Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

LAMBERTO CATTABRIGA

Su una classe di polinomi ipoellittici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 285-309

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_285_0>

SU UNA CLASSE DI POLINOMI IPOELLITTICI

di LAMBERTO CATTABRIGA (*a Ferrara*) *)

Nel presente lavoro introduciamo una classe di polinomi ipoellittici a coefficienti costanti che contiene la classe dei polinomi quasi-ellittici studiati da vari Autori: L. Hörmander [1]) [7], B. Pini [10], L. P. Volevic [12], etc. nonchè certi prodotti di polinomi di questo tipo. Tale classe contiene anche gli esempi di polinomi ipoellittici, non quasi-ellittici, considerati da B. Pini [11] e V. N. Gorčakov [5] e, come appare dalla ipotesi *d*) del n. 4, si sovrappone in parte alla classe dei polinomi ipoellittici studiati con altri intendimenti da S. M. Nikol'skiĭ[9].

Se le variabili indipendenti sono più di due, la classe qui introdotta contiene polinomi che non possono considerarsi equivalenti, nel senso precisato al n. 5, al prodotto di polinomi quasi-ellittici.

La ipotesi *d*) del n. 4 è stata generalizzata da J. Friberg [2] che l'ha posta a fondamento della definizione di una classe di polinomi ipoellittici, chiamati multi-quasi-ellittici, per i quali ha annunziato interessanti applicazioni [2]).

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico - Università - Ferrara.

[1]) Gli stessi polinomi sono chiamati da questo Autore semi-ellittici anzichè quasi-ellittici.

[2]) Alcuni scambi di idee avuti con J. Friberg e G. C. Barozzi durante la redazione definitiva di questo lavoro mi hanno dato lo spunto per apportare alcuni miglioramenti all'esposizione.

Nelle formule di maggiorazione che compaiono in questo lavoro denoteremo, salvo esplicita indicazione, con C, C', ..., C_0, C_1, ... delle costanti positive, indipendenti dalle variabili che entrano nelle singole maggiorazioni, il cui valore potrà variare da formula a formula.

1. Sia $\tilde{s} = (\lambda, s) \in C^{\nu+1}$, $\nu \geqslant 1$; $\lambda = \varrho + i\eta \in C$, ϱ, $\eta \in R$; $s = \sigma + i\tau \in C^\nu$, $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_\nu)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_\nu) \in R^\nu$; $s_k = \sigma_k + i\tau_k$, $k = 1, \dots, \nu$ e $P(\tilde{s}) = \sum_{\tilde{\alpha}} c_{\tilde{\alpha}} \tilde{s}^{\tilde{\alpha}}$, $\tilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in R^{\nu+1}$ un polinomio a coefficienti complessi costanti. Scriveremo anche $P(\tilde{s}) = P(\lambda, s) = \sum_{0}^{n}{}_j \lambda^{n-j} P_j(s)$, con $P_j(s) = \sum_\alpha c_{j\alpha} s^\alpha$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_\nu) \in R^\nu$, $j = 0, \dots, n$, polinomi a coefficienti complessi costanti.

Supporremo che

a) $P_0(s) \equiv c_{00} \neq 0$, $\quad P_n(s) = c'_{n1} s_1^{a_1} + \dots + c'_{n\nu} s_\nu^{a_\nu} + \sum_\alpha c_{n\alpha} s^\alpha$ *ove per* $k = 1, \dots, \nu$ *gli* a_k *sono interi positivi ed è* $c'_{nk} \neq 0$ [3]) *e per tutti gli* α *che entrano nell'ultima somma è* $0 \leqslant \alpha_k < a_k$, $k = 1, \dots, \nu$.

È ben noto che tale ipotesi è certamente soddisfatta da ogni $P(\tilde{s})$ che sia ipoellittico.

Sia $a = \max\limits_k a_k$, $q = (q_1, \dots, q_\nu) = (a/a_1, \dots, a/a_\nu)$ ed m_j il q-grado di $P_j(s)$ ossia

$$m_j = \max_{\alpha \in (P_j)} < q, \alpha >$$

con $< q, \alpha > = \sum_{1}^{\nu}{}_k q_k \alpha_k$ e $(P_j) = \{\alpha \in R^\nu : c_{j\alpha} \neq 0\}$. Da *a)* segue che è $m_0 = 0$ e $m_n \geqslant a$.

Supporremo inoltre che

b) $m_j < m_n$, $j = 1, \dots, n-1$.

Dato $q_0 \geqslant 1$, sia $\tilde{q} = (q_0, q_1, \dots, q_\nu)$, m il $\tilde{q}$-grado di $P(\tilde{s})$, cioè $m = \max\limits_{\tilde{\alpha} \in (P)} < \tilde{q}, \tilde{\alpha} >$, con $< \tilde{q}, \tilde{\alpha} > = \sum_{0}^{\nu}{}_l q_l \alpha_l$, $(P) = \{\tilde{\alpha} \in$

---

[3]) Si è posto $c'_{nk} = c_{n\alpha}$, per $\alpha = a_k e^{(k)}$, $e^{(k)} \in R^\nu$ con $e^{(k)}_l = \delta_{lk}$.

$\in R^{\nu+1} : c_{\tilde{\alpha}} \neq 0\}$, e $P_0(\tilde{s})$ il polinomio costituito dai soli termini di $P(\tilde{s})$ di $\tilde{q}$-grado eguale ad m. Se $P_0(\varrho, \sigma) \neq 0 \ \forall\ (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1} - \{0\}$, il polinomio $P(\tilde{s})$ si dice $\tilde{q}$-quasi-ellittico. In tal caso è necessariamente $m = q_0 n = m_n = a$ e $m_j + q_0(n - j) \leqslant m$, ossia $m_j \leqslant q_0 j$, $j = 0, \ldots, n$. L'ipotesi *b*) è dunque soddisfatta qualunque sia $q_0 \geqslant 1$ ed è inoltre $q_0 = \max\limits_{0<j\leqslant n} m_j/j$.

Supposto soltanto che il polinomio $P(\tilde{s})$ *soddisfi alle a*) *e b*) poniamo $p_0 = \max\limits_{0<j\leqslant n} m_j/j$. È evidentemente $p_0 > 0$ e $m_j \leqslant p_0 j$ per $0 \leqslant j \leqslant n$. Sia $j_1 = \max\limits_{0<j\leqslant n} \{j : m_j = p_0 j\}$. È $m_{j_1} = p_0 j_1 = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant j_1} m_j$. Se $j_1 = n$ è $m_n = p_0 n$. Se $j_1 < n$ sia $p_1 = \max\limits_{j_1<j\leqslant n} (m_j - m_{j_1})/(j - j_1)$. Per $j_1 < j \leqslant n$ è $m_j - m_{j_1} < p_0(j - j_1)$ e quindi $p_1 < p_0$. Da *b*) segue che è $p_1 > 0$. Per $j_1 \leqslant j \leqslant n$ è $m_j \leqslant m_{j_1} + p_1(j - j_1)$. Sia $j_2 = \max\limits_{j_1<j\leqslant n} \{j : m_j = m_{j_1} + p_1(j - j_1)\}$. È $j_2 > j_1$ e $m_{j_2} = m_{j_1} + p_1\ (j_2 - j_1) = \max\limits_{0\leqslant j\leqslant j_2} m_j$.

Procedendo nel modo ora indicato si costruiscono successivamente i numeri razionali positivi

$$p_h = \max_{j_h<j\leqslant n} \frac{m_j - m_{j_h}}{j - j_h}\ , \quad h = 0, \ldots, r-1 \quad (j_0 = 0)$$

ed i numeri naturali

$$j_{h+1} = \max_{j_h<j\leqslant n} \{j : m_j = m_{j_h} + p_h(j - j_h)\}, \qquad h = 0, \ldots, r-1,$$

ove r è tale che $j_r = n$. Risulta

$$p_0 > p_1 > \ldots > p_{r-1} > 0 \quad \text{e} \quad 0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_{r-1} < j_r = n\ ;$$

inoltre i polinomi $P_{j_{h+1}}(s)$ hanno q-grado

$$m_{j_{h+1}} = m_{j_h} + p_h(j_{h+1} - j_h) = \sum_0^h {}_i\, p_i\,(j_{i+1} - j_i) = \max_{0\leqslant j\leqslant j_{h+1}} m_j$$

ed è

$$0 = m_0 < m_1 < \ldots < m_{j_{r-1}} < m_{j_r} = m_n .$$

Osserviamo che l'ipotesi *b*) equivale a supporre che tutti i numeri p_h, $h = 0, \ldots, r-1$, siano positivi. Poniamo

$$m_j^* = m_{j_h} + p_h(j - j_h), \qquad j_h \leqslant j \leqslant j_{h+1}, \qquad h = 0, \ldots, r-1 .$$

Per ogni $j = 0, \ldots, n$ è $m_j \leqslant m_j^*$, il segno eguale valendo in particolare per $j = j_h$, $h = 0, \ldots, r$, ed inoltre $m_{j'}^* < m_{j''}^*$ se $j' < j''$. Infine sia $P_j'(s) = \sum_{\langle q, \alpha \rangle = m_j} c_{j\alpha} s^\alpha$.

Per $t > 0$ ed $h = 0, \ldots, r-1$ si ha

$$P(t^{p_h}\lambda, t^q s) = P(t^{p_h}\lambda, t^{q_1} s_1, \ldots, t^{q_\nu} s_\nu) = \sum_{m_j = m_j^*} t^{p_h(n-j)+m_j^*} \lambda^{n-j} P_j'(s) +$$

$$+ \sum_{m_j = m_j^*} t^{p_h(n-j)} \lambda^{n-j} [P_j(t^q s) - P_j'(t^q s)] + \sum_{m_j < m_j^*} t^{p_h(n-j)} \lambda^{n-j} P_j(t^q s) .$$

Osserviamo che se $j_h \leqslant j \leqslant j_{h+1}$ è $p_h(n-j) + m_j^* = m_{j_h} + p_h(n - j_h)$, mentre per $j < j_h$, $h = 1, \ldots, r-1$, è $m_j^* \leqslant m_{j_{h-1}} + p_{h-1}(j - j_{h-1}) = m_{j_h} - p_{h-1}(j_h - j)$ e quindi $p_h(n-j) + m_j^* < m_{j_h} + p_h(n - j_h)$ e per $j > j_{h+1}$ è $m_j^* < m_{j_h} + p_h(j - j_h)$ e quindi $p_h(n-j) + m_j^* < m_{j_h} + p_h(n - j_h)$. Inoltre per $j > 0$

$$| P_j(t^q s) - P_j'(t^q s) | \leqslant C(s)(t^{m_j^* - \mu} + 1)$$

se $m_j = m_j^*$ e

$$| P_j(t^q s) | \leqslant C(s)(t^{m_j^* - \mu} + 1)$$

se $m_j < m_j^*$, con $C(s)$ positiva e limitata con s e $0 < \mu < \inf_{j > 0} m_j^* = p_0$.

Da quanto sopra segue il

LEMMA. – *Se il polinomio* $P(\tilde{s})$ *soddisfa alle a) e b), per* $h = 0, \dots, r-1$ *risulta*

$$(1) \quad \lim_{t\to+\infty} t^{-m_{j_h}-p_h(n-j_h)} P(t^{p_h}\lambda, t^q s) = \lambda^{n-j_{h+1}} \sum_{\substack{j_h \\ m_j=m_j^*}}^{j_{h+1}} \lambda^{j_{h+1}-j} \; P'_j(s) =$$

$$= \lambda^{n-j_{h+1}} \widetilde{P}_h(\lambda, s)$$

uniformemente rispetto a λ *ed* s *contenuti in insiemi limitati.*

Sia ora

$$\tilde{q}^{(h)} = (q_0^{(h)}, q^{(h)}) = (q_0^{(h)}, q_1^{(h)}, \dots, q_\nu^{(h)}) = \begin{cases} (p_h, q) & \text{se} \quad p_h \geqslant 1 \\ (1, q/p_h) & \text{se} \quad p_h < 1 \end{cases} \qquad h = 0, \dots, r-1.$$

Per $j_h \leqslant j \leqslant j_{h+1}$ è $p_h(j_{h+1} - j) + m_j^* = p_h(j_{h+1} - j_h) + m_{j_h} = m_{j_{h+1}}$ e quindi per $h = 0, \dots, r-1$ si ha

$$< \tilde{q}^{(h)}, \tilde{\alpha} > = m_{j_{h+1}} q_0^{(h)}/p_h \qquad \forall \tilde{\alpha} \in (\widetilde{P}_h),$$

ove si è indicato con $(\widetilde{P}_h)$ l'insieme degli $\tilde{\alpha} \in R^{\nu+1}$ tali che le potenze $\tilde{s}^{\tilde{\alpha}}$ compaiono effettivamente in $\widetilde{P}_h(\tilde{s})$. *I polinomi* $\widetilde{P}_h(\tilde{s})$ *sono dunque* $\tilde{q}^{(h)}$*-quasi-omogenei di* $\tilde{q}^{(h)}$*-grado eguale a* $m_{j_{h+1}} q_0^{(h)}/p_h$. Con queste notazioni la (1) si scrive

$$(1') \qquad \lim_{t\to+\infty} t^{-(m_{j_{h+1}}+p_h(n-j_{h+1}))q_0^{(h)}/p_h} P(t^{q_0^{(h)}}\lambda, t^{q^{(h)}} s) = \lambda^{n-j_{h+1}} \widetilde{P}_h(\lambda, s),$$

da cui appare che $P(\tilde{s})$ *ha* $\tilde{q}^{(h)}$*-grado eguale a* $(m_{j_{h+1}} + p_h(n - j_{h+1}))q_0^{(h)}/p_h$, $h = 0, \dots, r-1$ *ed in esso i termini di* $\tilde{q}^{(h)}$*-grado massimo sono quelli contenuti nel polinomio* $\lambda^{n-j_{h+1}}\widetilde{P}_h(\lambda, s)$.

2. Sia $|s| = \sum_{k=1}^{\nu} |s_k|^{1/q_k}$, $|s|_h = \sum_{k=1}^{\nu} |s_k|^{1/q_k^{(h)}}$, $s \in C^\nu$ e per $s \neq 0$ $s' = \sigma' + i\tau' = (s'_1, \dots, s'_\nu)$, $s'_k = s_k |s|_h^{-q_k^{(h)}}$, $h = 0, \dots, r-1$, ossia $s = |s|_h^{q^{(h)}} s'$. Per ognuno degli h indicati è sempre $|s'|_h = 1$ e

$$(2) \qquad |s|^{p_h/q_0^{(h)}} \leqslant |s|_h \leqslant C\,|s|^{p_h/q_0^{(h)}}.$$

Ponendo nella $(1')$ $t = | s |_h$ ed un fissato s' in luogo di s si ha

$$(3) \qquad \lim_{|s|_h \to +\infty} | s |_h^{-(m_{j_{h+1}} + p_h (n - j_{h+1})) q_0^{(h)} / p_h} P(| s |_h^{q_0^{(h)}} \lambda, | s |_h^{q^{(h)}} s') = \\ = \lambda^{n - j_{h+1}} \widetilde{P}_h(\lambda, s')$$

$h = 0, \ldots, r - 1$, uniformemente rispetto ad s'.

Per $h = 0$ i due polinomi in λ a primo ed a secondo membro di (3) hanno entrambi il polinomio P_0 di grado zero come coefficiente di λ^n. Gli zeri del polinomio in λ a primo membro, cioè quelli del polinomio in λ $P(| s |_0^{q_0^{(0)}} \lambda, | s |_0^{q^{(0)}} s')$, tenderanno quindi per $| s |_0 \to +\infty$ e per ogni s' fissato agli zeri del polinomio in λ a secondo membro, uniformemente rispetto ad s'. Per ogni s' fissato vi saranno perciò $n - j_1$ zeri del polinomio $P(| s |_0^{q_0^{(0)}} \lambda, s)$ che tendono a zero per $| s |_0 \to +\infty$, mentre gli altri j_1 tenderanno a quelli del polinomio $P_0(\lambda, s')$, uniformemente rispetto ad s'.

Supponiamo che *tutti i polinomi* $P_{j_h}(s)$, $h = 1, \ldots, r - 1$, *siano q-quasi-ellittici*, ossia che $P'_{j_h}(\sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \in R^\nu - \{ 0 \}$. Da ciò segue che per $\tau' = 0$

$$| P'_{j_h}(\sigma') | > C' \qquad \forall \sigma' \in R^\nu, \qquad | \sigma' |_h = 1 ,$$

$h = 1, \ldots, r - 1$, onde per $\varepsilon' > 0$ sufficientemente piccolo è pure

$$(4) \qquad | P'_{j_h}(s') | > C ,$$

$h = 1, \ldots, r - 1$, $\forall s' \in C^\nu$, $| s' |_h = 1$, $| \tau' |_h < \varepsilon'$.

Per $h \neq 0$ e per gli s' indicati il polinomio in λ a secondo membro di (3) è effettivamente di grado $n - j_h < n$, poichè in esso il coefficiente di $\lambda^{n - j_h}$ è $P'_{j_h}(s')$. D'altra parte nel polinomio a primo membro di (3) per $| s |_h \to +\infty$ i coefficienti di λ^{n-j} con $j < j_h$ e $j > j_{h+1}$ tendono a zero e quello di $\lambda^{n - j_h}$ tende a $P'_{j_h}(s')$, e ciò uniformemente rispetto ad s'. Per $| s |_h \to +\infty$ ed s' fissato con $| \tau' |_h = | s |_h^{-1} | \tau |_h < \varepsilon'$, vi sono quindi j_h zeri del polinomio in λ a primo membro di (3), cioè di $P(| s |_h^{q_0^{(h)}} \lambda, s)$, il cui modulo tende all'infinito [4]), $n - j_{h+1}$ zeri dello stesso polinomio che tendono a zero ed i rimanenti $j_{h+1} - j_h$ che tendono agli zeri del polinomio $\widetilde{P}_h(\lambda, s')$ e ciò uniformemente rispetto ad s'.

Ricordando che è $p_0 > p_1 > \ldots > p_{r-1} > 0$ e la (2), per le radici $\lambda_j(s)$, $j = 1, \ldots, n$, dell'equazione in λ $P(\lambda, s) = 0$, opportunamente ordinate, varranno quindi le maggiorazioni

$$(5) \qquad | \lambda_j(s) | \leqslant C_1 | s |_0^{q_0^{(0)}} \leqslant C | s |^{p_0},$$

$j = 1, \ldots, n$, per $| s |$ sufficientemente grande e

$$(6) \qquad | \lambda_j(s) \leqslant C_1 | s |_h^{q_0^{(h)}} \leqslant C | s |^{p_h},$$

$j = j_h + 1, \ldots, j_{h+1}$; $h = 1, \ldots, r - 1$, per $| s |$ sufficientemente grande e $| \tau |_h < \varepsilon' | s |_h$.

Supponiamo ora che, *oltre alle a) e b), $P(\tilde{s})$ soddisfi anche alla*

c) $\widetilde{P}_h(\varrho, \sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \in R^\nu - \{ 0 \}$ *e* $\forall \varrho \in R$, $h = 0, \ldots, r - 1$.

È $\widetilde{P}_h(0, \sigma) = P'_{j_{h+1}}(\sigma)$, onde *c*) implica che *i polinomi $P_{j_h}(s)$, $h = 1, \ldots, r$, sono tutti q-quasi-ellittici* e quindi in particolare vale la (4). *I numeri m_{j_h}, $h = 1, \ldots, r$, sono ora tutti interi positivi e coincidono con il grado ordinario dei polinomi $P_{j_h}(s)$; in particolare è $m_n = a$. Il numero p_0 coincide con l'ordine ridotto del polinomio $P(\tilde{s})$* [5]), poichè è $m_j/j \geqslant$ (grado $P_j)/j$, $j = 1, \ldots, n$ e quindi $p_0 = \max_{0<j\leqslant n} m_j/j = m_{j_1}/j_1 = \max_{0<j\leqslant n}$ (grado $P_j)/j$. Da *c*) segue inol-

---

[4]) Indicati con $a_j(s)$, $j = 0, \ldots, n$, i coefficienti di λ^{n-j} nel polinomio a primo membro di (3), si vede facilmente che il polinomio $| a_0(s) | \lambda^n + \ldots + | a_{j_h-1}(s) | \lambda^{n-j_h+1} - | a_{j_h}(s) | \lambda^{n-j_h} + | a_{j_h+1}(s) | \lambda^{n-j_h-1} + \ldots + | a_n(s) |$ ha uno zero positivo arbitrariamente grande se $| s |_h$ è sufficientemente grande. Tale polinomio ha dunque due zeri positivi $R_1(s)$ ed $R_2(s)$, $R_1(s) < R_2(s)$, con $R_2(s)$ tendente a $+\infty$ per $| s |_h \to +\infty$. Per un teorema di Pellet (cfr. per es.: [8], p. 99), il polinomio a primo membro di (3) ha quindi esattamente $n - j_h$ radici nel cerchio $| \lambda | \leqslant R_1$ e nessuna nella corona $R_1 < | \lambda | < R_2$.

[5]) Per la nozione di ordine ridotto cfr. [3].

tre che $P_0(\varrho, \sigma) \neq 0 \ \forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1} - \{ 0 \}$, onde P_0 è $\tilde{q}^{(0)}$-quasi-ellittico. *Se $r = 1$, $P(\tilde{s})$ è quindi $\tilde{q}_0$-quasi-ellittico. Chiameremo $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico un polinomio $P(\tilde{s})$ soddisfacente alle a), b), c).*

Indichiamo con $\lambda_{hk}(s')$, $h = 0, \dots, r-1$; $k = 1, \dots, j_{h+1} - j_h$, gli zeri dei polinomi in λ $\widetilde{P}_h(\lambda, s')$. Da c) segue che per $\tau' = 0$ esiste una costante positiva δ tale che

$$(7') \qquad | \operatorname{Im} \lambda_{hk}(\sigma') | > 4\delta, \qquad \forall \sigma' \in R^\nu, \qquad | \sigma' |_h = 1 .$$

Tenuto conto di (4) se $\varepsilon' > 0$ è sufficientemente piccolo sarà pure

$$| \operatorname{Im} \lambda_{hk}(s') | > 2\delta ,$$

$\forall s' \in C^\nu$, $| \tau' |_h < \varepsilon'$, $h = 0, \dots, r-1$; $k = 1, \dots, j_{h+1} - j_h$.

Per quanto precede varranno quindi per le radici $\lambda_j(s)$ le valutazioni

$$(7) \qquad | \operatorname{Im} \lambda_j(s) | > \delta \, | s |_h^{q_0^{(h)}} > \delta \, | s |^{p_h} ,$$

$j = j_h + 1, \dots, j_{h+1}$; $h = 0, \dots, r-1$, per $| s |$ sufficientemente grande e $| \tau |_h < \varepsilon' \, | s |_h$.

Viceversa, se $P(\tilde{s})$ soddisfa alle a) e b) e i polinomi $P_{j_h}(s)$, $h = 1, \dots, r-1$, sono q quasi-ellittici, allora dalle (7) segue che $P(\tilde{s})$ soddisfa alla c).

Osserviamo infine che per la (2) le condizioni $| \tau |_h < \varepsilon' \, | s |_h$, $h = 0, \dots, r-1$, equivalgono alla condizione $| \tau | < \varepsilon'' \, | s |$ per $\varepsilon'' > 0$ opportuno e che la condizione che sia $| s |$ sufficientemente grande e $| \tau | < \varepsilon'' \, | s |$ si può sostituire con la condizione che $| \sigma |$ sia sufficientemente grande e $| \tau | < \varepsilon \, | \sigma |$ per $\varepsilon > 0$ opportuno, dipendente soltanto da ε''. Si è così provato il

TEOREMA 1. – *Se il polinomio $P(\tilde{s})$ è $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico, i polinomi $P_{j_h}(s)$, di q-grado m_{j_h}, $h = 1, \dots, r$, sono tutti q-quasi-ellittici ed esistono due costanti positive C e δ tali che per* *ogni* $s = \sigma + i\tau$ *con* $|\tau| < \varepsilon |\sigma|$, $|\sigma| > L$, ε *ed* L *costanti positive opportune, le radici* $\lambda_j(s)$ *dell'equazione* $P(\lambda, s) = 0$ *verificano le* (6) *e* (7), *mentre la* (5) *è verificata qualunque sia* s, *con* $|s|$ *sufficientemente grande. Viceversa, se* $P(\tilde{s})$ *soddisfa alle* a) *e* b) *ed i polinomi* $P_{j_h}(s)$, $h = 1, \dots, r-1$, *sono* q*-quasi-ellittici, allora valgono le* (5) *e* (6) *e se valgono le* (7), $P(\tilde{s})$ *soddisfa alla ipotesi* c).

Osservazione per il caso $\nu = 1$. Se $\nu = 1$, è $q = q_1 = 1$ e $P'_j(s) = c_j s^{m_j}$, $j = 0, \dots, n$, con c_j costanti. Pertanto

$$\tilde{P}_h(\lambda, s) = s^{m_{j_h}} \sum_{\substack{j_h \\ m_j = m_j^*}}^{j_{h+1}} c_j \lambda^{j_{h+1}-j} s^{\nu_h(j-j_h)} = s^{m_{j_h}} Q'_h(\lambda, s)$$

$h = 0, \dots, r-1$. I polinomi $Q'_h(\tilde{s})$ sono ancora $\tilde{q}^{(h)}$-quasi omogenei, inoltre è sempre $Q'_h(\varrho, 0) \neq 0$, $\forall \varrho \neq 0$. L'ipotesi c) è perciò equivalente alla

c_1) *i polinomi* $Q'_h(\tilde{s})$ *sono* $\tilde{q}^{(h)}$*-quasi-ellittici.*

I polinomi in λ $\tilde{P}_h(\lambda, s)$ e $Q'_h(\lambda, s)$ hanno entrambi gli stessi zeri per ogni $h = 0, \dots, r-1$. Ripetendo i ragionamenti fatti più sopra si vede che le (6) valgono ora per ogni s, con $|s|$ sufficientemente grande.

3. Sia $\tilde{s}$ radice di $P(\tilde{s}) = 0$; sarà $\tilde{s} = (\lambda_j(s), s)$ per un certo j, $j_h + 1 \leqslant j \leqslant j_{h+1}$, $h = 0, \dots, r-1$. Per $|\tau|_h \geqslant \varepsilon' |\sigma|_h$, utilizzando la (5) e la (2) si ha

$$|\varrho| + |\eta| \leqslant C |s|^{\nu_0} + C_1 \leqslant C_2 |s|_h^{\nu_0 q_0^{(h)}/\nu_h} + C_1 \leqslant C_2(|\sigma|_h + |\tau|_h)^{\nu_0 q_0^{(h)}/\nu_h} + C_1 \leqslant C_3 |\tau|_h^{\nu_0 q_0^{(h)}/\nu_h} + C_1$$

e quindi

$$|\tau|_h \geqslant C_4(|\varrho| + |\eta|)^{\nu_h/q_0^{(h)}\nu_0} - C_5 \geqslant C_4 |\varrho|^{\nu_h/q_0^{(h)}\nu_0} - C_5\,,$$

da cui

$$(8)\qquad \sum_{1}^{\nu}{}_k \,|\,\tau_k\,|^{1/q_k^{(h)}} \geqslant C_6(\,|\,\varrho\,|^{p_h/q_0^{(h)}p_0} + \sum_{1}^{\nu}{}_k\,|\,\sigma_k\,|^{1/q_k^{(h)}}) - C_7\,.$$

Se invece è $|\,\tau\,|_h < \varepsilon'\,|\,\sigma\,|_h$ dalle (6) e (7) segue

$$|\,\eta\,|^{1/q_0^{(h)}} \geqslant \delta^{1/q_0^{(h)}}\,|\,s\,|_h - C_1 \geqslant C_2(\,|\,\varrho\,| + |\,\eta\,|\,)^{1/q_0^{(h)}} - C_3 \geqslant$$

$$\geqslant C_4\,(\,|\,\varrho\,|^{1/q_0^{(h)}} + |\,\eta\,|^{1/q_0^{(h)}}) - C_5 \geqslant C_6(\,|\,\varrho\,|^{1/q_0^{(h)}} + |\,\sigma\,|_h) - C_7$$

da cui

$$(9)\qquad |\,\eta\,| \geqslant C_8(\,|\,\varrho\,| + \sum_{1}^{\nu}{}_k\,|\,\sigma_k\,|^{q_0^{(h)}/q_k^{(h)}}) - C_9\,.$$

Utilizzando la (2) si vede facilmente che quando vale la (8) è pure

$$\sum_{1}^{\nu}{}_k\,|\,\tau_k\,| \geqslant C_1(|\,\varrho\,|^{1/p_0} + \sum_{1}^{\nu}{}_k\,|\,\sigma_k\,|^{1/q}\,) - C_2\,.$$

Questa e la (9) forniscono per ogni $\tilde{s}$ radice di $P(\tilde{s}) = 0$ la maggiorazione

$$(10)\quad |\,\eta\,| + \sum_{1}^{\nu}{}_k\,|\,\tau_k\,| \geqslant C_3(|\,\varrho\,|^{1/\beta_0} + \sum_{1}^{\nu}{}_k\,|\,\sigma_k\,|^{1/\beta_k}) - C_4\,,$$

con $\beta_0 = \max\,(1, p_0)$, $\beta_k = \max\,(q_k, q_k/p_{r-1})$, $k = 1, \ldots, \nu$.

È dunque

$$\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\nu) = \begin{cases} (p_0, q) & \text{se} \quad p_{r-1} \geqslant 1, \\ (p_0, q/p_{r-1}) & \text{se} \quad p_{r-1} < 1,\ p_0 \geqslant 1, \\ (1, q/p_{r-1}) & \text{se} \quad p_0 < 1, \end{cases}$$

ossia $\beta_l = \max\,(q_l^{(0)}, q_l^{(r-1)})$, $l = 0, \ldots, \nu$.

Sia ora $x_0 \in R$, $x = (x_1, \ldots, x_\nu) \in R^\nu$, $D = (D_0, \ldots, D_\nu)$, $D_0 = -\,i\partial/\partial x_0$, $D_k = -\,i\partial/\partial x_k$, $k = 1, \ldots, \nu$. Dalla (10), per noti risultati [6]), segue il

[6]) Cfr. [7], cap. IV.

TEOREMA 2. – *Se il polinomio $P(\tilde{s})$ è $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi--ellittico, allora esso è ipoellittico e tutte le soluzioni $u(x_0, x)$ (nel senso delle distribuzioni) dell'equazione $P(D)u = 0$ appartengono alla classe di Gevrey $G_{\tilde{\beta}}$, con $\beta_l = \max(q_l^{(0)}, q_l^{(r-1)})$, $l = 0, \ldots, \nu$.*

Come è noto ciò significa che per ogni compatto $K \in R^{\nu+1}$ e per ognuna delle $u(x_0, x)$ indicate esistono delle costanti positive $C, A_0, A_1, \ldots, A_\nu$ tali che

$$| D^{\tilde{\alpha}} u | \leqslant C A_0^{\alpha_0} A_1^{\alpha_1} \ldots A_\nu^{\alpha_\nu} \alpha_0^{\beta_0 \alpha_0} \alpha_1^{\beta_1 \alpha_1} \ldots \alpha_\nu^{\beta_\nu \alpha_\nu}$$

$\forall (x_0, x) \in K$ e $\forall \tilde{\alpha} \in R^{\nu+1}$ (α_l interi non negativi, $l = 0, \ldots, \nu$).

Ritornando alle valutazioni per le radici dell'equazione $P(\tilde{s}) = 0$, osserviamo che se per una di esse è $\eta = 0$ le (7) assicurano che potrà essere soltanto $|\tau|_h \geqslant \varepsilon' |\sigma|_h$ oppure $|\tau|_h < < \varepsilon' |\sigma|_h$ con $|\sigma|_h$ limitato. In questo secondo caso anche $\lambda_j = \varrho$ è limitato, onde se $\eta = 0$ vale in ogni caso la (8). Osserviamo inoltre che per $h = 0, \ldots, r-1$ è

$$\frac{q_0^{(h)}}{q_k^{(h)}} = \frac{p_h}{q_k} \geqslant \frac{p_{r-1}}{q_k}, \ k = 1, \ldots, \nu; \qquad \frac{p_h q_l^{(h)}}{p_0 q_0^{(h)}} = \frac{q_l}{p_0}, \ l = 1, \ldots, \nu;$$

$$\frac{q_l^{(h)}}{q_k^{(h)}} = \frac{q_l}{q_k}, \qquad l, k = 1, \ldots, \nu,$$

onde per $\tilde{s} = (\varrho + i\eta, \sigma + i\tau)$ radice di $P(\tilde{s}) = 0$ varranno le

$$(11) \qquad |\eta| \geqslant C_1(|\varrho| + \sum_{1}^{\nu}{}_k |\sigma_k|^{p_{r-1}/q_k}) - C_2,$$

se è $\tau_k = 0$ per ogni $k = 1, \ldots, \nu$;

$$(12) \qquad |\tau_l| \geqslant C_1(|\varrho|^{q_l/p_0} + \sum_{1}^{\nu}{}_k |\sigma_k|^{q_l/q_k}) - C_2, \qquad l = 1, \ldots, \nu,$$

se $\eta = 0$ e $\tau_k = 0$ per $k \neq l$, $k = 1, \ldots, \nu$.

Dalle (11) e (12) si traggono delle valutazioni per gli esponenti γ_k^l di $\binom{l}{k}$ -ipoellitticità di $P(\tilde{s})$, l, $k = 0, \ldots, \nu$: [7])

$$\gamma_0^0 = 1; \quad \gamma_l^0 \geqslant \frac{p_{r-1}}{q_l}, \quad \gamma_0^l \geqslant \frac{q_l}{p_0}, \qquad l = 1, \ldots, \nu;$$

$$\gamma_k^l \geqslant \frac{q_l}{q_k}, \quad l \neq k, \ l, \ k = 1, \ldots, \nu; \qquad \gamma_k^k = 1, \ k = 1, \ldots, \nu .$$

Mostriamo che in queste valutazioni vale sempre il segno eguale.

Se infatti fosse $\gamma_l^0 > p_{r-1}/q_l$, risulterebbe

$$| \eta | \geqslant C_1 | \sigma_l |^{\beta/q_l} - C_2$$

per ogni $\tilde{s} = (\varrho + i\eta, \sigma)$ radice di $P(\tilde{s}) = 0$, con $\beta = \gamma_l^0 q_l > p_{r-1}$. D'altra parte dal teorema 1 sappiamo che per $\tilde{s} = (\lambda_j(\sigma), \sigma)$, $j = j_{r-1} + 1, \ldots, n$, è $P(\tilde{s}) = 0$ e

$$| \lambda_j(\sigma) | \leqslant C(\sum_1^{\nu}{}_k | \sigma_k |^{1/q_k})^{p_{r-1}} + C_3 , \quad \forall \sigma \in R^\nu .$$

Dovrebbe quindi essere

$$C(\sum_1^{\nu}{}_k | \sigma_k |^{1/q_k})^{p_{r-1}} + C_3 \geqslant C_1 | \sigma_l |^{\beta/q_l} - C_2, \quad \forall \sigma \in R^\nu$$

ciò che è impossibile per $\beta > p_{r-1}$.

Se fosse $\gamma_0^l > q_l/p_0$, sarebbe

$$| \tau_l | \geqslant C_1 | \varrho |^{q_l/\beta} - C_2$$

con $\beta = q_l/\gamma_0^l < p_0$, per ogni $\tilde{s} = (\varrho, s)$, con $\tau_k = 0$ per ogni $k \neq l$, radice di $P(\tilde{s}) = 0$. Per $\varrho \neq 0$ scriviamo la (1) con $h = 0$,

---

[7]) Per la nozione di $\binom{l}{k}$-ipoellitticità cfr. [4] e [6].

$\varrho' = \varrho / |\varrho|$ in luogo di λ e $|\varrho|^{1/p_0}$ in luogo di t:

$$\lim_{|\varrho|\to+\infty} |\varrho|^{-n} P(|\varrho|\varrho', |\varrho|^{q/p_0}s) = \varrho'^{n-j_1}\widetilde{P}_0(\varrho', s) .$$

Consideriamo le $P(|\varrho|\varrho', |\varrho|^{q/p_0}s) = 0$ e $\widetilde{P}_0(\varrho', s) = 0$ come equazioni in s_l, con $\tau_k = 0$ per $k \neq l$ e i σ_k con $k \neq l$ comunque fissati. I moduli delle radici della seconda di queste sono limitati da una costante dipendente soltanto dai σ_k, $k \neq l$. Vi saranno quindi radici della prima equazione anch'esse limitate in modulo da una costante dipendente soltanto dai σ_k con $k \neq l$, non appena $|\varrho|$ sia sufficientemente grande. Se s_l^* è una di tali radici è dunque

$$|\varrho|^{q_l/p_0} |s_l^*| \leqslant C_3 |\varrho|^{q_l/p_0}$$

per ogni ϱ di modulo sufficientemente grande, con C_3 dipendente soltanto dai σ_k con $k \neq l$. D'altra parte, per quanto si è supposto, se $\tilde{s} = (\varrho, s)$ con $s_k = |\varrho|^{q_k/p_0}\sigma_k$ per $k \neq l$ e $s_l = |\varrho|^{q_l/p_0}s_l^*$ deve essere

$$|\varrho|^{q_l/p_0} |s_l^*| \geqslant C_1 |\varrho|^{q_l/\beta} - C_2, \qquad \forall \varrho \in R$$

che è in contraddizione con la precedente poichè si è supposto $\beta < p_0$.

È chiaro infine che qualunque sia $\varrho \in R$ fissato, per gli zeri del polinomio in s $P(\varrho, s)$ vale la (12), onde gli esponenti di $\binom{l}{k}$-ipoellitticità, $l, k = 1, \ldots, \nu$, di tale polinomio sono non inferiori a q_l/q_k. Per un teorema di Grušin [8]), tali esponenti sono pertanto proprio eguali a q_l/q_k. Pertanto neppure gli esponenti di $\binom{l}{k}$-ipoellitticità, $k, l = 1, \ldots, \nu$, di $P(\tilde{s})$ potranno superare q_l/q_k.

In particolare avremo dunque

$$\gamma_l^0 \gamma_0^l = \frac{p_{r-1}}{p_0}, \quad l = 1, \ldots, \nu \quad \text{e} \quad \gamma_k^l \gamma_l^k = 1, \qquad k, l = 1, \ldots, \nu .$$

[8]) Cfr. [6], teorema 2.3.

Per un risultato di Grušin [9]) il polinomio P potrà quindi essere quasi-ellittico soltanto se anche $p_{r-1}/p_0 = 1$, ossia solo se è $r = 1$.

È così provato il

TEOREMA 3. – *Se il polinomio P è $(\tilde{q}^{(0)}, \ldots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico, allora esso è ipoellittico e i suoi esponenti di $\begin{pmatrix} l \\ k \end{pmatrix}$-ipoellitticità sono dati da*

$$\gamma_0^0 = 1; \quad \gamma_l^0 = \frac{p_{r-1}}{q_l}, \quad \gamma_0^l = \frac{q_l}{p_0}, \quad l = 1, \ldots, \nu; \quad \gamma_k^l = \frac{q_l}{q_k}, \quad k, l = 1, \ldots, \nu .$$

In particolare P risulta quasi-ellittico se e soltanto se $r = 1$; in tal caso esso è $\tilde{q}^{(0)}$-quasi-ellittico.

4. *Supponiamo che $P(\tilde{s})$ soddisfi alle ipotesi a) e b)* e poniamo

$$P'(\tilde{s}) = \sum_{\substack{0 \\ m_j = m_j^*}}^{n}{}_j \, \lambda^{n-j} P'_j(s) .$$

È

$$(P') = \bigcup_{0}^{r-1}{}_h \{\tilde{\gamma} \in R^{\nu+1} : \tilde{\gamma} = (n - j_{h+1} + \alpha_0, \alpha), \tilde{\alpha} \in (\widetilde{P}_h)\},$$

inoltre se i polinomi P_{j_h}, $h = 1, \ldots, r$, sono q-quasi-ellittici, ciò che accade in particolare quando $P(\tilde{s})$ soddisfa alla c),

$$\alpha = e^{(k)} m_{j_h}/q_k \Rightarrow (n - j_h, \alpha) \in (P'), \; k = 1, \ldots, \nu; \; h = 0, \ldots, r-1$$

La ipotesi c) relativa al polinomio $P'(\tilde{s})$ coincide con la stessa ipotesi relativa al polinomio $P(\tilde{s})$. Le conclusioni dei teoremi 1, 2, 3 valgono quindi anche per il polinomio $P'(\tilde{s})$.

---

[9]) Cfr. [6], p. 536.

Dalla diseguaglianza

$$a^{m_j^*} \leqslant \varepsilon a^{m_{j_{h+1}}} + \varepsilon^{-\frac{m_j^* - m_{j_h}}{m_{j_{h+1}} - m_j^*}} a^{m_{j_h}}$$

$j_h < j < j_{h+1}$, $h = 0, \ldots, r-1$, valida per ogni $a \geqslant 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$, scegliendo $\varepsilon = b^{j - j_{h+1}}$, $b > 0$, si trae

$$b^{n-j} a^{m_j^*} \leqslant b^{n-j_{h+1}} a^{m_{j_{h+1}}} + b^{n-j_h} a^{m_{j_h}} \tag{13}$$

per ogni $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $j_h < j < j_{h+1}$, $h = 0, \ldots, r-1$ e quindi

$$\sum_{0}^{r}{}_h\, b^{n-j_h} a^{m_{j_h}} \leqslant \sum_{0}^{n}{}_j\, b^{n-j} a^{m_j^*} \leqslant C \sum_{0}^{r}{}_h\, b^{n-j_h} a^{m_{j_h}}$$

per ogni $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. Ne segue che

$$| P'(\tilde{s}) | \leqslant C_1 \sum_{0}^{n}{}_j\, | \lambda |^{n-j} | s |^{m_j^*} \leqslant C_2 \sum_{0}^{r}{}_h\, | \lambda |^{n-j_h} | s |^{m_{j_h}},$$

$\forall \tilde{s} = (\lambda, s) \in C^{\nu+1}$. È inoltre

$$| P(\tilde{s}) - P'(\tilde{s}) | \leqslant \sum_{m_j = m_j^*}{}_j\, | \lambda |^{n-j} | P_j(s) - P_j'(s) | +$$

$$+ \sum_{m_j < m_j^*}{}_j\, | \lambda |^{n-j} | P_j(s) | \leqslant C_1 \sum_{1}^{n}{}_j\, | \lambda |^{n-j} (| s |^{m_j^* - \mu} + 1) \leqslant$$

$$\leqslant C_2 (| s |^{-\mu} \sum_{1}^{n}{}_j\, | \lambda |^{n-j} | s |^{m_j^*} + | \lambda |^{n-1} + 1)$$

per un $\mu > 0$ che possiamo sempre supporre minore di $\inf_h (m_{j_h} - m_{j_{h-1}})$ e di $m_1^* = p_0$.

Dalla diseguaglianza

$$a^{m_j^*} \leqslant \varepsilon a^{m_{j_1}} + \varepsilon^{-\frac{m_j^* - m_1^*}{m_{j_1} - m_j^*}} a^{m_1^*}$$

$1 < j < j_1$, valida per ogni $a \geqslant 0$ e per ogni $\varepsilon > 0$, scegliendo

$\varepsilon = b^{j-j_1}$, $b > 0$, si trae

$$b^{n-j}a^{m_j^*} \leqslant b^{n-j_1}a^{m_{j_1}} + b^{n-1}a^{m_1^*}$$

per ogni $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $1 < j < j_1$. Utilizzando quest'ultima maggiorazione, la (13) per $h = 1, \dots, r-1$ e le

$$|\lambda|^{n-1} \leqslant |\lambda|^{n-j_1}(|\lambda|^{1/p_0} + |s|)^{m_{j_1}-p_0},$$
$$|s|^{m_1^*-\mu} \leqslant (|\lambda|^{1/p_0} + |s|)^{p_0-\mu},$$

si ottiene

$$|P(\tilde{s}) - P'(\tilde{s})| \leqslant C_1(\sum_1^r{}_h |\lambda|^{n-j_h}|s|^{m_{j_h}-\mu} + |\lambda|^{n-1}|s|^{m_1^*-\mu} +$$
$$+ |\lambda|^{n-1} + 1) \leqslant C_2(\sum_1^r{}_h |\lambda|^{n-j_h}|s|^{m_{j_{h-1}}}(|\lambda|^{1/p_{h-1}} +$$
$$+ |s|)^{m_{j_h}-m_{j_{h-1}}-\mu} + |\lambda|^{n-j_1}(|\lambda|^{1/p_0} + |s|)^{m_{j_1}-\mu} + 1)$$

e per $|\lambda|^{1/p_0} + |s| > C > 1$

$$|P(\tilde{s}) - P'(\tilde{s})| \leqslant C_3[(|\lambda|^{1/p_0} + |s|)^{-\mu}\sum_1^r{}_h |\lambda|^{n-j_h}|s|^{m_{j_{h-1}}}\cdot$$
$$\cdot(|\lambda|^{1/p_{h-1}} + |s|)^{m_{j_h}-m_{j_{h-1}}} + 1] \leqslant C_4[(|\lambda|^{1/p_0} +$$
$$+ |s|)^{-\mu}\sum_0^r{}_h |\lambda|^{n-j_h}|s|^{m_{j_h}} + 1],$$

onde, qualunque sia $\varepsilon > 0$, per $|\lambda| + |s|$ sufficientemente grande

$$|P(\tilde{s}) - P'(\tilde{s})| \leqslant \varepsilon \sum_0^r{}_h |\lambda|^{n-j_h}|s|^{m_{j_h}}. \tag{14}$$

Supponiamo che, oltre alle a), b), $P(\tilde{s})$ soddisfi anche alla c). Per $t > 0$ è

$$\tilde{P}_h(t^{q_0^{(h)}}\varrho, t^{q^{(h)}}\sigma) / P'_{j_h}(t^{q^{(h)}}\sigma) = t^{q_0^{(h)}(j_{h+1}-j_h)}\tilde{P}_h(\varrho, \sigma)/P'_{j_h}(\sigma),$$

$\forall \varrho \in R$ e $\forall \sigma \in R^\nu - \{0\}$, $h = 0, \ldots, r-1$, e poichè $m_j^* > m_{j_h}$ per $j_h < j \leqslant j_{h+1}$, il limite per $\sigma \to 0$ del rapporto a secondo membro è diverso da zero per $\varrho \neq 0$. Per c) tale rapporto è quindi diverso da zero per ogni $(\varrho, \sigma) \neq 0$. Per tali ϱ e σ posto $t^{-1} = |\varrho|^{1/q_0^{(h)}} + \sum_1^\nu{}_k |\sigma_k|^{1/q_k^{(h)}}$, il rapporto a primo membro della eguaglianza scritta qui sopra resta in modulo non inferiore ad una costante positiva e quindi

$$|\widetilde{P}_h(\varrho, \sigma)/P'_{j_h}(\sigma)| \geqslant C_1(|\varrho|^{1/q_0^{(h)}} + \sum_1^\nu{}_k |\sigma_k|^{1/q_k^{(h)}})^{q_0^{(h)}(j_{h+1}-j_h)}$$

$\forall \varrho \in R$ e $\forall \sigma \in R^\nu$, $h = 0, \ldots, r-1$. Da questa, per la q-quasi-ellitticità dei polinomi P_{j_h} segue

$$(15) \qquad |\widetilde{P}_h(\varrho, \sigma)| \geqslant C_2 |\sigma|^{m_{j_h}}(|\varrho|^{1/q_0^{(h)}} + \sum_1^\nu{}_k |\sigma_k|^{1/q_k^{(h)}})^{q_0^{(h)}(j_{h+1}-j_h)}$$

$\forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1}$, $h = 0, \ldots, r-1$. Viceversa, se valgono queste maggiorazioni, $P(\bar{s})$ soddisfa alla c). Dalle (15) segue inoltre

$$\sum_0^{r-1}{}_h |\varrho|^{n-j_{h+1}} |\widetilde{P}_h(\varrho, \sigma)| \geqslant C_3 \sum_0^{r-1}{}_h |\varrho|^{n-j_{h+1}} |\sigma|^{m_{j_h}}(|\varrho|^{j_{h+1}-j_h} +$$

$$+ |\sigma|^{m_{j_{h+1}}-m_{j_h}}) \geqslant C_4 \sum_0^r{}_h |\varrho|^{n-j_h} |\sigma|^{m_{j_h}} \geqslant C_5 |P'(\varrho, \sigma)|$$

$\forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1}$ e quindi dalla (14) per $|\varrho| + |\sigma|$ sufficientemente grande

$$(16) \qquad |P(\varrho, \sigma) - P'(\varrho, \sigma)| \leqslant \varepsilon \sum_0^{r-1}{}_h |\varrho|^{n-j_{h+1}} |\widetilde{P}_h(\varrho, \sigma)| .$$

Supposto ancora che $P(s)$ soddisfi alle a) e b), sia inoltre

$$d) \quad |P'(\varrho, \sigma)| \geqslant C \sum_0^r{}_h |\varrho|^{n-j_h} |\sigma|^{m_{j_h}} \quad per \quad |\varrho| + \sigma| \geqslant C_0 . \qquad {}^{10})$$

---

[10]) Questa ipotesi è in particolare soddisfatta se $P(\bar{s})$ è quasi-ellittico.

Osserviamo che per (1) da *d*) segue

$$| \tilde{P}_h(\varrho, \sigma) | \geqslant C | \sigma |^{m_{j_h}} (| \varrho |^{j_{h+1}-j_h} + | \sigma |^{p_h(j_{h+1}-j_h)}) \geqslant$$

$$\geqslant C_1 | \sigma |^{m_{j_h}} (| \varrho |^{1/q_0^{(h)}} + \sum_0^{\nu}{}_k | \sigma_k | ^{1/q_k^{(h)}})^{q_0^{(h)}(j_{h+1}-j_h)}$$

$\forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1}$, $h = 0, \dots, r-1$, onde la *c*) è soddisfatta. Da (14) e *d*) per $| \varrho | + | \sigma |$ sufficientemente grande segue inoltre

$$(17) \qquad | P(\varrho, \sigma) - P'(\varrho, \sigma) | \leqslant \varepsilon | P'(\varrho, \sigma) |$$

e

$$C \sum_0^r{}_h | \varrho |^{n-j_h} | \sigma |^{m_{j_h}} \leqslant | P'(\varrho, \sigma) | \leqslant | P'(\varrho, \sigma) - P(\varrho, \sigma) | +$$

$$+ | P(\varrho, \sigma) | \leqslant \varepsilon \sum_0^r{}_h | \varrho |^{n-j_h} | \sigma |^{m_{j_h}} + | P(\varrho, \sigma) |$$

onde anche $P(\tilde{s})$ soddisfa alla *d*) per un opportuno C_0. Allo stesso modo si vede che se $P(\tilde{s})$ soddisfa alla *d*) ciò accade anche per $P'(\tilde{s})$. Si vede subito inoltre che se la *d*) è soddisfatta (da P o da P'), per $| \varrho | + | \sigma |$ sufficientemente grande è

$$(18) \qquad C_1 | P(\varrho, \sigma) | \leqslant | P'(\varrho, \sigma) | \leqslant C_2 | P(\varrho, \sigma) |$$

Riassumendo abbiamo il

TEOREMA 4. – *Se il polinomio* $P(\tilde{s})$ *soddisfa alle a*) *e b*), *allora vale la* (14) *e*: 1) *le maggiorazioni* (15) *sono equivalenti alla ipotesi c*) *e se questa è soddisfatta vale la* (16); 2) $P'(\tilde{s})$ *soddisfa alla d*) *se e soltanto se questa è soddisfatta da* $P(\tilde{s})$ *e in tal caso anche la c*) *è soddisfatta e valgono le* (17) *e* (18).

Da quanto precede appare che *il polinomio* $P'(\tilde{s})$ *ha il ruolo di parte principale del polinomio* $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$*-quasi-ellittico* $P(\tilde{s})$.

5. Siano $0 = j_0 < j_1 < \ldots < j_r = n$ numeri naturali e

$$Q_h(\tilde{s}) = \sum_{j_h}^{j_{h+1}}{}_j \lambda^{j_{h+1}-j} Q_{hj}(s)$$

polinomi $\tilde{q}^{(h)}$*-quasi-ellittici*, $h = 0, \ldots, r-1$. Per $j_h \leqslant j \leqslant j_{h+1}$ è quindi

$$q^{(h)}\text{-grado } Q_{hj} = (q\text{-grado } Q_{hj}) q_0^{(h)}/p_h \leqslant q_0^{(h)}(j - j_h)$$

il segno eguale verificandosi certamente per $j = j_h$ e $j = j_{h+1}$. Posto

$$Q'_h(\tilde{s}) = \sum_{j_h}^{j_{h+1}}{}_j \lambda^{j_{h+1}-j} Q'_{hj}(s)$$

ove $Q'_{hj}(s)$ contiene soltanto i termini di $Q_{hj}(s)$ aventi $q^{(h)}$-grado eguale a $q_0^{(h)}(j - j_h)$, è $Q'_h(\varrho, \sigma) \neq 0 \ \ \forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1} - \{0\}$.

Consideriamo il polinomio

$$Q(\tilde{s}) = \prod_0^{r-1}{}_i Q_i(\tilde{s}) .$$

Esso soddisfa certamente alle ipotesi *a*) e *b*). Cerchiamo i termini di $Q(\tilde{s})$ di $\tilde{q}^{(h)}$-grado massimo. Essi saranno costituiti dai prodotti dei termini di $\tilde{q}^{(h)}$-grado massimo di ciascuno dei polinomi Q_i, $i = 0, \ldots, r-1$. Si ha

$$q_0^{(h)}(j_{i+1} - j) + q^{(h)}\text{-grado } Q_{ij} \leqslant (p_h(j_{i+1} - j) +$$

$$+ p_i(j - j_i)) q_0^{(h)}/p_h, \qquad j_i \leqslant j \leqslant j_{i+1},$$

il segno eguale verificandosi certamente per $j = j_i$ e $j = j_{i+1}$. Ne segue che

$$\max_{\tilde{\alpha} \in (Q_i)} \; < \tilde{q}^{(h)}, \tilde{\alpha} > = \begin{cases} q_0^{(h)}(j_{i+1} - j_i) & \text{per} \quad h \leqslant i \\ p_i(j_{i+1} - j_i) q_0^{(h)}/p_h & \text{per} \quad h > i , \end{cases}$$

e che il complesso dei termini di $\tilde{q}^{(h)}$-grado massimo del polinomio $Q_i(\tilde{s})$ è dato da

$$Q_{ij_i}\lambda^{j_{i+1}-j_i} \text{ se } h < i,\ Q'_h(\tilde{s}) \text{ se } h = i,\ Q'_{ij_{i+1}}(s) \text{ se } h > i.$$

Pertanto il complesso dei termini di $\tilde{q}^{(h)}$-grado massimo in $Q(\tilde{s})$ è dato da

$$\lambda^{n-j_1}Q'_0(\tilde{s}) \quad \text{per} \quad h = 0,$$

$$\lambda^{n-j_h+1}Q'_h(\tilde{s})\prod_0^{h-1}{}_i\, Q'_{ij_{i+1}}(s) \quad \text{per} \quad h = 1, \dots, r-1 .$$

Il $\tilde{q}^{(h)}$-grado di $Q(\tilde{s})$ è eguale a $q_0^{(h)}(n-j_h) + \sum_0^{h-1}{}_i\, p_i(j_{i+1}-j_i)q_0^{(h)}/p_h$ per $h = 1, \dots, r-1$ ed eguale a $p_0 n$ per $h = 0$. I polinomi $Q'_{ij_{i+1}}(s)$, $i = 0, \dots, r-1$, sono tutti q-quasi-omogenei di q-grado eguale a $p_i(j_{i+1} - j_i)$ e q-quasi-ellittici. I polinomi $\prod_0^{h-1}{}_i\, Q'_{ij_{i+1}}(s)$, $h = 1, \dots, r-1$, sono quindi ancora q-quasi-omogenei di q-grado eguale a $\sum_0^{h-1}{}_i\, p_i(j_{i+1} - j_i) = m_{j_h}$ ed ancora q-quasi-ellittici. Nel caso attuale è dunque

$$\text{(19)} \quad \tilde{Q}_0(\tilde{s}) = Q'_0(\tilde{s}),\ \tilde{Q}_h(\tilde{s}) = Q'_h(\tilde{s})\prod_0^{h-1}{}_i\, Q'_{ij_{i+1}}(s),\ h = 1, \dots, r-1,$$

con $Q'_h(\varrho, \sigma) \neq 0 \quad \forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1} - \{ 0 \}$ e $\prod_0^{h-1}{}_i\, Q'_{ij_{i+1}}(\sigma) \neq 0 \quad \forall \sigma \in \in R^\nu - \{ 0 \}$, onde *il polinomio* $Q(\tilde{s})$ *soddisfa anche alla* c) *ed è quindi* $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$-*quasi-ellittico.* Per il teorema 3 esso è quasi-ellittico se e soltanto se $r = 1$, ossia se tutti i $\tilde{q}^{(h)}$ sono eguali. Si ritrova così un risultato di G. C. Barozzi [1] [11]).

Per $|\varrho| + |\sigma|$ sufficientemente grande è inoltre

$$|Q_h(\varrho, \sigma)| \geqslant C_1(|\varrho|^{j_{h+1}-j_h} + |\sigma|^{p_h(j_{h+1}-j_h)})$$

[11]) In questo lavoro sono studiate condizioni necessarie e sufficienti affinchè un polinomio prodotto di polinomi quasi-ellittici sia ancora quasi-ellittico.

e quindi

$$| Q(\varrho, \sigma) | \geqslant C_2 \sum_0^r {}_h | \varrho |^{n-j_h} | \sigma |^{m_{j_h}},$$

onde $Q(\tilde{s})$ *soddisfa anche all'ipotesi d).*

Anche il polinomio

$$T(\tilde{s}) = Q(\tilde{s}) + R(\tilde{s}) \tag{20}$$

con $R(\tilde{s}) = \sum_0^n {}_j \lambda^{n-j} R_j(s)$ avente $\tilde{q}^{(h)}$-grado minore di quello di $Q(\tilde{s})$, $h = 0, \dots, r-1$, è ancora $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico poichè è $\tilde{T}_h(\tilde{s}) = \tilde{Q}_h(\tilde{s})$, $h = 0, \dots, r-1$. Deve essere: q-grado $R_j(s) < m_{j_h} + p_h(j - j_h)$, $j_h \leqslant j \leqslant j_{h+1}$, $h = 0, \dots, r-1$. Ragionando come nel numero precedente si può quindi provare che qualunque sia $\varepsilon > 0$, per $| \lambda | + | s |$ sufficientemente grande è

$$| T(\tilde{s}) - Q(\tilde{s}) | \leqslant \varepsilon \sum_0^r {}_h | \lambda |^{n-j_h} | s |^{m_{j_h}},$$

onde, poichè Q soddisfa alla d), a questa soddisfa anche il polinomio $T(\tilde{s})$ e per $| \varrho | + | \sigma |$ sufficientemente grande è

$$| T(\varrho, \sigma) - Q(\varrho, \sigma) | \leqslant \varepsilon | Q(\varrho, \sigma) |. \tag{21}$$

Viceversa se per un polinomio $T(\tilde{s})$ soddisfacente alle a) e b) vale la (21), allora è $\tilde{T}_h(\tilde{s}) = \tilde{Q}_h(\tilde{s})$, $h = 0, \dots, r-1$, e quindi $T(\tilde{s})$ può scriversi nella forma (20). I polinomi della forma (20) si possono considerare equivalenti al polinomio $Q(\tilde{s})$ prodotto dei polinomi $\tilde{q}^{(h)}$-quasi-ellittici $\tilde{Q}_h(s)$, $h = 0, \dots, r-1$.

Se $\nu > 1$ esistono certamente dei polinomi P $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittici che non possono scriversi nella forma (20) e per i quali quindi non varrà la (21) comunque si scelgano i polinomi $\tilde{q}^{(h)}$-quasi-ellittici $Q_h(\tilde{s})$. Per questo occorre e basta che i polinomi $\tilde{P}_h(\tilde{s})$, $h = 0, \dots, r-1$, non siano tutti della forma (19). Ciò accade certamente se per almeno un h, $h = 1, \dots, r-1$, il polinomio $P'_{j_{h+1}}(s)$ non è divisibile per il polinomio $P'_{j_h}(s)$.

Un esempio è fornito dal polinomio

$$P(\tilde{s}) = \lambda^2 + P_1(s)\lambda + P_2(s)$$

con $P_1(s)$ e $P_2(s)$ q-quasi-ellittici di q-grado p_0 e $p_0 + p_1 < 2p_0$ rispettivamente, P'_1 a coefficienti immaginari puri e P'_2 a coefficienti reali e tali che $P'_2(s)$ non sia divisibile per $P'_1(s)$ [12]).

Più in generale, supposto che $P(\tilde{s})$ soddisfi alle a) e b), sia $T(\tilde{s}) = \sum_0^n{}_j \lambda^{n-j} T_j(s)$, con $T_j(s)$ polinomi di q-grado non superiore ad m^*_j. Se $P(\tilde{s}) = T(\tilde{s}) + R(\tilde{s})$, con $R(s)$ come nella (20), allora, qualunque sia $\varepsilon > 0$, per $|\lambda| + |s|$ sufficientemente grande

$$|T(\tilde{s}) - P(\tilde{s})| \leqslant \varepsilon \sum_0^r{}_h |\lambda|^{n-j_h} |s|^{m_{j_h}}.$$

Viceversa se qualunque sia $\varepsilon > 0$, per $|\varrho| + |\sigma|$ sufficientemente grande è

$$|T(\varrho, \sigma) - P(\varrho, \sigma)| \leqslant \varepsilon \sum_0^r{}_h |\varrho|^{n-j_h} |\sigma|^{m_{j_h}}, \tag{22}$$

dalla (1) segue che $\tilde{T}_h(\varrho, \sigma) = \tilde{P}_h(\varrho, \sigma)$ $\forall (\varrho, \sigma) \in R^{\nu+1}$, $h = 0, \dots, r-1$, e quindi $P(\tilde{s}) - T(\tilde{s}) = R(\tilde{s})$, con $R(\tilde{s})$ come nella (20).

Quanto precede si può riassumere nel

TEOREMA 5. – *Se $P(\tilde{s})$ soddisfa alle ipotesi a) e b) e $T(\tilde{s}) = \sum_0^n{}_j \lambda^{n-j} T_j(s)$, con $T_j(s)$ polinomi di q-grado non superiore a m^*_j, $j = 0, \dots, n$, allora la* (22) *vale se e soltanto se $P(\tilde{s}) = T(\tilde{s}) + R(\tilde{s})$, con $R(\tilde{s}) = \sum_0^n{}_j \lambda^{n-j} R_j(s)$ ed $R_j(s)$ polinomi di q-grado*

[12]) Per $\nu = 1$, J. Friberg ha annunziato in [2] che ogni polinomio $(\tilde{q}^{(0)}, \dots, \tilde{q}^{(r-1)})$-quasi-ellittico può scriversi nella forma (20), prendendo come polinomi $Q'_h(\tilde{s})$ quelli indicati alla fine del n. 2.

minore di m_j^*, $j = 1, \ldots, n$; *in tal caso è* $\widetilde{P}_h = \widetilde{T}_h$, $h = 0, \ldots, r-1$, *e, qualunque sia* $\varepsilon > 0$, *per* $|\varrho| + |\sigma|$ *sufficientemente grande*

$$| P(\varrho, \sigma) - T(\varrho, \sigma) | \leqslant \varepsilon \sum_{0}^{r-1}{}_h \, | \varrho |^{n-j_{h+1}} \, | \widetilde{T}_h(\varrho, \sigma) |$$

se $T(\tilde{s})$ *soddisfa alla c),*

$$| P(\varrho, \sigma) - T(\varrho, \sigma) | \leqslant \varepsilon \, | T(\varrho, \sigma) |$$

se $T(\tilde{s})$ *soddisfa alla d).*

6. Un caso particolare interessante si presenta quando $P(\tilde{s})$, oltre alle ipotesi *a*) e *b*), soddisfa all'ipotesi, più restrittiva della *c*),

$$c_\nu) \qquad \widetilde{P}_h(\lambda, \sigma) \neq 0$$

$\forall \sigma \in R^\nu - \{0\}$ *e* $\forall \lambda = \varrho + i\eta \in C$ *con* $\eta \leqslant 0$, $h = 0, \ldots, r-1$;

ossia quando gli zeri dei polinomi in λ $\widetilde{P}_h(\lambda, \sigma)$, $h = 0, \ldots, r-1$, hanno tutti parte immaginaria positiva per ogni $\sigma \in R^\nu - \{0\}$. Le maggiorazioni (7′) valgono quindi in questo caso senza il segno di valore assoluto a primo membro e così pure le maggiorazioni (7) che da esse conseguono. In particolare è

$$\operatorname{Im} \lambda_j(\sigma) > C_1 \, | \sigma |^{p_{r-1}} - C_2$$

$\forall \sigma \in R^\nu$, $j = 1, \ldots, n$, onde *se* $P(\tilde{s})$ *soddisfa alle a), b),* c_ν), *l'operatore* $P(D)$ *è parabolico nel senso di Šilov* [13]. Il numero p_0, che coincide con l'ordine ridotto del polinomio $P(\tilde{s})$, deve quindi essere maggiore di 1 [14]. Il vettore p_{r-1}/q di componenti p_{r-1}/q_k, $k = 1, \ldots, \nu$, si dice *coefficiente di parabolicità dell'operatore* $P(D)$.

---

[13]) Cfr. [3], cap. 3, § 2.
[14]) Cfr. loc. cit. in [13]).

Come già al n. 4, si riconosce facilmente che le maggiorazioni

$$|\widetilde{P}_h(\lambda, \sigma)| \geqslant C_1 |\sigma|^{m_{j_h}}\Big(|\lambda|^{1/q_0^{(h)}} + \sum_{1}^{\nu}{}_k |\sigma_k|^{1/q_k^{(h)}}\Big)^{q_0^{(h)}(j_{h+1}-j_h)}$$

$\forall \lambda \in C$ con $\eta \leqslant 0$ e $\forall \sigma \in R^\nu$, $h = 0, \ldots, r-1$, sono equivalenti alla c_ν) e che questa è certamente verificata se

$$d_\nu) \qquad |P'(\lambda, \sigma)| \geqslant C_2 \sum_{0}^{r}{}_h |\lambda|^{n-j_h} |\sigma|^{m_{j_h}}$$

$\forall \lambda \in C$ con $\eta \leqslant 0$ e $\forall \sigma \in R^\nu$, tali che $|\lambda| + |\sigma| \geqslant C_0$.

Tale maggiorazione è certamente verificata se $P(\tilde{s})$ soddisfa alle a), b), c_ν) con $r = 1$ nonchè quando $P(\tilde{s})$ è della forma (20) con $Q'_h(\lambda, \sigma) \neq 0$ $\forall \lambda \in C$ con $\eta \leqslant 0$ e $\forall \sigma \in R^\nu - \{0\}$, $h = 0, \ldots, r-1$. *Un altro caso in cui la d_ν) riesce soddisfatta si ha quando $P(\tilde{s})$ soddisfa alle a) e b) ed il polinomio in μ $P'(-i\mu, \sigma)$, $\mu = -\eta + i\varrho$, ha i coefficienti reali e tutti i suoi zeri $\mu_j(\sigma)$, $j = 1, \ldots, n$, contenuti in un settore $|\varrho| \leqslant C\eta$, $\eta > 0$, $C < 1$, per ogni $\sigma \in R^\nu - \{0\}$.*

Supposto $(-i)^n c_{00} > 0$, i coefficienti delle potenze μ^{n-j}, $j = 1, \ldots, n$, nel polinomio $P'(-i\mu, \sigma)$ sono tutti positivi per ogni $\sigma \in R^\nu - \{0\}$, onde è $m_j = m_j^*$ e $(-i)^{n-j} P'_j(\sigma) > C' |\sigma|^{m_j^*}$ $\forall \sigma \in R^\nu$, $j = 0, \ldots, n$. Se $\mu_j(\sigma)$ è reale per $\eta = -\operatorname{Re}\mu \leqslant 0$ si ha

$$|\mu - \mu_j(\sigma)|^2 \geqslant |\mu|^2 + (\mu_j(\sigma))^2 \geqslant 2^{-1}(|\mu| - \mu_j(\sigma))^2 .$$

Se $\operatorname{Im}\mu_j(\sigma) \neq 0$, sia $b = -2\operatorname{Re}\mu_j(\sigma)$ e $c = |\mu_j(\sigma)|^2$. Per le ipotesi fatte è allora $b^2 - 4c < 0$ e

$$b^2 - 2c = 2[(\operatorname{Re}\mu_j(\sigma))^2 - (\operatorname{Im}\mu_j(\sigma))^2] \geqslant b^2(1 - C^2)/2$$

onde per $\eta \leqslant 0$

$$|(\mu - \mu_j(\sigma))(\mu - \bar{\mu}_j(\sigma))|^2 = |\mu^2 + b\mu + c|^2 \geqslant (\eta^2 + \varrho^2)^2 + \\ + (b^2 - 2c)(\eta^2 + \varrho^2) + c^2 \geqslant |\mu|^4 + b^2(1 - C^2)|\mu|^2/2 + \\ + c^2 \geqslant C_1(|\mu|^2 + b|\mu| + c)^2 .$$

Per $\eta \leqslant 0$ e per ogni $\sigma \in R^{\nu}$ avremo dunque

$$| P'(-i\mu, \sigma) | = (-i)^n c_{00} \prod_1^n{}_j | \mu - \mu_j(\sigma) | \geqslant C_1 P'(-i | \mu |, \sigma) =$$

$$= C_1 \sum_0^n{}_j | \mu |^{n-j} (-i)^{n-j} P'_j(\sigma) \geqslant C_2 \sum_0^n{}_j | \mu |^{n-j} | \sigma |^{m_j^*},$$

da cui, tramite la (13), segue la d_ν).

BIBLIOGRAFIA

[1] G. C. BAROZZI: *Sul prodotto di polinomi quasi-ellittici.* « Boll. U.M.I. », (3), 20, 1965.

[2] J. FRIBERG: *Asymptotic behaviour of spectral functions for multi-quasi-elliptic differential operators.* Conferenza tenuta il 2 agosto 1965 al « Séminaire de Mathématiques Supérieures » dell'Università di Montréal.

[3] I. M. GEL'FAND, G. E. ŠILOV: *Alcune questioni della teoria delle equazioni differenziali* (*Funzioni generalizzate,* vol. 3), Mosca, 1958.

[4] E. A. GORIN: *Equazioni differenziali a derivate parziali a coefficienti costanti parzialmente ipoellittiche.* « Sibirskiĭ Mat. J. », 3, 1962.

[5] V. N. GORČAKOV: *Comportamento asintotico delle funzioni spettrali di una classe di operatori ipoellittici.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 152, 1963.

[6] V. V. GRUŠIN: *Connessioni fra proprietà locali e globali delle soluzioni delle equazioni ipoellittiche a coefficienti costanti.* « Mat. Sb. », 66, 1965.

[7] L. HÖRMANDER: *Linear partial differential operators.* Springer, 1963.

[8] M. MARDEN: *The geometry of the zeros of a polynomial in a complex variable.* « Am. Math. Soc. », 1949.

[9] S. M. NIKOL'SKIĬ: *Primo problema al contorno per una generale equazione lineare.* Doklady Akad. Nauk SSSR, 146, 1962.

[10] B. PINI: *Proprietà locali delle soluzioni di una classe di equazioni ipoellittiche.* « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, » 32, 1962.

[11] B. PINI: *Sulla classe di Gevrey delle soluzioni di certe equazioni ipoellittiche.* « Boll. U.M.I. », (3), 18, 1963.

[12] L. P. VOLEVIC: *Proprietà locali delle soluzioni dei sistemi quasi-ellittici.* « Mat. Sb. », 59, 1962.

Manoscritto pervenuto in redazione il 22 settembre 1965.