Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Franco de Franchis

# Qualche generalizzazione connessa con lo spazio dell'Appell

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 37 (1967), p. 104-111

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1967__37__104_0>

## QUALCHE GENERALIZZAZIONE CONNESSA CON LO SPAZIO DELL'APPELL

*di* FRANCO DE FRANCHIS (*a Palermo*) *)

### Introduzione.

Generalizzando il concetto di spazio solidale ad un sistema rigido, l'Appell [2]) ha associato al moto di un qualsivoglia sistema materiale $S$ uno spazio rispetto al quale sono nulli il risultante ed il momento baricentrale risultante delle quantità di moto. Tale spazio minimizza l'energia cinetica di $S$, come ha osservato l'Almansi.

Recentemente, il Prof. A. Bressan [3]) ha mostrato, tra l'altro, che lo spazio dell'Appell è caratterizzato come lo spazio mobile per cui l'energia cinetica assoluta di $S$ si decompone nella somma dell'energia cinetica relativa e di quella di trascinamento, comunque si scelga lo spazio assoluto (fisso).

Mi sono proposto di generalizzare, tra l'altro, il risultato di A. Bressan testè indicato riferendo il moto di $S$, anzicchè ad uno spazio (necessariamente) rigido, a fluidi animati di moto omografico.

### 1. Preliminari concernenti il principio dei moti relativi.

Sia $S$ un sistema in moto e siano $O$, $\boldsymbol{a}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ un punto e tre vettori non complanari, funzioni geometriche (regolari) del tempo. Consi-

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Palermo.

[1]) P. APPELL, « Sur la notion d'axes fixes et de mouvement absolu », Comptes Rendus, T. 106, 1918.

[2]) A. BRESSAN, « Osservazioni di Cinematica e di Dinamica connesse con lo spazio di energia cinetica minima », Rend. del Circolo Matematico di Palermo, Serie II, Vol. XIII, 1964.

deriamo il riferimento omografico $(O, \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3)$, o brevemente $(O, \boldsymbol{a})$, rispetto al quale, in ogni istante, le coordinate $y^s$ $(s = 1, 2, 3)$ del generico punto $P$ di $S$ sono definite dalla:

$$P = O + y^s \boldsymbol{a}_s \, , \tag{1}$$

essendo $s$ indice di somma variabile da 1 a 3.

Chiameremo velocità di $P$ rispetto al riferimento prescelto:

$$\boldsymbol{v} = \dot{y}^s \boldsymbol{a}_s \, . \tag{2}$$

Riguardiamo $(O, \boldsymbol{a})$ come riferimento fisso e consideriamo un secondo riferimento omografico $(\Omega, \boldsymbol{b})$ come mobile. Useremo indici latini e greci per le componenti di vettori (o tensori) nei riferimenti $(O, \boldsymbol{a})$ e $(\Omega, \boldsymbol{b})$ rispettivamente.

Consideriamo come moto di trascinamento il moto di quest'ultimo rispetto al primo e intendiamo che, in relazione ai riferimenti omografici considerati, le nozioni di velocità assoluta, relativa e di trascinamento siano introdotte come suole farsi con riguardo ai riferimenti rigidi.

Per il particolare significato attribuito ai riferimenti $(O, \boldsymbol{a})$ e $(\Omega, \boldsymbol{b})$, [Cfr. (2)] è la velocità assoluta del punto $P$ di $S$.

Le coordinate $z^\varrho$ $(\varrho = 1, 2, 3)$ di $P$ rispetto al riferimento $(\Omega, \boldsymbol{b})$ sono date dalla:

$$P = \Omega + z^\varrho \boldsymbol{b}_\varrho \, . \tag{3}$$

Siano:

$$\Omega = O + y^s_\Omega \boldsymbol{a}_s \, , \qquad \boldsymbol{b}_\varrho = b^s_{(\varrho)} \boldsymbol{a}_s \qquad (\varrho = 1, 2, 3) \tag{4}$$

le relazioni tra gli elementi relativi ai due riferimenti omografici. Si ha, per le (1) e (3):

$$P - O = y^s \boldsymbol{a}_s = (y^s_\Omega + z^\varrho b^s_{(\varrho)}) \boldsymbol{a}_s \tag{5}$$

e quindi:

$$y^s = y^s_\Omega + z^\varrho b^s_{(\Omega)} \, . \tag{6}$$

La velocità relativa di $P$ è:

$$\boldsymbol{v}^{(r)} = \dot{z}^\varrho \boldsymbol{b} = \dot{z}^\varrho b^s_{(\varrho)} \boldsymbol{a}_s \, . \tag{7}$$

La velocità di trascinamento dello stesso punto, cioè la velocità (rispetto al riferimento assoluto) del punto solidale al riferimento mobile e sovrapposto a $P$ nell'istante attuale, è espressa da:

$$\boldsymbol{v}^{(\tau)} = \dot{\Omega} + z^{\varrho}\dot{\boldsymbol{b}}_{\varrho} \tag{8}$$

ove i punti denotano derivate temporali rispetto al riferimento ($O$, $\boldsymbol{a}$), cosicchè, per le (4):

$$\boldsymbol{v}^{(\tau)} = (\dot{y}^s_{\Omega} + z^{\varrho}\dot{b}^s_{(\varrho)})\boldsymbol{a}_s \,. \tag{9}$$

In base a $(5)_2$ la (2) può scriversi:

$$\boldsymbol{v} = (\dot{y}^s_{\Omega} + z^{\varrho}\dot{b}^s_{(\varrho)} + \dot{z}^{\varrho}b^s_{(\varrho)})\boldsymbol{a}_s \,, \tag{10}$$

cosicchè, a norma delle (7) e (9), si assoda (a titolo di preliminare considerato per comodità del lettore) che la legge di composizione delle velocità

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{v}^{(\tau)} \,, \tag{11}$$

ben nota nel caso in cui almeno il riferimento assoluto sia rigido, vale anche nel caso considerato [3]).

## 2. Sulla velocità di deformazione e sul momento baricentrale generalizzato delle quantità di moto.

Supponiamo che $S$ sia un sistema continuo. Allora, derivando la (11) rispetto alle coordinate assolute $y^s$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial y^s} = \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(r)}}{\partial y_s} + \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(\tau)}}{\partial y^s} = \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(r)}}{dz^{\lambda}}\frac{\partial z^{\lambda}}{\partial y^s} + \frac{\partial \boldsymbol{v}^{(\tau)}}{\partial y^s} \,. \tag{12}$$

Con riguardo alle componenti, posto:

$$V^{(a)\,l}_{s} = \frac{\partial v^l}{\partial y^s}\,, \qquad V^{(r)\lambda}_{\sigma} = \frac{\partial v^{(r)\lambda}}{dz^{\sigma}}\,, \qquad V^{(\tau)\,l}_{s} = \frac{\partial v^{(\tau)\,l}}{\partial y^s}\,, \tag{13}$$

da (12) segue il principio dei moti relativi per la velocità di deformazione:

$$V^{(a)\,l}_{s} = V^{(r)\lambda}_{\sigma}\frac{\partial z^{\sigma}}{\partial y^s}\frac{\partial y^l}{\partial z^{\lambda}} + V^{(\tau)\,l}_{s} = V^{(r)\,l}_{s} + V^{(\tau)\,l}_{s} \,. \tag{14}$$

---

[3]) Nel caso in cui $\Omega$ ed i vettori $\boldsymbol{b}_{\varrho}$ ($\varrho = 1, 2, 3$) sono solidali col riferimento ($O$, $\boldsymbol{a}$), per la (9) risulta $\boldsymbol{v}^{(\tau)} = 0$, onde per la (11) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(r)}$; cio autorizza a chiamare la velocità $\boldsymbol{v}$ di $P$ rispetto al riferimento ($O$, $\boldsymbol{a}$) *velocità di $P$ rispetto ad $F$*, $F$ essendo il fluido solidale con tale riferimento.

Supponiamo che $S$ sia in quiete rispetto al riferimento $(O,\ \boldsymbol{a})$, onde $V^{(a)l}_s = 0$. Allora per (14) risulta che il gradiente di velocità del riferimento $(O,\ \boldsymbol{a})$ rispetto al riferimento $(\Omega,\ \boldsymbol{b})$ è opposto a quello del secondo riferimento rispetto al primo.

Detta $\mu$ la massa totale di $S$ si ha:

$$\Sigma m y^s = \mu y^s_G\,, \qquad \Sigma m z^\varrho = \mu z^\varrho_G\,. \tag{15}$$

Introduciamo ora, in relazione al riferimento $(O,\ \boldsymbol{a})$, il tensore doppio [momento baricentrale generalizzato delle quantità di moto relative al baricentro, ossia relative al riferimento $(G,\ \boldsymbol{a})$]:

$$K^{ls}_{(G)} = \Sigma m(y^l - y^l_G)(v^s - v^s_G) = \Sigma m(y^l - y^l_G)v^s\,, \qquad (v^s_G = \dot{y}^s_G)\,. \tag{16}$$

Allora per (9) si ha

$$K^{(\tau)ls}_{(G)} = \Sigma m(y^l - y^l_G)(v^{(\tau)s} - v^{(\tau)s}_G) = \Sigma m(y^l - y^l_G)(z^\varrho - z^\varrho_G)\dot{b}^s_{(\varrho)}\,. \tag{17}$$

Ora osserviamo che per (9) e $(13)_3$ si ha:

$$V^{(\tau)s}_m = \frac{\partial z^\varrho}{\partial y^m}\,\dot{b}^s_{(\varrho)} \qquad \text{onde} \qquad \dot{b}^s_{(\varrho)} = \frac{\partial y^m}{\partial z^\varrho}\,V^{(\tau)s}_m\,. \tag{18}$$

Da (6) e $(18)_2$ seguono le relazioni:

$$\dot{b}^s_{(\varrho)} = V^{(\tau)s}_m b^m_{(\varrho)}\,, \tag{19}$$

che generalizzano le formule di Poisson in quanto esprimono in modo omografico i derivati rispetto al tempo dei vettori $\boldsymbol{b}_\sigma$ in funzione dei vettori medesimi.

Per (19) e (6) si ha:

$$(z^\varrho - z^\varrho_G)\dot{b}^s_{(\varrho)} = V^{(\tau)s}_m(z^\varrho - z^\varrho_G)b^m_{(\varrho)} = V^{(\tau)s}_m(y^m - y^m_{(G)})\,. \tag{20}$$

Allora, posto:

$$A^{lm}_G = \Sigma m(y^l - y^l_G)(y^m - y^m_G)\,, \tag{21}$$

in base a (6) e (17) si ha la relazione

$$K^{(\tau)ls}_{(G)} = A^{lm}_G V^{(\tau)s}_m\,, \tag{22}$$

che generalizza il ben noto legame tra velocità angolare e momento baricentrale delle quantità di moto (il quale legame è basato sull'omografia di inerzia) al caso di un qualunque atto di moto omografico.

Riuscirà utile pure osservare che per (11) e (16) si ha, con ovvio significato dei simboli:

$$K^{(a)ls}_{(G)} = K^{(\tau)ls}_{(G)} + K^{(r)ls}_{(G)} . \tag{23}$$

## 3. Generalizzazione di una caratterizzazione dello spazio dell'Appell.

Sulla base delle precedenti premesse, ci proponiamo ora di stabilire se è possibile determinare, in funzione del tempo, i vettori $\boldsymbol{b}_\varrho$ in modo da estendere i suaccennati risultati ottenuti dal Prof. Bressan.

La forza viva $\mathscr{T}$ del sistema $S$ rispetto al riferimento omografico assoluto può, per la (11), assumere l'aspetto:

$$\mathscr{T} = \frac{1}{2}\Sigma m(\boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{v}^{(\tau)}) \times (\boldsymbol{v}^{(r)} + \boldsymbol{v}^{(\tau)}) = \mathscr{T}^{(r)} + \mathscr{T}^{(\tau)} + \Sigma m\boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(\tau)} , \tag{24}$$

con manifesto significato dei simboli.

Per le (8) è:

$$\Sigma m\boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(\tau)} = \Sigma m\boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(\tau)}_G + \Sigma m\boldsymbol{v}^{(r)} \times (z^\sigma - z^\sigma_G)\dot{\boldsymbol{b}}_\sigma . \tag{25}$$

Da $(15)_2$ segue $\Sigma m\boldsymbol{v}^{(r)} = \mu\boldsymbol{v}^{(r)}_G$. Inoltre, intendendo

$$v^{(r)}_s = \boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{a}_s , \qquad v^{(r)}_\sigma = \boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{b}_\sigma , \tag{26}$$

per (6) e (19) si ha:

$$\boldsymbol{v}^{(r)} \times (z^\sigma - z^\sigma_G)\boldsymbol{b}_\sigma = v^{(r)}_s(y^l - y^l_G)V^{(\tau)s}_l = v^{(r)}_\sigma(z^\lambda - z^\lambda_G)V^{(\tau)\sigma}_\lambda . \tag{27}$$

Quindi la (25) diviene [cfr. (16)]:

$$\Sigma m\boldsymbol{v}^{(r)} \times \boldsymbol{v}^{(\tau)} = \mu\boldsymbol{v}^{(r)}_G \times \boldsymbol{v}^{(\tau)}_G + K^{(r)\lambda}_{(G)\sigma}V^{(\tau)\sigma}_\lambda . \tag{28}$$

Si pensi ora assegnato il riferimento $(\Omega, \boldsymbol{b})$ e si imponga la condizione che, comunque si scelga il riferimento omografico assoluto $(O, \boldsymbol{a})$, sussista la decomposizione:

$$\mathscr{T} = \mathscr{T}^{(r)} + \mathscr{T}^{(\tau)} . \tag{29}$$

Per (24) e (28) la (29) equivale alla

$$\mu\boldsymbol{v}^{(r)}_G \times \boldsymbol{v}^{(\tau)}_G + K^{(r)\lambda}_{(G)\sigma}V^{(\tau)\sigma}_\lambda = 0 . \tag{30}$$

Se si assumono le $\boldsymbol{a}_r$ coincidenti sempre con le $\boldsymbol{b}_\sigma$, cosicchè per (18) $V_s^{(\tau)l} = 0$, è anche $V_\lambda^{(\tau)\sigma} = 0$; quindi la condizione sopra imposta implica che per ogni scelta della funzione $O$ del tempo sia

$$\mu \boldsymbol{v}_G^{(r)} \times \boldsymbol{v}_G^{(\tau)} = 0 \, . \tag{31}$$

Fissato ad arbitrio il vettore $\boldsymbol{v}^*$, si scelga ulteriormente l'origine $O$ in modo che nell'istante attuale essa transiti per $G$ con velocità $-\boldsymbol{v}^*$ rispetto al riferimento $(\Omega, \boldsymbol{b})$ di trascinamento; è allora $\boldsymbol{v}_G^{(\tau)} = \boldsymbol{v}^*$ e per l'arbitrarietà di quest'ultimo vettore la precedente implica:

$$\boldsymbol{v}_G^{(r)} = 0 \, . \tag{32}$$

Ora, assegnati ad arbitrio 9 scalari $\overline{V}_\lambda^{(\tau)\sigma}$ $(\sigma, \lambda = 1, 2, 3)$, è sempre possibile scegliere il riferimento assoluto in modo che, nell'istante attuale, l'origine si trovi in $G$ ed il gradiente di deformazione del riferimento assoluto rispetto al riferimento di trascinamento sia $-\overline{V}_\sigma^{(\tau)\lambda}$; nell'istante attuale sarà allora $V_\lambda^{(\tau)\sigma} = \overline{V}_\lambda^{(\tau)\sigma}$, quindi, per (30) e (32), $K_\sigma^{(r)\lambda}\overline{V}_\lambda^\sigma = 0$.

Per l'arbitrarietà delle $\overline{V}_\lambda^{(\tau)\sigma}$, ne segue:

$$K_{(G)\sigma}^{(r)\lambda} = 0 \, . \tag{33}$$

Le condizioni (32) e (33), oltre che necessarie sono evidentemente sufficienti perchè valga la (30) comunque si scelga il riferimento $(O, \boldsymbol{a})$.

Concludendo, *le* (32) *e* (33) *caratterizzano lo spazio mobile* $(\Omega, \boldsymbol{b})$ *per cui la decomposizione* (29) *della forza viva vale comunque si scelga il riferimento omografico assoluto.*

## 5. Sulla determinazione del riferimento omografico che generalizza lo spazio dell'Appell. Proprietà di minimo.

Vogliamo dimostrare che se il moto di $S$ soddisfa a certe condizioni (certamente verificate dai sistemi continui) è sempre possibile scegliere le funzioni vettoriali $\boldsymbol{b}_\sigma$ del tempo $t$ in modo che abbiano luogo le (33).

A tale scopo, supponiamo noto il moto di $S$ rispetto al riferimento $(O, \boldsymbol{a})$, cosicchè possiamo calcolare le $K_{(G)}^{(a)ls}$ e le $A_G^{lm}$ come funzioni di $t$. Per (23), le (33) equivalgono alle:

$$K_G^{(a)ls} = K_G^{(\tau)ls} \tag{34}$$

e le (22) assumono la forma:

$$K^{(s)ls}_{(G)} = A^{lm}_{G} V^{(\tau)s}_{m} \,. \tag{35}$$

Per ogni ammissibile valore dell'indice $s$ le (35) si possono considerare come tre equazioni lineari nelle tre incognite $V^{(\tau)s}_m$ ($m = 1, 2, 3$).

Con riguardo ad un sistema particellare, è facile mostrare che *condizione caratteristica per l'annullarsi del determinante* $|A|$ *dei coefficienti del sistema* (35) *è che il sistema materiale* $S$ *appartenga ad un piano* [4]).

Invero, consideriamo la forma quadratica $A^{lm}\eta_l\eta_m$ nelle componenti covarianti $\eta_l$ che il generico vettore $P - G$ ha nel riferimento $(O, a)$. Per le (21) è:

$$A^{lm}\eta_l\eta_m = \Sigma m_{(i)} y^l_{(i)} y^m_{(i)} \eta_l \eta_m = \Sigma m_{(i)} [(P - G) \times (P_i - G)]^2 \geqslant 0 \,, \tag{36}$$

essendo la somma estesa a tutti i punti $P_i$ di $S$.

Da un lato, la $(36)_3$ vale come uguaglianza se, e solo se, $P - G$ è ortogonale a tutti i vettori $P_i - G$ il che, per $P \neq G$, ha luogo se, e solo se, i punti $P_i$ sono complanari; dall'altro lato, la validità di $(36)_3$ come uguaglianza ha luogo per qualche $P \neq G$ se, e solo se, è $|A| = 0$. Dunque vale il precedente asserto.

Ne segue che, supposto il sistema $S$ mai contenuto in un piano, in virtù delle (35) risultano assegnate, in funzione del tempo, le $V^{(\tau)s}_m$. Allora, per ogni ammissibile valore di $s$, le (19) forniscono tre equazioni differenziali del primo ordine lineari e normali nelle funzioni incognite $b^m_{(\sigma)}$ ($m = 1, 2, 3$) di $t$. Queste equazioni consentono di determinare, assegnatine i valori iniziali, i vettori $\boldsymbol{b}_\sigma$ in funzione del tempo.

Indicheremo con $\mathfrak{F}'$ il fluido ideale animato del moto omografico $(G, \boldsymbol{b})$ e lo diremo associato ad $S$.

La decomposizione (29), supposta valida qualunque sia il riferimento omografico assoluto, purchè si assuma $\mathfrak{F}'$ come fluido di trascinamento, mette in luce la circostanza che il riferimento omografico di trascinamento testè caratterizzato è quello rispetto al quale il sistema ha (ad ogni istante) energia cinetica minima. Invero, se ha luogo la (29), nel passaggio dal riferimento indicato a qualunque altro, occorrerà sommare a $\mathfrak{T}^{(r)}$ la quantità non negativa $\mathfrak{T}^{(\tau)}$.

---

[4]) Nel caso in cui i riferimenti siano rigidi (anzichè animati di moto omografico) il caso eccezionale è caratterizzato dall'appartenenza di $S$ ad una retta (anzichè ad un piano). Cfr. § 4 nel loc. cit. in nota (3).

Come caso particolare della precedente affermazione si può osservare che per (29) è certo $\mathfrak{T}^{(r)} \leqslant \mathfrak{T}^{(\varrho)}$ essendo $\mathfrak{T}^{(\varrho)}$ l'energia cinetica di $S$ rispetto allo spazio rigido associato ad $S$ dall'Appell (cioè lo spazio rispetto a cui si annullano le velocità angolare e baricentrale di $S$).

Manoscritto pervenuto in redazione il 1° marzo 1966.