Rendiconti
del
Seminario Matematico
della
Università di Padova

Rosetta Suppa

Un'osservazione sugli autoomeomorfismi dei cerchi

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 354-355

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_354_0>

UN'OSSERVAZIONE SUGLI AUTOOMEOMORFISMI DEI CERCHI

di ROSETTA SUPPA (*a Roma*) *)

In questa nota mi propongo di esporre un'osservazione relativa agli autoomeomorfismi del cerchio che applicano il cerchio su se stesso e che ammettono il centro del cerchio come unico punto unito.

Se nel cerchio esiste una curva semplice e chiusa che aggira il centro del cerchio e che è libera nell'autoomeomorfismo, cioè che non ha punti in comune con la sua immagine, la curva e la sua trasformata delimitano un campo doppiamente connesso e libero nell'autoomeomorfismo.

Si supponga adesso che nel cerchio esista una curva semplice, aperta, che abbia un estremo nel centro del cerchio e l'altro estremo, e questo soltanto, sulla frontiera del cerchio, e che abbia in comune con la propria immagine solo il centro del cerchio. Allora la curva e la sua trasformata delimitano nel cerchio due campi semplicemente connessi. Ci chiediamo se, cambiando, eventualmente, la curva, è possibile fare in modo che almeno uno dei due campi risulti libero nell'autoomeomorfismo.

La risposta è negativa se ogni curva, semplice e aperta, che unisce il centro del cerchio con un punto della frontiera del cerchio, taglia la propria immagine nel quadrato dell'autoomeo-

*) Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Roma.

morfismo. Ebbene noi verificheremo, con un esempio, che una tal ultima eventualità può effettivamente presentarsi.

Assumiamo il raggio del cerchio C come unità di misura e fissiamo nel piano euclideo un sistema di coordinate cartesiane denotando con x le ascisse e con y le ordinate. Sulla striscia S individuata dalle

$$-\infty < x < +\infty \quad \text{e} \quad 0 \leqslant y \leqslant 1$$

consideriamo l'autoomeomorfismo t definito dalle

$$\xi = x + \left(\frac{1}{2} + y\right)\pi,$$
$$\eta = y,$$

ove x e y sono le coordinate del punto trasformando e ξ ed η quelle del punto trasformato. Un tal autoomeomorfismo di S si può interpretare subito anche come un autoomeomorfismo di C (basta considerare le ascisse e le ordinate di un punto di S come moduli ed argomenti in un sistema di coordinate polari col polo nel centro di C).

Sia c una curva semplice ed aperta di S con gli estremi P_0 e P_1 rispettivamente sull'orizzontale r_0 dei punti con l'ordinata nulla e su quella r_1 dei punti con l'ordinata unitaria.

Detta ϑ la traslazione ordinaria che muta il punto corrente (x, y) del piano nel punto $(x + 2\pi, y)$, per concludere nel senso desiderato basta far vedere che la curva $\vartheta(c)$ taglia $t^2(c)$. Ebbene, nel nostro caso, l'ascissa di $t^2(P_0)$ è ovviamente minore di quella di $\vartheta(P_0)$ e l'ascissa di $t^2(P_1)$ è ovviamente maggiore di quella $\vartheta(P_1)$. Donde senz'altro la conclusione.

Manoscritto pervenuto in redazione il 21 ottobre 1965.