

RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO

CLAUDIO MARGAGLIO

TOMASO MILLEVOI

**Considerazioni sulla conferenza tenuta da M.
Baldassarri a Torino nel 1961 : « Osservazioni
sulla struttura dei fasci lisci »**

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,
tome 36, n° 2 (1966), p. 277-284

http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_277_0

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

CONSIDERAZIONI SULLA CONFERENZA TENUTA DA
M. BALDASSARRI A TORINO NEL 1961:
« OSSERVAZIONI SULLA STRUTTURA
DEI FASCI LISCI »

di SANTUZZA BALDASSARRI-GHEZZO, CLAUDIO MARGAGLIO
e TOMASO MILLEVOI (a Padova)*

Al Convegno Internazionale di Geometria Algebrica di Torino, nel maggio 1961, il professor Mario Baldassarri tenne una conferenza dal titolo: « Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci ».

In questa conferenza, tra l'altro, comunicò alcuni risultati, riservandosi di darne la dimostrazione in un successivo lavoro.

La malattia e l'immatura Sua scomparsa, Gli impedirono di mantenere questo Suo proposito.

Per l'importanza dei risultati raggiunti ed in vista di ulteriori applicazioni e generalizzazioni, noi, che appartenemmo al Gruppo di ricerca da Lui diretto, abbiamo creduto opportuno ricostruire le dimostrazioni omesse nella conferenza: questa nota si presenta appunto come il completamento dell'articolo « *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci* » apparso sugli *Atti del Convegno Internazionale di Geometria algebrica tenuto a Torino nei giorni 24-27 maggio 1961*.

1. — Riportiamo, per comodità del lettore, gli enunciati dei teoremi che compaiono nell'articolo suddetto.

TEOREMA 1: *Ogni fascio liscio \mathcal{M}^p su di una varietà affine normale è localmente libero fuori da un chiuso $X \subset V$ con $\text{cdm } X > 1$.*

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R.

Indirizzo degli AA.: Seminario Matematico - Università - Padova.

COROLLARIO 1: Ogni fascio liscio \mathcal{M}^p su di una varietà quasi proiettiva V localmente normale è localmente libero fuori da un chiuso $X \subset V$ con $\text{cdm } X > 1$.

TEOREMA 2: Ogni varietà quasi proiettiva V localmente normale gode della proprietà di estensione.

TEOREMA 3: Ogni fascio localmente libero \mathcal{L}^p su di una varietà quasi proiettiva localmente normale gode della proprietà di estensione.

TEOREMA 4: Sia data la sequenza esatta su V , affine e normale:

$$0 \rightarrow \mathcal{M}^p \xrightarrow{g} \mathcal{A}^q \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow 0.$$

Allora $\mathcal{M}^p \in P.E.$ se e solo se \mathcal{F} ha il sottofascio di torsione privo di sezioni concentrate su chiusi ammissibili.

TEOREMA 5: Se \mathcal{F} è un fascio su V , affine e normale, allora $\mathcal{F}^* = \mathcal{H}om(\mathcal{F}, \mathcal{A})$ gode della proprietà di estensione.

TEOREMA 6: Ogni fascio liscio $\mathcal{M}^p \in P.E.$ su V , affine e normale, che sia libero fuori di un chiuso ammissibile, è libero.

TEOREMA 7: Se V è affine e $V \in P.E.$ il nucleo della sequenza:

$$\mathcal{A}^{q+1} \rightarrow \mathcal{M}^q \rightarrow 0$$

con \mathcal{M}^q liscio, è localmente libero, e, se l'anello A è a fattorizzazione unica, è libero.

TEOREMA 8: Nelle stesse ipotesi (del Teor. 7) se \mathfrak{J} è un sottofascio di \mathcal{A} ammissibile, $\mathcal{H}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A})$ è localmente libero e, se A è a fattorizzazione unica, è libero. In ogni caso si ha:

$$\text{Ext}^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0.$$

TEOREMA 9: Se sulla varietà affine V ogni sequenza del tipo:

$$\mathcal{A}^2 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow 0$$

ha nucleo localmente libero, allora $V \in P.E.$

TEOREMA 10: La varietà affine $V \in P.E.$ se e solo se $\text{Ext}^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A})$ è uguale a zero per ogni sottofascio \mathfrak{J} di \mathcal{A} ammissibile ed è

a forme intersezione completa se e solo se il duale di ogni \mathfrak{J} siffatto è libero.

Di alcuni di questi teoremi c'è la dimostrazione (Teor. 1, 2, 3, 4, 5, 6) ma talvolta è appena accennata. Perciò diamo qui le dimostrazioni complete.

2. — Dimostrazione del teorema 1.

Per induzione sul rango p del fascio.

Se $p = 1$, si ha un fascio di ideali, $\mathcal{M}^1 = \mathfrak{J}$. Prescindiamo innanzitutto dagli eventuali punti singolari di V , ciò che è lecito in quanto il chiuso dei punti singolari di una varietà normale ha codimensione maggiore di uno (cfr. [7] pag. 337).

Essendo d'altra parte la questione locale, basterà dimostrare che per ogni punto regolare x di V o $\mathfrak{J}_x \approx \mathcal{A}_x$ oppure esiste un intorno U di x tale che $\mathfrak{J} | U$ abbia fibra libera fuori da un chiuso (di U) di codimensione maggiore di uno.

Consideriamo allora un punto regolare x di V : si ha che o $\mathfrak{J}_x \approx \mathcal{A}_x$, oppure esiste un ideale \mathfrak{J}_x di \mathcal{A}_x con altezza maggiore di uno ed isomorfo a \mathfrak{J}_x . Infatti se $\mathfrak{J}_x \not\approx \mathcal{A}_x$ e se $h(\mathfrak{J}_x) = 1$, allora, considerato il M.C.D. degli elementi di \mathfrak{J}_x , che è un ideale principale, (\mathcal{A}_x è, essendo x regolare, dominio di integrità a fattorizzazione unica, cfr. [8] pag. 406, e $h(\mathfrak{J}_x) = 1$), l'omomorfismo $\mathfrak{J}_x \rightarrow \mathcal{A}_x$ ottenuto mediante divisione per tale M.C.D. è siffatto che l'immagine \mathfrak{J}_x di \mathfrak{J}_x è isomorfa a \mathfrak{J}_x ed inoltre $h(\mathfrak{J}_x) > 1$.

L'isomorfismo in questione $\varphi_x: \mathfrak{J}_x \rightarrow \mathfrak{J}_x$ si estende ad un intorno affine $U = D(f)$ di x in un isomorfismo

$$\varphi_U: \mathfrak{J} | U \rightarrow \mathfrak{J} | U.$$

Restringendo eventualmente l'intorno U possiamo supporre che tutte le componenti irriducibili della varietà degli zeri di $\Gamma(\mathfrak{J} | U)$ contengano x . Allora l'ideale $\Gamma(\mathfrak{J} | U)$ di A , ha altezza maggiore di uno. Infatti ogni primo associato all'ideale $\Gamma(\mathfrak{J} | U)$, in base all'ipotesi fatta, risulta contenuto nell'ideale massimale M di A , relativo al punto x in questione; siccome c'è corrispondenza biunivoca tra gli ideali di A , che son contenuti in M e quelli

di $\mathcal{A}_x = A_{\mathcal{J}_x}$ con $S = A - M$, ne risulta che l'altezza di $\mathcal{J}_x = A_{\mathcal{J}_x} \cdot \Gamma(\mathcal{J} | U)$ è uguale a quella di $\Gamma(\mathcal{J} | U)$.

Si ha quindi che la varietà \bar{V} degli zeri di $\Gamma(\mathcal{J} | U)$ ha codimensione maggiore di uno, e dunque $\mathcal{J} | U (\approx \mathcal{J} | U)$ ha fibra libera fuori del chiuso \bar{V} di codimensione maggiore di uno.

Il teorema è così dimostrato per $p = 1$.

Sia ora $p > 1$.

Consideriamo allora una iniezione

$$0 \rightarrow \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{A}^p$$

ed una delle proiezioni $\mathcal{A}^p \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow 0$ ristretta ad \mathcal{M}^p .

Si ottiene la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathcal{M}^{p-1} \rightarrow \mathcal{M}^p \rightarrow \mathcal{J} \rightarrow 0.$$

Per tutti i punti x di un aperto ammissibile si ha allora, in base all'ipotesi induttiva

$$0 \rightarrow \mathcal{A}_x^{p-1} \rightarrow (\mathcal{M}^p)_x \rightarrow \mathcal{A}_x \rightarrow 0$$

da cui $(\mathcal{M}^p)_x \approx \mathcal{A}_x^p$ c.v.d.

OSSERVAZIONE: se si toglie l'ipotesi della normalità di V il teorema in generale non sussiste, come mostra il seguente controesempio:

Sia $V = V(x^3 - y^2) \subset k^2$; consideriamo il fascio \mathcal{J} di ideali generato in $\mathcal{A} = \mathcal{A}(V)$ dalle due sezioni globali \bar{x} , \bar{y} . \mathcal{J} non è localmente libero. Infatti l'omomorfismo $\varphi: A^2 \rightarrow A$ così definito $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\bar{x} - \bar{b}\bar{y}$ ha nucleo generato da $\omega_1 = (\bar{y}, \bar{x})$, $\omega_2 = (\bar{x}^2, \bar{y})$ giacchè $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = 0 \Rightarrow ax - by = h(x^3 - y^2) \Rightarrow [a = hx^2 + py, b = hy + px]$; ora se \mathcal{J} fosse localmente libero, il modulo associato I , che risulta uguale a $Im(\varphi)$, sarebbe proiettivo, e quindi $Nc(\varphi)$ risulterebbe sommando diretto in A^2 ; ma sopra l'origine $[Nc(\varphi)]_0$ sta dentro al sottomodulo $m_0 \mathcal{A}_0^2$, m_0 essendo l'ideale massimale di \mathcal{A}_0 , e questo sottomodulo è invariante per automorfismi di \mathcal{A}_0^2 (cfr. [5] pag. 388); ciò esclude che $[Nc(\varphi)]_0$ sia sommando diretto in \mathcal{A}_0^2 e quindi che $Nc(\varphi)$ sia som-

mando diretto in A^2 . \mathcal{J} quindi non è localmente libero, pur essendo tutte le sue fibre fuori dall'origine libere in quanto ivi i germi delle sue sezioni \bar{x} e \bar{y} hanno inverso.

3. — Dimostrazione del teorema 2.

Essendo la questione locale, possiamo supporre V affine, normale ed irriducibile.

Sia allora $\sigma \in \Gamma(U, \mathcal{A}(V))$ una sezione ammissibile. σ appartiene allora al corpo delle funzioni razionali su V ; essendo ammissibile σ non ha poli su V (cfr. [3] pag. 134 prop. 10) e quindi è intera su \mathcal{A}_x per ogni x (cfr. [3] pag. 132 prop. 8); ne segue che $\sigma \in \Gamma(V, \mathcal{A})$, essendo $\Gamma(V, \mathcal{A})$ integralmente chiuso.

4. — Nell'enunciato del teorema 7 è stata omessa la condizione che V sia non singolare. Senza questa ulteriore ipotesi il teorema non è vero, come mostra il seguente controesempio:

Sia $V = V(z^2 - xy) \subset k^3$. Consideriamo l'omomorfismo $\varphi : A^2 \rightarrow I$ così definito: $\varphi(\bar{a}, \bar{b}) = \bar{a}\bar{z} - \bar{b}\bar{x}$.

Il $Nc(\varphi)$ è generato dagli elementi $\omega_1 = (\bar{z}, \bar{y})$, $\omega_2 = (\bar{x}, \bar{z})$; infatti

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{a}, \bar{b}) = 0 &\Rightarrow az - bx = h(z^2 - xy) \Rightarrow z(a - hz) = x(b - hy) \Rightarrow \\ &\Rightarrow [b - hy = pz, a - hz = px] \Rightarrow (\bar{a}, \bar{b}) = \bar{p}(\bar{x}, \bar{z}) + \bar{h}(\bar{z}, \bar{y}). \end{aligned}$$

$Nc(\varphi)$ non è localmente libero; infatti si ha la sequenza esatta

$$0 \rightarrow I \xrightarrow{\psi} A^2 \xrightarrow{\varphi} I \rightarrow 0$$

dove I è l'ideale generato in A dagli elementi \bar{x} , \bar{z} e dove l'omomorfismo ψ è così definito

$$\psi(\bar{x}) = (\bar{x}, \bar{z}), \quad \psi(\bar{z}) = (\bar{z}, \bar{y}). \quad (1)$$

Se I fosse proiettivo $\psi(I)$ sarebbe sommando diretto in A^2 , e ciò è assurdo in quanto nell'origine $[\psi(\mathcal{J})]_0$ è contenuto in $\mathfrak{m}_0 \mathcal{A}_0^2$,

(1) Si verifica facilmente che tali posizioni sono lecite.

essendo \mathfrak{m} , l'ideale massimale di \mathcal{A}_0 (cfr. n. 2 Oss. e [5] pag. 388).

Dimostriamo ora il

TEOREMA 7: *Se V è una varietà affine non singolare e $V \in P.E.$ il nucleo della sequenza*

$$\mathcal{A}^{q+1} \rightarrow \mathcal{M}^q \rightarrow 0$$

con \mathcal{M}^q liscio, è localmente libero e, se l'anello A è a fattorizzazione unica, è libero.

Il nucleo dell'omomorfismo $\varphi : \mathcal{A}^{q+1} \rightarrow \mathcal{M}^q$ risulta un fascio di ideali \mathfrak{J} soddisfacente alla proprietà di estensione (cfr. Teor. 4).

Per ipotesi per ogni $x \in V$ \mathfrak{J}_x è isomorfo o ad un ideale di altezza maggiore di uno, oppure ad \mathcal{A}_x (cfr. la prima parte della dimostrazione del teor. 1). Nel primo caso però l'omomorfismo $\varphi_x : \mathfrak{J}_x \rightarrow \mathfrak{J}_x$ si estende a tutto un intorno U di x , quindi $\mathfrak{J} \mid U$ è isomorfo ad un sottofascio ammissibile di $\mathcal{A} \mid U$; poichè $\mathfrak{J} \in P.E.$, esso risulta localmente isomorfo ad \mathcal{A} . c.v.d.

5. — L'enunciato del teorema 8, poichè è immediato verificare che: Se V è affine ed $V \in P.E.$ e se \mathfrak{J} è un sottofascio ammissibile di \mathcal{A} , $\mathcal{K}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \approx \mathcal{A}$, va modificato nel modo seguente:

TEOREMA 8: *Sia V una varietà affine non singolare $V \in P.E.$ ed \mathfrak{J} un fascio di ideali (ovviamente di tipo finito) allora $\mathcal{K}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A})$ è localmente libero, e se A è a fattorizzazione unica, è libero.*

Essendo \mathfrak{J} di tipo finito, esiste una sequenza esatta del tipo:

$$0 \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{A}^n \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow 0.$$

Dualizzandola, si ottiene:

$$0 \rightarrow \mathcal{K}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}^n \rightarrow \mathcal{F}^*$$

e, dal teorema 7, segue l'asserto.

6. — Dimostrazione del teorema 9.

Verifichiamo che se $V \notin P.E.$ allora esiste un omomorfismo del tipo

$$\mathcal{A}^2 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow 0$$

con nucleo non localmente libero.

Sia σ una sezione ammissibile di \mathcal{A} che non si estenda e sia F/Q un suo rappresentante ($F, Q \in \mathcal{A}$).

Sia M il sottomodulo di \mathcal{A}^2 formato con tutti gli elementi (a, b) tali che a/b rappresenti σ .

Si ha allora la sequenza esatta:

$$0 \rightarrow M \rightarrow \mathcal{A}^2 \xrightarrow{\varphi} \mathcal{A}$$

con $\varphi(f, g) = Ff - Qg$.

Il fascio \mathcal{M} associato ad M non è localmente libero. Infatti, indicato con \mathfrak{J} l'ideale costituito con le seconde coordinate delle sezioni di \mathcal{M} , \mathfrak{J} risulta ammissibile poichè σ è ammissibile e quindi, se \mathcal{M} fosse localmente libero risulterebbe $\mathfrak{J} = \mathcal{A}$ e quindi fra le sezioni di \mathcal{M} ne comparirebbe una del tipo $(s, 1)$ con $s \in \mathcal{A}$, e si avrebbe $\sigma = s/1 = s$ sezione globale.

OSSERVAZIONE: la condizione espressa dal teorema 9 non è necessaria, come mostra il controesempio al teorema 7.

7. — Dimostriamo ora la prima parte del

TEOREMA 10: *La varietà affine $V \in P.E.$ se e solo se $\text{Ext}^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0$ per ogni sottofascio ammissibile \mathfrak{J} di \mathcal{A} .*

Consideriamo la sequenza esatta

$$0 \rightarrow \mathfrak{J} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathfrak{J} \rightarrow 0 ;$$

dualizzandola si ottiene la

$$0 \rightarrow \mathcal{K}om(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}om(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A})$$

e quindi, tenuto anche conto che $\mathcal{K}om(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0$,

$$0 \rightarrow \mathcal{K}om(\mathcal{A}, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{K}om(\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \rightarrow \text{Ext}^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) \rightarrow 0 .$$

Si ha allora che $\text{Ext}^1(\mathcal{A}/\mathfrak{J}, \mathcal{A}) = 0$ se e solo se l'omomorfismo canonico $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathfrak{J}^*$ è un isomorfismo.

Se $V \in P.E.$ ogni omomorfismo $\mathfrak{J} \rightarrow \mathcal{A}$ (con \mathfrak{J} ammissibile) si estende ad un omomorfismo $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ perciò $\mathcal{A}^* \rightarrow \mathfrak{J}^*$ risulta senz'altro un isomorfismo.

Viceversa se $V \notin P.E.$ esiste un sottofascio ammissibile \mathfrak{J} di \mathcal{A} ed un omomorfismo $\psi : \mathfrak{J} \rightarrow \mathcal{A}$ che non si estende. Infatti se $V \notin P.E.$ esiste una sezione ammissibile σ di \mathcal{A} che non si estende. Sia \mathfrak{J}_σ il sottofascio di ideali generato dalle $f \in \Gamma(V, \mathcal{A})$ tali che $f\sigma$ si estenda. Si ha che $\text{Supp}(\mathcal{A}/\mathfrak{J}_\sigma) = \text{chiuso}$ ove σ non si estende.

Dunque \mathfrak{J}_σ è sottofascio ammissibile di \mathcal{A} .

Consideriamo l'omomorfismo $\varphi : \mathfrak{J}_\sigma \rightarrow \mathcal{A}$ così definito $\varphi(f) = f\sigma$. Se φ si fattorizzasse in

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{J}_\sigma & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{A} \\ & \searrow j & \nearrow \bar{\varphi} \\ & & \mathcal{A} \end{array}$$

j essendo l'omomorfismo di inclusione, allora $\bar{\varphi}(1) = \sigma$ sarebbe una sezione globale; c.v.d.

Per quanto riguarda la seconda parte del teorema 10 enunciato al n. 1, essa non risulta valida, poichè, come si è visto al n. 5 basta che $V \in P.E.$ affinchè il duale di un sottofascio ammissibile di \mathcal{A} sia libero.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M. BALDASSARRI: *Osservazioni sulla struttura dei fasci lisci*. Atti del Conv. Intern. di Geom. Alg. di Torino del 1961.
- [2] P. CARTIER: *Rationalité des diviseurs*. Bull. Soc. Math. France 86 1958 p. 177-251.
- [3] C. CHEVALLEY: *Fondaments de la Géométrie Algébrique*. Math. Appr. 1957-58 Secret. Math. Paris 1958.
- [4] A. GROTHENDIECK: *Théorèmes de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents*. Sem. Bourbaki Exp. 149, 1959 Paris.
- [5] C. MARGAGLIO: *Sul prodotto tensoriale di fasci algebrici coerenti e lisci*. Rend. Sem. Mat. Padova vol. XXXIV (1964).
- [6] J. P. SERRE: *Faisceaux algébriques cohérents*. Ann. of Math. 61, 1955.
- [7] A. WEIL: *Foundations of algebraic geometry*. Amer. Math. Soc. 1962.
- [8] O. ZARISKI, P. SAMUEL: *Commutative Algebra*. Vol. II, Van Nostrand, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1965.