RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ANDREA SCHIAFFINO

Sui complessi di celle privilegiati in una traslazione piana generalizzata

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 334-353

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_334_0>

SUI COMPLESSI DI CELLE PRIVILEGIATI IN UNA TRASLAZIONE PIANA GENERALIZZATA

di ANDREA SCHIAFFINO (*a Roma*) *)

Nel piano, suddivisioni in triangoli od in esagoni topologici, privilegiate rispetto ad una traslazione generalizzata, sono state studiate da Scorza Dragoni [1]). In questa Memoria [2]) mi propongo di prendere in esame il caso di una qualunque suddivisione in poligoni topologici, privilegiata rispetto ad una tale traslazione. Vedremo che i ragionamenti usati da Scorza Dragoni si possono utilizzare per esaminare anche questo caso, pervenendo ad un trasporto completo della parte generale della teoria.

§ 1 **Premesse e richiami.**

1. Una *traslazione piana generalizzata* è un autoomeomorfismo del piano euclideo conservante l'indicatrice e privo di punti uniti.

---

*) Indirizzo dell' A.: Istituto Matematico, Università, Roma.

[1]) G. Scorza Dragoni, *Sulle traslazioni piane generalmente* [Abhandlungen aus dem Matematischen Seminar der Universität Hamburg, Band 21, Heft 1/2 (1957) pagg. 13-43]; *A proposito degli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito solo* [Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova, vol. XXXIII (1963), pagg. 332-406].

[2]) Che nella sostanza non differisce dalla Tesi discussa a Roma nel luglio del 1965 per la mia laurea.

Ricorderò alcune proprietà [3]) delle traslazioni piane generalizzate in questo numero e nei due successivi.

Un insieme di punti del piano è *libero* nella traslazione piana generalizzata t, se non ha punti comuni con la propria immagine nella t. Un insieme libero nella t è libero anche nella t^{-1} che è pure, ovviamente, una traslazione piana generalizzata. Un *arco di traslazione* di t è una curva semplice ed aperta α avente un sol punto in comune con la propria immagine, estremo sia per α che per $t(\alpha)$. L'estremo P comune ad α e $t^{-1}(\alpha)$ è l'*origine* di α (nella t), l'altro estremo di α è il *termine* di α. È ovvio che se α è un arco di traslazione nella t, lo è anche nella t^{-1}, se non che si scambiano gli uffici dell'origine e del termine. La *traiettoria* generata da α nella t è l'unione delle immagini di α nelle varie potenze della t (con esponente positivo, nullo, negativo). È ovvio che le traiettorie sono insiemi invarianti nella t. Sia σ la traiettoria generata dall'arco di traslazione α. È noto che:

1.1: *Una curva semplice ed aperta, la quale abbia uno dei due estremi immagine dell'altro nella t e la quale non contenga nel proprio interno il trasformato di nessuno dei suoi punti interni, è addirittura un arco di traslazione nella t. Una traiettoria è immagine biunivoca e continua della retta euclidea.*

Posto $\sigma^+(\alpha) = \bigcup_{1}^{\infty}{}_i\, t^i(\alpha)$ e $\sigma^-(\alpha) = \bigcup_{1}^{\infty}{}_i\, t^{-i}(\alpha)$, si ha:

1.2: *La curva semplice ed aperta c taglia la propria immagine nella t, se esiste un arco di traslazione α tale che c incontri sia $\sigma^-(\alpha)$ che $\sigma^+(\alpha)$ ed abbia in comune con α al più un estremo di α.*

---

[3]) Si tratta di proprietà che, almeno sostanzialmente, risalgono di massima a Brower. Per le loro dimostrazioni si può vedere: G. Scorza Dragoni, *Criteri per l'esistenza di punti uniti in trasformazione topologiche del cerchio e loro applicazioni.* [Annali di matematica pura ed applicata, serie 4, vol. XXV (1946), pagg. 43-65]; S. Ghezzo, *Sulla teoria delle traiettorie di una traslazione piana generalizzata* [Rendiconti del Seminario matematico dell'Università di Padova, vol. XVI)1947), pagg. 73-85]; G. Trevisan, *Sui campi adiacenti ad una traiettoria di una traslazione piana generalizzata* [Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei, serie 8, vol. III (1947), pagg. 199-203].

Da questi teoremi si deduce:

1.3: *Se v è un sottoarco non degenere di σ, se A è un punto interno a v, A ha distanza positiva da σ-v; cioè una traiettoria è immagine biunivoca e bicontinua della retta reale.*

Si ha inoltre:

1.4: *Se la curva semplice ed aperta c ha solo gli estremi A e B sulla traiettoria σ, la curva semplice e chiusa costituita da c e dal sottoarco di σ con gli estremi in A e B non separa dall'infinito nessun punto di σ.*

2. Per il teorema 1.3 l'insieme (eventualmente vuoto) dei punti che sono d'accumulazione per σ e che non sono di σ è, chiuso. Esso divide il piano in uno o più insiemi aperti e connessi. Uno di essi contiene σ. Questo è a sua volta diviso da σ in due insiemi aperti e connessi, ognuno dei quali ammette i punti di σ come punti di frontiera. Questi due insiemi sono i *campi adiacenti* alla traiettoria σ. Si ha ora che:

1.5: *I punti che non appartengono alla traiettoria σ e che possono essere congiunti con σ mediante una curva semplice ed aperta, avente su σ soltanto un estremo, si distribuiscono nei due campi adiacenti a σ, esaurendoli.*

Il fatto che t conservi l'indicatrice implica che:

1.6: *I singoli campi adiacenti alle diverse traiettorie della t sono, al pari delle traiettorie, invarianti nella t.*

Da 1.4 e 1.5 segue che:

1.7: *Se la curva semplice ed aperta c ha solo gli estremi A e B sulla traiettoria σ, la curva semplice e chiusa costituita da c e dal sottoarco di σ con gli estremi in A e B, separa dall'infinito solo punti appartenenti a quel campo adiacente a σ che contiene l'interno di c.*

Invece da 1.2, segue che:

1.8: *Se la curva semplice ed aperta c non taglia $t(c)$, ha almeno un estremo sull'arco α, di traslazione per la t, ha al massimo gli estremi su $t^{-1}(\alpha) \cup \alpha \cup t(\alpha)$, allora c ha sulla traiettoria σ al massimo gli estremi.*

3. Sia J l'insieme delimitato dalla curva semplice e chiusa j.
L'insieme J è *eccezionale* per α e Σ, ove α è un arco di traslazione della t e Σ è uno dei campi adiacenti alla traiettoria generata da α nella t, se:

a) J è libero nella t.

b) J contiene punti di α e Σ ma non contiene nell'interno punti di α.

c) J non ha punti comuni con $t^{-1}(\alpha)$ e $t(\alpha)$.

d) L'intersezione di j ed α contiene almeno un arco non degenere.

J è invece *quasi eccezionale* per α e Σ se si attenuano quelle ipotesi nel modo seguente:

a') J e $t(J)$ hanno in comune al più punti che siano di frontiera per entrambi.

b') Come *b*).

c') Su $t(\alpha)$ e $t^{-1}(\alpha)$ ha al massimo l'origine ed il termine di α.

Scorza Dragoni ha mostrato esplicitamente [4]) che:

1.9: *Se l'insieme J è quasi eccezionale per α e Σ, i punti di J appartengono all'insieme $\alpha \cup \Sigma$.*

Sempre nella stessa Memoria si vede che:

1.10: *Se la curva semplice ed aperta c, di estremi A e B, non taglia $t(c)$ ed ha solo gli estremi su $t^{-1}(\alpha) \cup \alpha \cup t(\alpha)$ e questi appartengono ad α, l'insieme J delimitato dalla curva semplice e chiusa j formata da c e dal sottoarco di α di estremi A e B, è quasi eccezionale per α ed uno dei due campi adiacenti a σ. Se inoltre c è libera ed i suoi estremi sono interni ad α, J è eccezionale per α ed uno dei due campi adiacenti a σ.*

4. Prima di passare allo studio dei complessi di celle mi è utile approfondire lo studio degli insiemi eccezionali e delle loro proprietà, dando qualche lemma che sfrutterò ripetutamente in seguito, soprattutto nei paragrafi 4 e 5. Intanto, in riferimento

---

[4]) Precisamente nella prima memoria citata nella prima nota.

ad una traslazione piana generalizzata t, si intende per ordinamento di un arco α di traslazione per la t, quello dei due ordinamenti naturali che vede l'origine di α come primo punto ed il termine come ultimo punto. È ovvio che se si considera al posto di t la t^{-1}, si ottiene per α l'ordinamento opposto. Ora se σ è la traiettoria generata da α nella t, se Σ è uno dei campi adiacenti a σ, se J è un insieme eccezionale per α e Σ nella t, se j è la frontiera di J, l'insieme $\alpha \cap j$ non è vuoto e considerato come sottoinsieme di α, ammette un primo ed un ultimo punto. Dimostriamo ora che:

1.11: *Se A è il primo punto di $\alpha \cap j$, se B è l'ultimo, A e B dividono j in due curve semplici ed aperte, una ed una sola delle quali possiede in comune con α solo gli estremi.*

Che A e B dividano j in due curve semplici ed aperte è ovvio. Mostriamo ora la seconda parte. Sia c una curva semplice ed aperta di estremi A e B tale che i suoi punti interni sono interni anche a J. Sia g la curva semplice e chiusa formata da c e dal sottoarco di α avente A e B come estremi. Sia G l'insieme racchiuso da g. È ovvio che G è eccezionale per α e Σ, grazie a 1.10. È anche chiaro che G non contiene tutto J perchè altrimenti i punti interni a c sarebbero interni a G e non di frontiera per esso. Essendo J un dominio e G un insieme chiuso, G non contiene tutto l'interno di J, altrimenti conterrebbe tutto J, il che abbiamo visto non essere vero. Ricordiamo che non è possibile congiungere con una curva semplice ed aperta due punti, uno interno a G, l'altro esterno a G, senza che questa curva incontri g. Sia ora Q un punto interno a J ed esterno a G. Quello dei due campi connessi in cui c divide l'interno di J che contiene Q è quindi formato da punti tutti esterni a G. Sia δ quel campo. La frontiera di δ è formata da c e da una curva semplice ed aperta v, avente A e B come estremi ed interamente contenuta nella frontiera di J. Mostriamo che nessuno dei punti interni a v appartiene ad α. Ragioniamo per assurdo. Sia R un punto di α interno a v. È ovviamente lecito considerare un insieme aperto e connesso U contenente R, tale che le componenti connesse di $U - (\sigma \cap U)$ siano esattamente due. Queste componenti connesse sono insiemi aperti; indichiamole U_1 e U_2. In una di esse, per esempio U_1, cadono punti interni a δ, quindi a Σ. In una di esse cadono punti interni a G, ma una componente connessa di $U - (\sigma \cap U)$ non può contenere punti sia di δ sia dell'interno di G. Quindi i punti di $U - (\sigma \cap U)$ che sono interni a G sono punti di U_2, allora in U_2 cadono punti di Σ. Ma se un insieme connesso contiene punti di Σ e non di δ, è contenuto in Σ.

Quindi sia U_1 che U_2 sono contenuti in Σ. Si ha in conclusione:

$$U = U_1 \cup U_2 \cup (\sigma \cap U) \subset \Sigma \cup \sigma .$$

Allora in U non cadono punti dell'altro campo adiacente a σ. Ma U è un intorno di un punto della frontiera di quel campo. Siamo dunque giunti ad un assurdo e con esso alla dimostrazione voluta.

Siano ora u', u, u'' i sottoarchi di α di estremi, rispettivamente, P ed A, A e B, B e $t(P)$.

Dimostriamo che:

1.12: *La curva semplice ed aperta* $\beta = u' \cup v \cup u''$ *è un arco di traslazione nella* t.

Infatti i suoi estremi sono P e $t(P)$; quindi uno è immagine dell'altro nella t. I punti comuni a β e $t(\beta)$ si riducono al punto $t(P)$. Infatti:

$$\begin{aligned}\beta \cap t(\beta) &= [(u' \cup u'') \cup v] \cap t[(u' \cup u'') \cup v] \subset \\ &\subset (\alpha \cup v) \cap [t(\alpha) \cup t(v)] = [\alpha \cap t(\alpha)] \cup [\alpha \cap t(v)] \cup \\ &\cup [v \cap t(\alpha)] \cup [v \cap t(v)] .\end{aligned}$$

Il primo addendo si riduce a $t(P)$, gli ultimi due sono vuoti, il secondo è uguale a $t[t^{-1}(\alpha) \cap v]$, che è pure vuoto. Allora β non contiene il trasformato di nessuno dei suoi punti interni e in grazia di 1.1 è un arco di traslazione nella t. Il teorema 1.10 ci porge quindi che:

1.13: J *è eccezionale per* β *ed uno dei campi adiacenti alla traiettoria generata da* β.

§ 2 Definizione e costruzione di complessi di celle privilegiati in una traslazione piana generalizzata.

5. S'intende per *cella* un'immagine topologica piana del cerchio chiuso la cui frontiera si pensa divisa in tre o più curve semplici ed aperte; queste curve sono i *lati* della cella ed i loro estremi sono i *vertici* della cella. Sia K una totalità di celle del piano euclideo. I *lati di* K sono i lati di qualche cella di K, mentre i *vertici di* K sono i vertici di qualche cella di K. Una totalità K di celle è un *complesso piano di celle* se:

a) *L'unione delle celle di* K *ricopre il piano*; *ogni sottoinsieme limitato del piano è contenuto nell'unione di un numero finito di celle di* K.

b) *Due celle distinte di* K *o sono disgiunte, o hanno in comune un punto e solo un punto, vertice per entrambe, ovvero hanno in comune una curva semplice ed aperta, lato di entrambe.*

c) *Due lati distinti di* K *o sono disgiunti o hanno in comune un punto e soltanto un punto, estremo per entrambi.*

Ne scende che sono almeno tre le celle di K che ammettono un vertice di K come proprio vertice; sia infatti V un vertice di una cella, δ_1, di K. Essendo V punto di frontiera per δ_1 è d'accumulazione per punti che non sono di δ_1, quindi appartiene al derivato di una cella di K diversa da δ_1, sia δ_2. Essendo δ_2 un insieme chiuso, V è punto di δ_2, anzi, per la condizione *b*), appartiene alla frontiera di δ_2. Sia ω un lato di δ_2 che contiene V, mentre ω' sia un lato di δ_1 uscente da V. Allora, per la *c*), o ω coincide con ω', nel qual caso V è estremo di ω quindi vertice di δ_2, oppure ω e ω' sono distinti ed hanno in comune solo un punto, nel qual caso si ha ancora che V è vertice di δ_2. Per completare mostriamo che V è d'accumulazione per punti del complementare di $\delta_1 \cup \delta_2$. Infatti in caso contrario da V uscirebbero solo due lati, che apparterrebbero sia a δ_1 che a δ_2 contro la condizione *b*). Abbiamo allora dimostrato che:

d) *Ogni vertice di* K *è vertice di ogni cella cui appartiene. Tali celle sono almeno tre.*

Dalla b) segue direttamente che:

c) *Una cella δ di K che non contiene un certo lato ω di K o è disgiunta da ω o ha in comune con ω solo un punto, vertice di δ ed estremo di ω.*

Si definisce *stella* di K l'unione delle celle di K aventi un prefissato vertice a comune.

6. Un complesso K è *privilegiato* nella traslazione piana generalizzata t, se ogni stella di K è libera nella t.

Per costruire un tale complesso introducendo un sistema di coordinate cartesiane ortogonali e suddividiamo il piano in quadrati uguali fra loro mediante rette parallele all'asse delle ascisse oppure a quello delle ordinate. Sia T_1 il poligono formato dai quadrati così ottenuti ed aventi un vertice nell'origine; sia T_2 il poligono pluriconnesso formato dai quadrati con un punto almeno in T_1 che non appartengono a T_1; ...; sia T_{n+1} il poligono pluriconnesso formato dai quadrati con un punto almeno in T_n che non appartengono a $T_1 \cup T_2 \cup \ldots \cup T_n$; e così via. Poichè ogni tale poligono è chiuso e limitato la funzione che al generico punto P di $T_n (n = 1, 2, \ldots)$ associa la distanza di P da $t(P)$ ammette minimo, ovviamente positivo. È dunque possibile dare una suddivisione di T_n in quadratini uguali, in modo che le stelle il cui vertice sia interno a T_n o stia sulla sua frontiera interna (se esiste) siano libere. Un quadratino ha solo un numero finito di tali punti sulla propria frontiera, che è suddivisa da questi punti in un numero finito di lati.

Questi quadratini con la frontiera divisa in questi lati, porgono un complesso privilegiato nella t.

§ 3 Sugli archi elementari di traslazione in riferimento ad una traslazione piana generalizzata e ad un complesso di celle privilegiato in essa.

7. Sia K un complesso di celle privilegiato nella traslazione piana generalizzata t.

Arco elementare di traslazione relativamente a t e K è un arco di traslazione di t i cui estremi siano vertici di K e tale inoltre da non contenere punti interni a celle di K. Perciò un arco elementare di traslazione è unione di un numero finito di lati di K.

Sia α un arco elementare di traslazione, siano P e $t(P)$ i suoi estremi. K subordina su α una suddivisione simpliciale a. Se si percorre α nel verso positivo, cioè da P a $t(P)$, i vertici ed i lati di a si incontrano in un certo ordine, al quale ci riferiremo sempre quando useremo per quei vertici e quei lati espressioni implicanti concetti d'ordinamento.

È importante notare che:

3.1: *a contiene almeno tre lati, cioè contiene almeno due vertici distinti dagli estremi di α.*

Infatti se a contenesse un solo lato, α sarebbe contenuto in una cella di K. Ma una cella è un insieme libero ed α non lo è. Se a contenesse solo due lati la stella di centro il vertice comune ai due lati, conterrebbe α. Ma vale la stessa abiezione di prima.

Ricordiamo che $\sigma^+(\alpha) = \bigcup_1^\infty{}_i\, t^i(\alpha)$ e $\sigma^-(\alpha) = \bigcup_1^\infty{}_i t^{-i}(\alpha)$. Notiamo ora che se Q è un vertice di a diverso da P e $t(P)$, i due lati di a aventi Q come estremo dividono la stella di centro Q in due poligoni topologici; dimostriamo ora che:

3.2: *Nessuno dei due poligoni topologici in cui i lati uscenti da un vertice Q di a dividono la stella di centro Q può avere simultaneamente punti a comune con $\sigma^-(\alpha)$ e $\sigma^+(\alpha)$. In particolare una cella avente un lato comune con a non contiene simultaneamente punti di $\sigma^-(\alpha)$ e $\sigma^+(\alpha)$.*

Sia infatti s uno di quei poligono topologici. Nell'interno di s non cadono punti di α. Siano ora $U \in s \cap \sigma^-(\alpha)$ e $V \in s \cap \sigma^+(\alpha)$, sia c una curva semplice ed aperta con l'interno contenuto nell'interno di s, di estremi U e V. U e V non possono essere simultaneamente uguali a P e $t(P)$ perchè s è libero nella t. Siamo nell'ipotesi di 1.2, ma la tesi non è verificata. L'assurdo porge l'asserto.

Sia ora ω un lato di a. Sia Q un punto interno ad ω. Dal teorema 1.3 sappiamo che esiste un intorno aperto V di Q che non contiene punti di σ-ω. Si può anche supporre che $V - (V \cap \sigma)$ abbia solo due componenti connesse: U e U'. Se Σ e Σ' sono i campi adiacenti a σ, gli insiemi U e U' sono contenuti, salvo cambiamenti di nome, in Σ e Σ' rispettivamente. Possiamo anche supporre che V sia tanto piccolo da essere contenuto nell'unione delle due celle di K contenenti il lato ω. Ovviamente U e U' sono contenuti uno in una di queste celle, l'altro nell'altra cella. Sia δ la cella che contiene U e δ' la cella che contiene U'. Al variare di V non variano tutte queste condizioni di appartenenza. Esprimiamo tutte queste cose dicendo che *δ si volge, lungo ω e in Q, verso il campo Σ.*

Mostriamo che al variare di Q nell'interno di ω non cambia il campo adiacente a σ verso cui si volge la cella δ lungo ω ed in Q.

Siano per assurdo Q e Q' due punti interni ad ω nei quali la cella δ adiacente ad ω si volge, rispettivamente, verso Σ e Σ'. Siano I e I' le totalità dei punti del sottoarco di ω di estremi Q e Q', tali che in essi δ si volge, rispettivamente, verso Σ e Σ'. I e I' sono chiusi. Se infatti T è un punto d'accumulazione per I, sia V un suo intorno aperto contenuto nell'interno di $\delta \cup \delta'$ e tale che $V - (V \cap \sigma)$ sia diviso in due componenti connesse. In $V \cap \omega$ c'è un punto R di I. Ma V è un intorno anche di R e quindi la componente connessa di $V - (V \cap \sigma)$ che è contenuta in δ, è contenuta anche in Σ, allora T appartiene ad I. Quindi I e I' sono due insiemi chiusi, non vuoti, che ricoprono il sottoarco di ω di estremi Q e Q'. Ma questo sottoarco è connesso, allora l'assurdo. Si dice, in questo caso, che *δ si volge, lungo ω, verso il campo Σ.*

8. Sia ancora α un arco elementare di traslazione in riferimento a t e K e sia a la sua suddivisione simpliciale. Se ω è un lato di a, diremo che ω è di *prima categoria* [*seconda categoria*] per α e Σ se la cella adiacente ad ω e volta verso Σ contiene punti di $t^{-1}(\alpha)[t(\alpha)]$. Diremo invece che ω è *eccezionale* per α e Σ se la cella adiacente ad ω e volta verso Σ è eccezionale per α e Σ.

Ricordando la condizione c) per gli insiemi eccezionali e la seconda parte di 3.2, si vede facilmente che:

3.3: *Le circostanze che il lato* ω *di* a *sia di prima categoria, di seconda categoria, eccezionale per* α *e* Σ *si escludono a vicenda. Una di esse però sussiste sempre.*

Ricordando 1.9 si ha invece che:

3.4: *Se la cella* δ *contiene il lato* ω *eccezionale per* α *e* Σ *ed è rivolta verso* Σ, *è contenuta in* $\alpha \cup \Sigma$; *allora* δ *si volge verso* Σ *non solo lungo* ω *ma anche lungo ogni altro (eventuale) lato comune a* δ *ed* a.

Inoltre si ha che:

3.5: *Se la cella* δ *si volge verso* Σ *lungo due lati,* ω *e* ω', *comuni a* δ *ed* a, *se* ω *è eccezionale, di prima categoria, di seconda categoria per* α *e* Σ, *la stessa proprietà compete a* ω'.

Ovvio, ricordando le definizioni.

Il teorema 3.5 ci permette così di definire celle di prima categoria, di seconda categoria, eccezionali per α e Σ, secondo che tale circostanza si verifichi per uno e quindi per tutti i lati comuni ad a e δ lungo i quali δ si volge verso Σ. Naturalmente se δ contiene un lato di prima o di seconda categoria per α e Σ, può volgersi, lungo un altro lato comune con a, verso il campo Σ'. Ma questo fatto non c'interessa.

È ovvio che:

3.6: *Il primo e l'ultimo lato di* a *sono, rispettivamente, di prima e di seconda categoria per* α *e* Σ.

Da 3.2 discende che:

3.7: *Due lati consecutivi di* a *non possono essere l'uno di prima, l'altro di seconda categoria per* α *e* Σ.

Dai due risultati precedenti viene che:

3.8: *Esistono lati di* a *eccezionali per* α *e* Σ.

Dimostriamo ora che:

3.9: *Se il lato* ω *di* a *è di prima (seconda) categoria per* α *e* Σ, *quelli che precedono (seguono) non possono essere di seconda (prima) categoria.*

Dimostriamo la prima parte, la seconda si ottiene cambiando le veci di t e t^{-1}.

ω non può essere l'ultimo lato di a, visto 3.6. La tesi sarebbe ovvia se fosse il primo. Sia allora ω un lato intermedio di a, di prima categoria per α e Σ. Sia C un punto interno ad ω e c una curva con l'interno contenuto nell'interno della cella δ adiacente ad ω e volta, lungo ω, verso Σ, avente un estremo in C e l'altro in un punto U comune a δ e $t^{-1}(\alpha)$. Sia J l'insieme delimitato da c e dal sottoarco di σ avente C ed U come estremi. Da 1.7 e dalla circostanza che almeno i punti di c prossimi a C sono contenuti in Σ, segue $J \subset \sigma \cup \Sigma$. Una cella di K adiacente ad α lungo un lato di a che precede ω su a penetra in J se lungo quel lato è volta verso Σ e può uscire all'esterno di J, per incontrare eventualmente $t(\alpha)$, soltanto a patto d'incontrare $t^{-1}(\alpha)$, a meno di non essere proprio la cella δ, di prima categoria. Donde la conclusione.

Consideriamo ora su α l'ultimo lato di prima categoria ed il primo lato di seconda categoria, sempre per α e Σ. Quello precede questo, a norma di 3.9, i due lati non possono essere consecutivi, a norma di 3.7, allora esistono lati di a che precedono tutti quelli di prima categoria e seguono tutti quelli di seconda categoria. Questi lati sono i lati *strettamente eccezionali* per α e Σ e l'arco da essi formato è il sottoarco strettamente eccezionale per α e Σ.

Quindi:

3.10: *Esistono in a lati strettamente eccezionali per α e Σ.*

§ 4 Sui poligoni topologici eccezionali rispetto ad un arco elementare di traslazione.

9. Sia K un complesso di celle del piano euclideo. Una curva semplice ed aperta, oppure una curva semplice e chiusa è *elementare* rispetto a K, se è unione di lati di K. La seconda parte della prima condizione per i complessi di celle ci assicura che i lati di una curva elementare sono finiti. L'insieme racchiuso da una curva semplice e chiusa, elementare rispetto a K, è un *poligono topologico* elementare rispetto a K. È ovvio che un poligono topologico elementare è unione di un numero finito di celle di K.

10. Siano t una traslazione piana generalizzata e K un complesso di celle privilegiato in essa. Siano α un arco elementare di traslazione ed a la sua suddivisione simpliciale; sia σ la traiettoria generata da α nella t, siano Σ e Σ' i campi adiacenti a σ.

Sia Π un poligono topologico elementare rispetto a K, eccezionale per α e Σ. L'ipotesi è lecita perchè 3.8 ci garantisce l'esistanza di lati e quindi di celle eccezionali per α e Σ. Ovviamente una cella è un poligono topologico elementare rispetto a K.

Sia A il primo punto comune ad α e Π, sia B l'ultimo. Sia v quella curva semplice ed aperta di estremi A e B, contenuta nella frontiera di Π avente solo A e B su α. Se P e $t(P)$ sono gli estremi di α, siano u', u, u'' rispettivamente i sottoarchi di α di estremi P ed A, A e B, B e $t(P)$.

Da 1.12 si deduce immediatamente che:

4.1: *L'arco $\beta = u' \cup v \cup u''$ è un arco elementare di traslazione per t e K.*

L'arco β sarà l'arco elementare di traslazione ottenuto da α mediante aggiunzione di Π. Da 1.13 si ricava invece che:

4.2: *Il poligono topologico Π è eccezionale per β ed uno dei campi adiacenti alla traiettoria generata da β nella t.*

Sia τ la traiettoria di β, sia T' il campo adiacente a τ che contiene l'interno di Π, sia T l'altro campo adiacente a τ.

Mostriamo che:

4.3: *Valgono le relazioni d'inclusione $\tau \subset \Sigma \cup \sigma$, $\sigma \subset T' \cup \tau$.*

Infatti $\beta = (u' \cup u'') \cup \operatorname{int} v \subset \alpha \cup \Sigma \subset \sigma \cup \Sigma$. Quindi:

$$\tau = \bigcup_{-\infty}^{+\infty}{}_i\, t^i(\beta) \subset \bigcup_{-\infty}^{+\infty}{}_i\, t^i(\sigma \cup \Sigma) = \sigma \cup \Sigma \,.$$

Analogamente per ottenere l'altra relazione.

Si ha infine:

4.4: *Valgono le relazioni d'inclusione*: $\Sigma \supset T$, $\Sigma' \subset T'$.

Infatti un punto di T può essere congiunto ad un certo punto Q interno a v e quindi contenuto in τ ed esterno ad α (e pertanto interno a Σ), mediante una curva semplice ed aperta che abbia solo il punto Q su τ e gli altri punti interni a T (ciò a norma di 1.5), pertanto quella curva non incontra σ che appartiene a $T' \cup \tau$, quindi i punti di T sono punti di Σ perchè tale è Q. Per l'altra relazione si proceda con ragionamento analogo.

11. In questo numero ci proponiamo di studiare la classificazione dei lati di a, rispetto ad α e Σ, in relazione con l'analoga classificazione dei lati di b (se b è la suddivisione simpliciale di β), rispetto a β e T.

Osserviamo esplicitamente che il tutto varrè in particolare se le celle che formano Π si riducono ad una sola: è questo il caso che applicheremo nel § 5. È intanto ovvio che:

4.5: *a e b hanno in comune il primo e l'ultimo lato*; *un lato di b che non sia di a è un lato di Π.*

Mostriamo ora che:

4.6: *Un lato ω di a compreso tra due punti comuni ad a ed un poligono Π eccezionale per α e Σ, è eccezionale per α e Σ.*

Se v è la curva contenuta nella frontiera di Π avente come estremi il primo e l'ultimo punto di $\alpha \cap \Pi$ ed avente su α solo gli estremi, l'insieme racchiuso da v e dal sottoarco di α avente come estremi gli estremi di v, è eccezionale per α e Σ, grazie alla prima parte di 1.10. Tale insieme contiene la cella diacente ad ω e volta verso Σ e non contiene punti di $t^{-1}(\alpha)$ e $t(\alpha)$; donde la conclusione.

Da 4.4 deduciamo il seguente risultato:

4.7: *Una cella di K adiacente sia ad α che a β lungo un certo lato comune ad a e b si volge, lungo quel lato, verso T, se e solo se si volge, sempre lungo quel lato, verso Σ.*

Siano ω quel lato e δ quella cella. Se δ si volge, lungo ω, verso T si volge verso Σ perchè $\Sigma \supset T$. Se δ si volge, lungo ω, verso Σ, la cella δ' adiacente ad ω e distinta da δ si volge, lungo ω, verso Σ', allora si volge verso T' che contiene Σ'. Quindi δ si volge verso Σ.

Vale inoltre:

4.8: *Un lato comune ad a e b, eccezionale per β e T, è eccezionale anche per α e Σ.*

Siano ω quel lato comune e δ la cella diacente ad ω e volta verso T. Si ha $\delta \subset \beta \cup T$. Ora $\beta \subset \alpha \cup \Sigma$ e $T \subset \Sigma$; ne scende che $\delta \subset \alpha \cup \Sigma$. Ora δ, essendo eccezionale per β e T non contiene gli estremi di β, che sono quelli di α. Allora $\delta \subset \operatorname{int} \alpha \cup \Sigma$. Allora la tesi.

Mostriamo ora che:

4.9: *Ogni eventuale lato comune ad a e ad una cella di K eccezionale per β e T, appartiene anche a b.*

Sia ω quel lato. Si ha $\omega \subset \alpha \subset \beta \cup T$. Perciò:

$$\omega = (\omega \cap \beta) \cup (\omega \cap T) .$$

Ora $\omega \cap T \subset \omega \cap \Sigma = \varnothing$. Allora $\omega \subset \beta$. Da cui la tesi.

Dai due risultati precedenti scende ovviamente che:

4.10: *Una cella di K, eccezionale per β e T, la quale abbia almeno un lato su α, è eccezionale anche per α e Σ.*

Da 4.6 si ha che:

4.11: *I lati di a di prima e di seconda categoria per α e Σ, sono tutti lati anche di b.*

Dal modo con cui si è costruito β si trae che:

4.12: *Due lati comuni ad a e b si trovano in a e b nella stessa relazione d'ordine.*

Dimostriamo ora che:

4.13: *Un lato di a di prima (seconda) categoria per α e Σ è di prima (seconda) categoria anche per β e T.*

Sia infatti ω un lato di a di seconda categoria, ad esempio, per α e Σ. Intanto ω è lato anche di b, grazie a 4.11. Sia δ la cella di K adiacente a ω e volta verso Σ e quindi verso T. Escluso il caso banale che ω sia l'ultimo lato di a e quindi, per 4.5, di b, sia Q un punto interno ad ω. Sia c una curva semplice ed aperta con un estremo in Q e l'altro, R, su $t(\alpha)$; anzi c e $t(\alpha)$ abbiano in comune solo il punto R e tutti i punti interni a c siano interni anche a δ, le ipotesi essendo ovviamente lecite. Poichè R non appartiene ad α, la curva c ha su α solo il punto Q. La curva c è ovviamente libera nella t ed i punti interni a c non appartengono nè a $t^{-1}(\alpha)$ nè a β, che è un arco elementare. In particolare, a norma di 1.8, i punti interni a c non stanno su σ e, a norma di 1.5 e del fatto che δ è volta verso Σ lungo ω, essi sono interni anche a Σ. Se $R \in t(\beta)$ non vi è nulla da dimostrare. Se $R \notin t(\beta)$, esso, in quanto punto di $t(\alpha)$ esterno a $t(\beta)$, appartiene a T' e precisamente è interno a $t(u)$. I punti di c vicini ad R sono interni a $t(\Pi')$, se Π' è il poligono racchiuso da $u \cup v$. I punti di c vicini a Q sono esterni a $t(\Pi')$, perchè tale è Q, atteso che Π' non contiene $t^{-1}(Q)$, perchè Π' è eccezionale per α e Σ, per la 1.10. Quindi c incontra $t(u \cup v) = t(u) \cup t(v)$, in punti diversi da R. Si percorra c a partire da Q, fino a giungere al primo punto comune a c e $t(u \cup v)$, sia R'. R' è interno a c, quindi a Σ; cioè non appartiene a $t(u)$, allora appartiene a $t(v) \subset t(\beta)$. Quindi δ è di seconda categoria per β e T, come si voleva. Analogamente se ω è di prima categoria per α e Σ.

È ora immediato dedurre da 4.10 che:

4.14: *Una cella di K, strettamente eccezionale per β e T, è strettamente eccezionale anche per α e Σ, purchè abbia un lato su a.*

Da 4.6 si vede che se una cella ha un lato strettamente eccezionale per α e Σ, tutti gli altri suoi (eventuali) lati sono strettamente eccezionali per α e Σ. Si può allora parlare di celle strettamente eccezionali per α e Σ.

Se il *sottoarco di prima* (*seconda*) *categoria* è quello formato dai lati che precedono (seguono) il sottoarco strettamente eccezionale, si ha, considerando sempre 4.6 che:

4.15: *Se la cella δ aggiunta ad α per ottenere β è strettamente eccezionale per α e Σ, il sottoarco di prima* (*seconda*) *categoria di b rispetto a T contiene quello di prima* (*seconda*) *categoria di a rispetto a Σ.*

§ 5 Catene eccezionali e catene strettamente eccezionali.

12. Siamo ancora t una traslazione piana generalizzata, K un complesso di cella previlegiato nella t, α_0 un arco di traslazione di t elementare rispetto a K.

Una *m-pla* $\Delta_m = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ di celle di K è una *catena eccezionale* (*strettamente eccezionale*) per α_0 ed il campo Σ_0, adiacente alla traiettoria σ_0 generata da α_0 nella t, se δ_1 è eccezionale (strettamente eccezionale) per α_0 e Σ_0; se δ_2 è eccezionale (strettamente eccezionale) per α_1 e Σ_1, α_1 essendo l'arco di traslazione ottenuto da α_0 mediante aggiunzione di δ_1 e Σ_1 essendo quello dei due campi adiacenti alla traiettoria σ_1 generata da α_1, che non contiene δ_1; ...; se δ_m è eccezionale (strettamente eccezionale) per α_{m-1} e Σ_{m-1}, α_{m-1} essendo l'arco di traslazione ottenuto da α_{m-2} mediante aggiunzione di δ_{m-1} e Σ_{m-1} essendo quello dei due campi adiacenti alla traiettoria σ_{m-1} generata da α_{m-1} che non contiene δ_{m-1}, allora α_m sarà l'arco di traslazione ottenuto da α_{m-1} mediante aggiunzione di δ_m, mentre σ_m sarà la traiettoria generata da α_m e Σ_m sarà quello dei due campi adiacenti a δ_m, generata da α_m, che non contiene δ_m. Se i è un numero intero non negativo e minore od eguale ad m, Σ'_i indicherà il campo adiacente a σ_i distinto da Σ_i mentre a_i indicherà la suddivisione simpliciale di α_i. Il numero m è la *lunghezza* della catena Δ_m.

Invece una successione $\Delta \equiv (\delta_1, \ldots, \delta_m, \ldots)$ di celle di K è eccezionale (strettamente eccezionale) per α_0 e Σ_0, se fissato comunque il numero naturale n, la ridotta n-sima $\Delta_n = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ è eccezionale (strettamente) per α_0 e Σ_0.

13. Nelle definizioni poste è implicito che:

5.1: *Se* $\Delta_m = (\delta_1, \ldots, \delta_m)$ *è eccezionale* (*strettamente eccezionale*) *per* α_0 *e* Σ_0; *se* $(\delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+p})$ *è eccezionale* (*strettamente eccezionale*) *per* α_m *e* Σ_m, *la catena* $(\delta_1, \ldots, \delta_m, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+p})$ *è eccezionale* (*strettamente eccezionale*) *per* α_0 *e* Σ_0.

e che:

5.2: *Se le catene* $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ *e* $(\delta_1, \ldots, \delta_m, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+p})$ *sono eccezionali* (*strettamente eccezionali*) *per* α_0 *e* Σ_0, *la catena* $(\delta_{m+1}, \ldots, \delta_{m+p})$ *è eccezionale* (*strettamente eccezionale*) *per* α_m *e* Σ_m.

Da 3.8 e 3.10 segue che:

5.3: *Esistono in K catene sia eccezionali, sia strettamente eccezionali per* α_0 *e* Σ_0.

Anzi chè:

5.4: *Fissato comunque il numero naturale n esistono in K ca-*

tene eccezionali e strettamente eccezionali per α_0 *e* Σ_0, *di lunghezza* n.

Mostriamo, sfruttando ancora 3.8 e 3.10, che:

5.5: *Esistono in* K *successioni strettamente eccezionali e quindi anche eccezionali per* α_0 *e* Σ_0 .

Basta mostrare che ogni catena strettamente eccezionale per α_0 e Σ_0 è contenuta in una catena strettamente eccezionale di lunghezza maggiore. Sia $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ strettamente eccezionale per α_0 e Σ_0 . Se δ_{m+1} è una cella strettamente eccezionale per α_m e Σ_m, da 5.1 si deduce che $(\delta_1, \dots, \delta_m, \delta_{m+1})$ è strettamente eccezionale per α_0 e Σ_0 . Donde la conclusione.

14. Sia $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ una catena eccezionale (in particolare strettamente eccezionale) per α_0 e Σ_0 .

È ovvio che:

5.6: *Le poligonali* $a_0, a_1, \dots, a_m$ *hanno lo stesso primo e lo stesso ultimo lato.*

E che:

5.7: *I campi* $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots, \Sigma_m$ *vanno decrescendo, i campi* Σ'_0, $\Sigma'_1, \dots, \Sigma'_m$ *vanno crescendo.*

Dimostriamo ora che:

5.8: *Le traiettorie* σ_0 *e* σ_m *sono rispettivamente contenute negli insiemi* $\Sigma_m \subset \sigma_m$, $\Sigma_0 \cup \sigma_0$.

Per $m = 1$ si ricade in 4.3; procediamo per induzione. Sia cioè n un intero tale che $0 \leqslant n \leqslant m - 1$ e sia inoltre $\sigma_0 \subset \Sigma_n \cup \sigma_n$, $\sigma_n \subset \Sigma_0 \cup \sigma_0$. Si ha: $\sigma_0 \subset \Sigma'_n \cup \sigma_n$, ma $\Sigma'_n \subset \Sigma'_{n+1}$ e $\sigma_n \subset \Sigma'_{n+1}$, quindi $\sigma_0 \subset \Sigma'_{n+1} \cup \sigma_{n+1}$.

Analogamente per l'altra relazione.

Definiamo come *sottoarco essenziale* di α_i e lo indicheremo con $\alpha_i^{(e)}$, il sottoarco di α_i avente il secondo ed il penultimo vertice di a_i come estremi.

Allora dimostriamo che:

5.9: *Sussistono le relazioni* $\delta_1 \cup \dots \cup \delta_m \subset \alpha_0^{(e)} \cup \Sigma_0$, $\delta_1 \cup \dots \cup \delta_m \subset \alpha_m^{(e)} \cup \Sigma'_m$.

Per $m = 1$ si ricade in un caso già visto. Supponiamo che il risultato sia vero per $m = n$, mostriamolo per $m = n + 1$. Ora

$\delta_{n+1} \subset \Sigma_n \cup \alpha_n^{(e)}$. Ma $\Sigma_n \subset \Sigma_0$ e $\alpha_n^{(e)} \subset \alpha_0^{(e)} \cup \Sigma_0$. L'ipotesi induttiva ci dice che $\delta_1 \cup ... \cup \delta_n \subset \alpha_0^{(e)} \cup \Sigma_0$. Allora $\delta_1 \cup ... \cup \delta_n \cup \delta_{n+1} \subset \subset \alpha_0^{(e)} \cup \Sigma_0$, cioè la prima parte della tesi. Per la seconda, sempre supponendo che $\delta_1 \cup ... \cup \delta_n \subset \alpha_n^{(e)} \cup \Sigma_n'$, si ha: $\delta_{n+1} \subset \Sigma_{n+1}' \cup \alpha_{n+1}^{(e)}$.

Ma $\Sigma_{n+1}' \supset \Sigma_n'$ e $\alpha_n^{(e)} \subset \Sigma_{n+1}' \cup \alpha_{n+1}^{(e)}$. Allora la tesi.

Proviamo adesso che:

5.10. *Se $m > 1$ le celle $\delta_1, ..., \delta_m$ sono a due a due distiate.*

Siano infatti i e j due naturali tali che $1 \leqslant i < j \leqslant m$. Se ne deduce $j - 1 \geqslant i$. Si ha che: int $\delta_i \subset \Sigma_i' \subset \Sigma_{j-1}'$, int $\delta_j \subset \Sigma_{j-1}$. Quindi δ_i e δ_j non hanno punti interni a comune. Se ne deduce la tesi.

Se r è un intero positivo o nullo, minore di m, si ha che:

5.11: *δ_{r+1} contiene almeno un lato di a_r; i lati comuni ad a_r e δ_{r+1} sono contenuti nel sottoarco essenziale di α_r.*

Se r è intero positivo o nullo, non superiore ad m, se s è un intero positivo non superiore ad m, si ha che: 5.12: *Se a_r e δ_s hanno lati o vertici in comune, questi sono lati o vertici del sottoarco essenziale di α_s.*

Mostriamo che:

5.13: *L'insieme $\delta_1 \cup ... \cup \delta_m$ è libero nella t.*

Per $m = 1$ è ovvio, atteso che δ_1 è una cella di K. Procedendo per induzione sia libero l'insieme $\delta_1 \cup ... \cup \delta_n$, ove n è un numero naturale minore di m. Mostriamo che $\delta_1 \cup \delta_2 \cup ... \cup \delta_n \cup \delta_{n+1}$ è libero. Ma questo si vede subito perchè i campi Σ_n e Σ_n' al pari della traiettoria δ_n sono invarianti; inoltre:

$$\delta_1 \cup ... \cup \delta_n \cup \delta_{n+1} \subset [(\delta_1 \cup ... \cup \delta_n) - \alpha_n^{(e)}] \cup \alpha_n^{(e)} \cup [\delta_{n+1} - \alpha_n^{(e)}]$$

e gli addendi del secondo membro sono liberi e contenuti, rispettivamente, in Σ_n', σ_n, Σ_n.

15. Sia $\Delta = (\delta_1, ..., \delta_n, ...)$ una successione eccezionale (in particolare strettamente eccezionale) per α_0 e Σ_0. Indichiamo sempre col simbolo Δ, l'insieme $\bigcup_1^\infty{}_i \delta_i$.

Deduciamo da 5.13 che:

5.14: *Δ è libero nella t.*

Per assurdo non sia vero. Sia $Q \in \Delta \cap t(\Delta)$. Per due naturali n ed m si avrà $Q \in \delta_n$, $Q \in t(\delta_m)$. Sia $q = \max(n, m)$. La catena $(\delta_1, \ldots, \delta_q)$, eccezionale per α_0 e Σ_0 è allora tale che $\delta_1 \cup \ldots \cup \delta_q$ non è libero nella t. Ma ciò contraddice 5.13.

Sia Λ una componente connessa di Δ, la connessione essendo intesa in senso forte. Λ, se contiene punti interni ad una cella, contiene tutta la cella. Sia allora δ_n una cella contenuta in Λ. Sia ω un lato comune a δ_n e a_{n-1}. ω, se non appartiene a δ_{n-1} è lato di a_{n-2}. Continuando si vede che o uno dei lati di δ_n appartiene ad a_0, ovvero risulta $n > 1$ e δ_n ha un lato in comune con qualcuna delle celle $\delta_1, \ldots, \delta_{n-1}$, che apparterrebbe così a Λ. Induttivamente si ottiene:

5.15: *Ogni componente connessa in senso forte di* Δ *contiene almeno un lato di* a_0.

Per induzione, dalla prima parte di 5.9, si vede che:

5.16: *L'insieme* Δ *è contenuto in* $\alpha_0^{(e)} \cup \Sigma_0$.

Da 5.15 segue che:

5.17. *Il numero delle componenti connesse in senso forte di* Δ, *non supera il numero dei lati di* a_0 *meno due.*

È allora ovvio, ricordando 5.10 e la seconda parte della prima proprietà dei complessi di celle, che:

5.18: *Almeno una delle componenti connesse in senso forte di* Δ, *contiene infinite celle di* K. *Ne segue che quella componente è illimitata.*

Che precisa il fatto ovvio che Δ è illimitata.

Manoscritto pervenuto in redazione il 19 ottobre 1965.