RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

TOMASO MILLEVOI

Una proprietà degli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 356-363

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_356_0>

UNA PROPRIETÀ DEGLI IDEALI DI CLASSE PRINCIPALE NEGLI ANELLI DI MACAULAY

di Tomaso Millevoi (*a Padova*) *)

In questo lavoro mi propongo di dimostrare il seguente teorema: « In un anello A di Macaulay ogni ideale di classe principale può essere generato da una A-successione incondizionata (rispetto alle permutazioni) ».

In una mia precedente nota, redatta nel giugno 1965 (cfr. [2]), avevo stabilito il risultato in questione nell'ipotesi che A contenesse un corpo infinito. Ho potuto togliere tale restrizione basandomi sul seguente teorema, enunciato, senza dimostrazione, da I. Kaplansky nel corso C.I.M.E. « Some aspects of rings theory », tenuto a Varenna nell'estate 1965: « In un anello noetheriano A ogni ideale di grado n e generato da n elementi può esser generato da una A-successione ». Ho poi saputo che la dimostrazione di questo teorema è stata esposta da Kaplansky in un corso tenuto all'Università di Chicago, ma non è stata ancora pubblicata.

Per comodità del lettore ho ritenuto opportuno premettere qui una semplice dimostrazione del teorema di Kaplansky, e riportare per disteso le dimostrazioni di due lemmi (cfr. lemmi 3 e 4) che avevo stabiliti nella già menzionata nota [2].

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Seminario Matematico, Università. Padova.

1. – In questa nota considereremo esclusivamente anelli commutativi e noetheriani.

Diamo qui la dimostrazione del teorema di Kaplansky.

Premettiamo alcuni lemmi

LEMMA 1: *Siano a, b due elementi di un anello A e $\mathfrak{P}_1, \ldots, \mathfrak{P}_n$ ideali primi di A non contenenti l'ideale (a, b); allora esiste un elemento del tipo $a + \varrho b$ ($\varrho \in A$) non contenuto in $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$.*

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo in A gli elementi $b_1 = a + b$, $b_2 = a + bb_1$, $b_3 = a + bb_1b_2, \ldots, b_{n+1} = a + bb_1 \ldots b_n$. Uno almeno di questi non appartiene a $\bigcup_{i=1}^{n} \mathfrak{P}_i$; altrimenti uno degli n ideali primi, diciamo $\mathfrak{P}_s$, conterrebbe almeno due degli $n+1$ elementi, ma in questo caso $\mathfrak{P}_s$ conterrebbe a e b e dunque l'ideale (a, b), contro l'ipotesi: sia infatti h il più piccolo indice per cui $b_h \in \mathfrak{P}_s$ e sia $b_k \in \mathfrak{P}_s$ con $n + 1 \geqslant k > h$; risulta

$$a = b_k - bb_1 \ldots b_h \ldots b_{k-1} \in \mathfrak{P}_s$$

ed ancora

$$bb_1 \ldots b_{h-1} = b_h - a \in \mathfrak{P}_s$$

e quindi, essendo $\mathfrak{P}_s$ primo, uno degli elementi $b, b_1, \ldots, b_{h-1}$ appartiene a $\mathfrak{P}_s$; per l'ipotesi fatta su h questo non può essere che b; c.v.d.

LEMMA 2: *Sia $\mathfrak{A}$ un ideale di A di grado k; ogni A-successione formata da $h < k$ elementi di $\mathfrak{A}$ si può completare in una A-successione formata da k elementi di $\mathfrak{A}$.*

(Questo risultato è già noto: cfr. la dimostrazione del Teorema 3.1 pag. 609 in [4]).

TEOREMA 1 (KAPLANSKY): *In un anello A ogni ideale proprio di grado n e generato da n elementi può esser generato da una A-successione.*

DIMOSTRAZIONE: Sia $\mathfrak{A}$ un siffatto ideale e sia $h \geqslant 0$ il massimo intero tale che esista una A-successione $a_1, \ldots, a_h$ di h elementi di $\mathfrak{A}$, completabile in un sistema $a_1, \ldots, a_h, a_{h+1}, \ldots, a_n$ di n generatori dell'ideale: allora $h = n$. Sia infatti, per assurdo, $h < n$, e siano $a_1, \ldots, a_h, \ldots, a_n$ elementi che verificano le condizioni richieste; allora (lemma 2) esiste in $\mathfrak{A}$ un elemento

$$x = c_1a_1 + \ldots + c_ha_h + c_{h+1}a_{h+1} + c_{h+2}a_{h+2} + \ldots + c_na_n$$

che non appartiene a nessuno dei primi $\mathfrak{P}_i$ associati all'ideale $(a_1, a_2, \ldots, a_h)$; posto

$$b = c_1a_1 + \ldots + c_ha_h + c_{h+2}a_{h+2} + \ldots + c_na_n$$

risulta

$$(a_{h+1}, b) \nsubseteq \bigcup \mathfrak{P}_i \,.$$

Esiste allora (lemma 1) un elemento $a'_{h+1} = a_{h+1} + \varrho b$ tale che

$$a_1, \ldots, a_h, a'_{h+1}$$

sia una A-successione; d'altra parte

$$b \in (a_1, \ldots, a_h, a_{h+2}, \ldots, a_n)$$

per cui

$$(a_1, \ldots, a_h, a_{h+1}, a_{h+2}, \ldots, a_n) = (a_1, \ldots, a_h, a'_{h+1}, a_{h+2}, \ldots, a_n)$$

e dunque h non è massimo, c.v.d.

2. – Diremo che un ideale è di classe principale se può esser generato da un numero di elementi pari alla sua altezza.

Tenuto conto che ogni ideale di un anello di Macaulay ha il grado uguale all'altezza (cfr. [1] teor. 4.1, cond. 3, pag. 18), dal teorema 1 si ottiene il seguente

COROLLARIO 1: *In un anello A di Macaulay ogni ideale di classe principale può esser generato da una A-successione.*

Appare allora evidente che il nostro risultato, cui si è accennato nell'introduzione, e che ci proponiamo ora di dimostrare, contiene quello di Kaplansky nel caso degli anelli di Macaulay.

Premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 3: *Sia A un anello, $a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}, a_{t-1}, a_t$ $(t \geqslant 2)$ elementi di A tali che*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}, a_{t-1}) : a_t = (a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}, a_{t-1})$$
$$(a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}) : a_{t-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}) .$$

Si ha allora

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}, a_t) : a_{t-1} = (a_1, a_2, \ldots, a_{t-2}, a_t) .$$

Si ha infatti, con notazioni evidenti:

$$c \in (a_1, \ldots, a_{t-2}, a_t) : a_{t-1} \Rightarrow ca_{t-1} = m_1a_1 + \ldots + m_{t-2}a_{t-2} + m_ta_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m_t \in (a_1, \ldots, a_{t-1}) : a_t \Rightarrow m_t \in (a_1, \ldots, a_{t-2}, a_{t-1}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow ca_{t-1} = m_1a_1 + \ldots + m_{t-2}a_{t-2} + (r_1a_1 + \ldots + r_{t-2}a_{t-2} + r_{t-1}a_{t-1})a_t \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (c - r_{t-1}a_t)a_{t-1} = (m_1 + r_1a_t)a_1 + \ldots + (m_{t-2} + r_{t-2}a_t)a_{t-2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c - r_{t-1}a_t \in (a_1, \ldots, a_{t-2}) : a_{t-1} \Rightarrow c - r_{t-1}a_t \in (a_1, \ldots, a_{t-2}) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow c = r_{t-1}a_t + s_1a_1 + \ldots + s_{t-2}a_{t-2} \qquad \text{c.v.d.}$$

LEMMA 4: *Sia A un anello, $a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}$ $(t \geqslant 1)$ elementi di A formanti una A-successione incondizionata (rispetto alle permutazioni); allora affinchè gli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, a_t$ di A formino una A-successione incondizionata è necessario e sufficiente che a_t non appartenga a nessuno dei primi associati agli ideali generati dai sottoinsiemi di $\{a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}\}$.*

Il lemma è evidenti per $t = 1$ (cfr. [5] Vol. I, Cor. 2, pag. 214). Sia $t \geqslant 2$; la necessità della condizione risulta ovvia. Proviamo la sufficienza.

Sia a_t un elemento che non appartenga a nessuno degli ideali primi associati agli ideali generati dai sottoinsiemi di

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}\} ;$$

dimostriamo allora che una qualunque permutazione

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{s-1}}, a_t, a_{j_s}, \ldots, a_{j_{t-1}} \qquad (s \geqslant 1)$$

degli elementi $a_1, a_2, \ldots, a_{t-1}, a_t$ forma una A-successione.

$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{t-1}}, a_t$ formano una A-successione, risultando

$$(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{i-1}}) : a_{j_i} = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_{i-1}}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, t-1)$$

per ipotesi, e

$$(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{t-1}}) : a_t = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{t-1}})$$

in quanto a_t non appartiene ad alcuno dei primi associati all'ideale $(a_1, \ldots, a_{t-1})$ (cfr. [5] Vol. I, Cor. 2, pag. 214).

Per il Lemma 3 si ha allora che

$$(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{t-2}}, a_t) : a_{j_{t-1}} = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{t-2}}, a_t) ;$$

risulta inoltre

$$(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{t-2}}) : a_t = (a_{j_1}, \ldots, a_{j_{t-2}})$$

in quanto a_t non appartiene a nessuno dei primi associati all'ideale $(a_{j_1}, \ldots, a_{j_{t-2}})$; quindi

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{t-2}}, a_t, a_{j_{t-1}}$$

formano una A-successione.

Procedendo allora per induzione, verifichiamo che se

$$a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{r-1}}, a_{j_r}, a_t, a_{j_{r+1}}, \ldots, a_{j_{t-1}}$$

formano una A-successione, la formano anche

$$a_{j_1}, \ldots, a_{j_{r-1}}, a_t, a_{j_r}, \ldots, a_{j_{t-1}} .$$

Basterà accertarsi che

$$(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{r-1}}) : a_t = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{r-1}})$$

e che

$$(a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{r-1}}, a_t) : a_{j_r} = (a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_{r-1}}, a_t) ,$$

le altre condizioni essendo ovviamente soddisfatte. Ora la prima si verifica in quanto a_t non appartiene a nessuno dei primi associati all'ideale $(a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{r-1}})$, la seconda in base al Lemma 3 visto che $a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_{r-1}}, a_{j_r}, a_t$ formano una A-successione. La dimostrazione del lemma è così ultimata.

Veniamo infine alla dimostrazione del nostro principale risultato:

TEOREMA 2: *In un anello A di Macaulay ogni ideale di classe principale può esser generato da una A-successione incondizionata* (*rispetto alle permutazioni*).

Infatti, sia $\mathfrak{A} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ e sia n l'altezza di $\mathfrak{A}$. Consideriamo allora il massimo intero r ($r \geqslant 0$) tale che esistano degli elementi $a_1, a_2, \dots, a_r, \dots, a_n$ soddisfacienti alle condizioni seguenti

$$(a_1, a_2, \dots, a_r, \dots, a_n) = \mathfrak{A}\ ; \qquad a_1, a_2, \dots, a_r = A\text{-succesione}$$

incondizionata. Si ha $r = n$. Infatti, r non può esser maggiore di n, poichè un ideale proprio generato da una A-successione di r elementi ha altezza r (cfr. [5] Vol. I, Teor. 31, pag. 242, oppure [1] Prop. 1.13, pag. 6). D'altra parte, sia, per assurdo, $r < n$, e siano

$$a_1, a_2, \dots, a_r, \dots, a_n$$

elementi verificanti le condizioni richieste; allora $\mathfrak{A}$ non può esser contenuto in nessuno dei primi $\mathfrak{P}_i$ associati agli ideali generati dai sottoinsiemi di $\{a_1, a_2, \dots, a_r\}$ poichè, per la condizione di purezza (cfr. [1] Teor. 4.1, cond. 2, pag. 18) si avrebbe allora

$$h(\mathfrak{A}) \leqslant h(\mathfrak{P}_i) \leqslant r < n\ .$$

Non essendo $\mathfrak{A}$ contenuto in nessuno di tali primi $\mathfrak{P}_i$, non è contenuto nemmeno nella loro riunione (cfr. [3] Prop. 6 pag. 12); esiste quindi un elemento di $\mathfrak{A}$,

$$x = c_1a_1 + c_2a_2 + \dots + c_ra_r + c_{r+1}a_{r+1} + c_{r+2}a_{r+2} + \dots + c_na_n\ ,$$

tale che

$$x \notin \bigcup \mathfrak{P}_i\ .$$

Posto

$$b = c_1 a_1 + \dots + c_r a_r + c_{r+2} a_{r+2} + \dots + c_n a_n$$

risulta

$$(a_{r+1},\ b) \nsubseteq \bigcup \mathfrak{P}_i \,.$$

Ciò implica (per il Lemma 1) l'esistenza di un elemento $a'_{r+1} = a_{r+1} + \varrho b$ non contenuto in nessuno dei $\mathfrak{P}_i$. Ma allora (per il Lemma 4) gli elementi

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_r,\ a'_{r+1}$$

formano una A-successione incondizionata; d'altra parte

$$b \in (a_1,\ \dots,\ a_r,\ a_{r+2},\ \dots,\ a_n)$$

per cui risulta

$$(a_1,\ \dots,\ a_r,\ a'_{r+1},\ a_{r+2},\ \dots,\ a_n) = (a_1,\ \dots,\ a_r,\ a_{r+1},\ a_{r+2},\ \dots,\ a_n) = \mathfrak{A}$$

e quindi r non è massimo; c.v.d.

OSSERVAZIONE. – Mentre in un anello locale A una qualunque permutazione di una A-successione è ancora una A-successione (cfr. [5], Vol. II App. 6, Lemma 2, pag. 395), negli anelli di Macaulay non locali il teorema 2 non è banale, come mostra il seguente esempio:

In $A = C[X,\ Y,\ Z]$, che è di Macaulay (cfr. [5] Vol. II, Cap. VII, Teor. 26, pag. 203, oppure [1] es. 1, pag. 25), gli elementi $X(Z-1)$, Z, $Y(Z-1)$ formano una A-successione e generano quindi un ideale di classe principale e di altezza 3. Gli stessi elementi, presi nel seguente ordine $X(Z-1)$, $Y(Z-1)$, Z non formano invece una A-successione.

BIBLIOGRAFIA

[1] GRECO S., SALMON P.: *Anelli di Macaulay*. Pubblicazioni dell'Istituto Matematico dell'Università di Genova, 1965.

[2] MILLEVOI T.: *Sugli ideali di classe principale negli anelli di Macaulay*. Pubblicazioni dell'Istituto Matematico dell'Università di Genova, 1965.

[3] NORTHCOTT D. G.: *Ideal Theory*. Cambridge, 1953.

[4] REES D.: *A theorem of homological algebra*. Proc. of the Camb. Phil. Soc., 52 (1956).

[5] ZARISKI O., SAMUEL P.: *Commutative Algebra*. Vol. I, Vol. II. Van Nostrand, 1958, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 7 novembre 1965.

Aggiunta fatta durante la correzione delle bozze:

Dal Mathematical Reviews del novembre 1965 (rec. n. 3896) ho saputo di un articolo di Takehito Miyata *A remark on M-sequences*, Sûgaku 15 (1963/64), 215-216 in cui è dimostrato un teorema che, insieme con il teorema di Kaplansky, dà un risultato che contiene il Teor. 2 della presente nota.