (N_{12}) ed (N_{13}) , (N_{21}) ed (N_{23}) avessero ancora per immagine l'identità, le immagini $P_3 = R_3$ delle 3^e proiezioni di tutti i punti P dello spazio si addenserebbero sulla retta k_3 , ossia sarebbe degenerare la omografia \ddot{H}_3 .

e $\sigma_1 = S_2 S_3 S_4$ resta determinata dalle 4 coppie di punti proiezioni degli stessi 4 punti S_2, S_3, S_4, U .

Sicchè, se sulla prospettiva $F_i(P_i)$ si mettono in evidenza le prospettive dei punti S_2, S_3, S_4, U, P , vi si possono leggere (= misurare, come birapporti) i tre rapporti delle coordinate proiettive omogenee x_2, x_3, x_4 di P .

Tale « lettura » può risultare più rapida ed agevole quando sul quadro π il riferimento possieda particolari proprietà affini o metriche, come ad es. capita per le coordinate cartesiane di punto o — dualmente — per le coordinate parallele di retta.

Così la Fig. 4.2 suggerisce di disporre sul quadro π (scegliendo opportunamente le omografie H_1, H_2, H_3) le tre proiezioni della F da S_1, S_2, S_3 in modo che sia (v. Fig. 5.1)

$$(5.1) \quad N_{32}^2 = N_{23}^3, \quad N_{12}^2 = N_{21}^1, \quad N_{31}^1 = N_{13}^3.$$

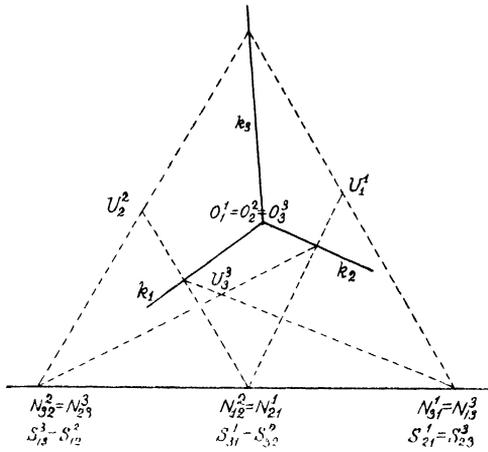


Fig. 5.1.

Si può addirittura fare in modo che i 3 punti distinti (5.1) siano allineati ed impropri (v. Fig. 5.2). Inoltre si facciano coincidere con un medesimo punto O' del quadro i punti O_1^1, O_2^2, O_3^3 e si scelgano i 3 punti U_1^1, U_2^2, U_3^3 in modo che gli assi k_1, k_2, k_3 delle 3 prospettività K_1', K_2', K_3' coincidano con le rette congiungenti il punto O' rispettivamente con i punti impropri: $S_{13}^3 = S_{12}^2 = N_{32}^2 = N_{23}^3, S_{21}^1 = S_{23}^3 = N_{31}^1 = N_{13}^3, S_{31}^1 = S_{32}^2 = N_{12}^2 = N_{21}^1$.

Tali scelte sono possibili, anzi determinano (fissandone quattro coppie di punti corrispondenti in posizione »generale») ciascuna delle 3 omografie H_i ($i = 1, 2, 3$).

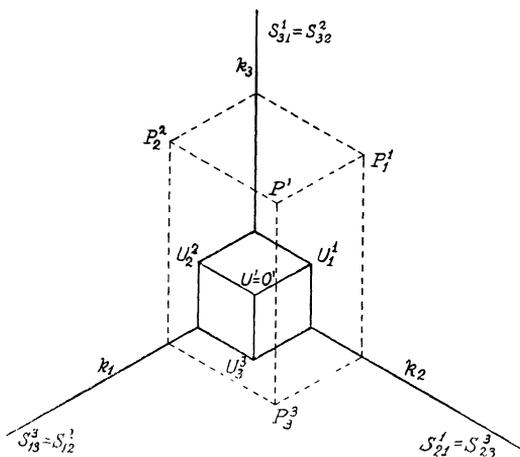


Fig. 5.2.

Sul quadro (v. Fig. 5.2) si ottiene una figura avente lo stesso aspetto di una prospettiva assonometrica, che per comodità si può addirittura supporre « isometrica » ed « isogonale ». Su questa, con la stessa semplice tecnica usata in assonometria:

1) Si possono leggere direttamente (come misure di segmenti orientati) i valori delle tre coordinate proiettive non omogenee x_1/x_4 , x_2/x_4 , x_3/x_4 di un punto $P(P_1, P_2, P_3)$, del quale si conoscano almeno le immagini di due delle tre proiezioni.

2) Si può costruire la immagine di una delle 3 proiezioni di un punto P , date che siano le immagini delle altre due.

3) I punti P' , costruiti sul quadro a partire dalle tre « piante assonometriche » P_1^1, P_2^2, P_3^3 di P con la stessa tecnica usata in assonometria, forniscono una immagine omografica della 4^a proiezione F' della figura F , fatta (su di un piano π' generico) dal punto di intersezione con $\Omega = S_1 S_2 S_3$ con la retta congiungente O con uno di quei punti Q la cui 4^a proiezione Q' coincide con O (nel caso della Fig. 5.2, $Q = U$, essendo l'assonometria « isometrica » ed « isogonale »). Inoltre:

4) Sul quadro la F' si ottiene, a partire dalle immagini di due delle 3 proiezioni F_1, F_2, F_3 , con la stessa tecnica con la quale nella Fig. 4.3 si ottiene la \bar{F} a partire da F_1^1, F_2^2 .

BIBLIOGRAFIA

- [1] BORDIGA G.: *Lezioni di Geometria descrittiva*. Venezia, Ferrari, 1927.
- [2] COMESSATTI A.: *Considerazioni intorno ai metodi generali di rappresentazione della Geometria descrittiva, ed al Teorema di Pohlke*. Atti R. Ist. Veneto S.L.A., LXXXVII (1927-28), P. II, 579-614.
- [3] COMESSATTI A.: *Geometria descrittiva ed applicazioni* (Art. XXVI dell'*Enciclopedia delle matematiche elementari*, Vol. II, P. II, a cura di L. BERZOLARI, G. VIVANTI, D. GIGLI), Milano, Hoepli, 1938.
- [4] FANO G.: *Lezioni di Geometria descrittiva*. 3^a ed., Torino, Paravia, 1925.
- [5] FINSTERWALDER S.: *Photogrammetrie (Enzyklopadie der math. Wissenschaften, VI₂)*, Leipzig, Teubner, 1906.
- [6] HAUCK G.: *Theorie der trilinearen Vervandtschaft ebener Systeme*. J. Reine ang. Math., **95** (1883); **97** (1884); **98** (1885); **103** (1891); **111** (1893); **123** (1905).

Manoscritto pervenuto in redazione il 10 maggio 1966.