Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

Dionigi Galletto

Sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili nel caso asimmetrico (Parte prima)

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 2 (1966), p. 243-276

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_2_243_0>

SISTEMI INCOMPRIMIBILI A TRASFORMAZIONI REVERSIBILI NEL CASO ASIMMETRICO

(PARTE PRIMA)

di DIONIGI GALLETTO (*a Padova*) *)

Nella presente memoria, con riferimento a deformazioni finite, vengono posti i fondamenti per una teoria dei sistemi continui soggetti al vincolo interno di incomprimibilità e capaci di sforzi specifici asimmetrici e di momenti interni di contatto (momenti superficiali).

Le ipotesi fatte sulla sollecitazione sono quelle, assai generali, considerate in [4], [1], ecc., ove è preso in esame il caso dei continui esenti da vincoli interni. In altri termini, si ritiene che le forze di massa siano riducibili a una forza applicata a un punto dell'elemento di volume considerato e a una coppia. Analoga ipotesi vien fatta per le forze superficiali esterne. Di conseguenza, nell'espressione lagrangiana del lavoro specifico delle forze interne di contatto relativo al passaggio dalla configurazione attuale a un'altra vicinissima intervengono, accanto alle variazioni delle componenti del tensore di deformazione, le variazioni delle componenti del suo rotore (rotore di deformazione) [1]).

Pur non perdendo di vista il caso in cui le trasformazioni a cui è soggetto il continuo siano generiche, ho preso in particolare considerazione quello in cui esse siano isoterme (caso isotermo).

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.
Indirizzo dell'A.: Seminario matematico, Università, Padova.

[1]) Cfr. [1], 2.

Tale caso è di indubbio interesse e, oltre alla eliminazione della temperatura dalle incognite, presenta il vantaggio di permettere una trattazione tensoriale della teoria particolarmente conveniente, trattazione che ha carattere di novità anche nel caso simmetrico.

Interpretate le coordinate lagrangiane come particolari coordinate curvilinee dello stato attuale, accade che nel caso isotermo (e solo in esso) le componenti dei tensori lagrangiani degli sforzi e dei momenti superficiali si possano interpretare come componenti (contravarianti), nel suddetto riferimento curvilineo, dei corrispondenti tensori euleriani. Tale interpretazione delle coordinate lagrangiane ha inoltre come conseguenza che il vincolo di incomprimibilità, — che si traduce nella ben nota condizione che gli spostamenti virtuali del sistema siano caratterizzati da vettori solenoidali —, si possa tradurre nella condizione che le variazioni delle caratteristiche di deformazione siano a invariante lineare nullo. Dette variazioni risultano quindi soggette alla medesima condizione a cui sono soggette le variazioni delle componenti del rotore di deformazione [2]), donde la conseguenza che non appena i due tensori degli sforzi e dei momenti superficiali siano isotropi, il lavoro delle forze interne di contatto risulta nullo.

Da quest'ultima osservazione segue una decomposizione univoca (valida sia per deformazioni finite che per deformazioni infinitesime) della sollecitazione interna nelle due parti *non lavorante* e *puramente lavorante*, decomposizione che estende al caso dei sistemi incomprimibili quella fornita in [1], 3 per il caso dei continui esenti da vincoli interni.

Supposto il continuo a trasformazioni reversibili, nel caso isotermo la conoscenza dell'energia libera termodinamica è atta, da sola, a determinare la parte puramente lavorante della sollecitazione interna, mentre per la determinazione della parte non lavorante sono necessari, oltre la conoscenza dell'energia libera, l'intervento delle equazioni indefinite e, analogamente al caso simmetrico, l'introduzione, oltre al parametro q che già inter-

---

[2]) Cfr. [1], 3.

viene nel caso dei sistemi esenti da vincoli interni, di un ulteriore parametro, p, caratterizzante la pressione vincolare interna. La conoscenza dei due parametri p, q equivale alla conoscenza degli invarianti lineari del tensore degli sforzi e del tensore dei momenti.

Introdotta l'energia libera, si sono stabilite le equazioni generali della statica isoterma, dalle quali appare, tra l'altro, che i suddetti parametri intervengono direttamente, per il tramite degli incrementi da essi subiti nel passaggio dallo stato di riferimento a quello attuale, soltanto nelle condizioni al contorno, mentre nelle equazioni indefinite compaiono unicamente per il tramite dei gradienti dei suddetti incrementi.

Supposto, per brevità, che non vi siano vincoli esterni, ho stabilito infine una relazione simbolica la quale, pur di ritenerla valida per ogni spostamento virtuale del sistema a partire dall'incognito stato di quiete, è equivalente alle suddette equazioni generali. Con l'interpretazione data delle coordinate lagrangiane è stato possibile dedurre direttamente detta relazione in forma lagrangiana.

Il pregio della relazione simbolica in questione risiede nel fatto che in essa non v'è traccia nè dei parametri p, q, nè della parte emisimmetrica del tensore degli sforzi. Qualora si riesca a determinare l'incognito stato di quiete in modo da renderla completamente soddisfatta, si può far ricorso alle equazioni generali per dedurre, con sole quadrature, il parametro p, dopodichè resterà univocamente determinata la parte simmetrica del tensore degli sforzi. Sfugge invece la determinazione del parametro q, la quale pertanto va demandata all'esperienza.

1. - Premessa.

Sia $\mathscr{C}$ un sistema continuo tridimensionale, C una sua arbitraria configurazione di riferimento, C' la sua configurazione attuale, Σ e Σ' le superficie contorno completo di C, C'. Supporrò lo spazio riferito a un sistema di coordinate cartesiane trirettangole, coordinate che indicherò rispettivamente con x^i $(i = 1, 2, 3)$ o con $x^{i'}$ a seconda che esse si riferiscano a punti di C o di C'.

Si supponga che le forze di massa agenti sull'elemento di volume dC' di C' siano riducibili a una forza $F'^{i'}dC'$ applicata a un punto interno a dC' e a una coppia $M'_{i'}dC'$. Analogamente, si supponga che le forze esterne agenti sull'elemento di superficie $d\Sigma'$ di Σ' siano riducibili alla forza $f'^{i'}d\Sigma'$ applicata a un punto interno a $d\Sigma'$ e alla coppia $m'_{i'}d\Sigma'$.

Considerato un qualsiasi elemento di superficie orientato [3]) $d\sigma'$ interno a C' e indicato con $\nu'^{i'}$ il versore della normale alla sua faccia positiva, si deve ritenere, in base alle suesposte ipotesi [4]), che le forze di contatto esercitate dagli elementi di $\mathscr{C}$ aderenti alla sua faccia negativa su quelli aderenti alla sua faccia positiva siano riducibili a una forza $T^{i'}_{(\nu')}d\sigma'$ applicata a un punto interno a $d\sigma'$ e a una coppia di momento $L_{i'(\nu')}d\sigma'$. Ciò implica l'esistenza in C' [5]) di due tensori (campi tensoriali): il tensore degli sforzi $T^{i'j'}$ e il tensore dei momenti superficiali (momenti interni di contatto) $L_{i'}{}^{j'}$.

Fatte le posizioni

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{i}} = x^{i'}_{i} \,, \qquad \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{i'}} = x^{i}_{i'} \,,$$

$$\mathrm{Det}\,\| x^{i'}_{i} \| = | x^{i'}_{i} | \,, \qquad \mathrm{Det}\,\| x^{i}_{i'} \| = | x^{i}_{i'} | \,,$$

introdurrò, accanto ai due suddetti tensori, il tensore lagrangiano degli sforzi T^{ij} e il tensore lagrangiano dei momenti superficiali $L'_{i}{}^{j}$, definiti da [6])

$$T^{ij} = | x^{i'}_{i} | \, x^{i}_{i'} x^{j}_{j'} T^{i'j'} \,, \tag{1.1}$$

$$L'_{i}{}^{j} = x^{i'}_{i} x^{j}_{j'} L_{i'}{}^{j'} \,, \tag{1.2}$$

---

[3]) Nel senso che su esso sia stata scelta una faccia da ritenersi positiva.

[4]) Cfr., ad es., [4], I, 1.

[5]) Cfr. [2], 5, 7.

[6]) Cfr. [2], 6, 7. In realtà il tensore lagrangiano dei momenti ivi definito differisce per il fattore $| x^{i'}_{i} |$ dall'analogo tensore definito qua dalle (1.2).

Nelle (1.1), (1.2) e nel seguito, salvo diverso, esplicito avviso, è sottinteso il simbolo di somma rispetto agli indici ripetuti.

e, accanto ai vettori $F'^{i'}$, $M'_{i'}$, $f'^{i'}$, $m'_{i'}$, i vettori $F^{i'}$, $M_{i'}$, $f^{i'}$, $m_{i'}$ definiti da [7])

$$F^{i'}dC = F'^{i'}dC' , \qquad M_{i'}dC = M'_{i'}dC' ,$$
$$f^{i'}d\Sigma = f'^{i'}d\Sigma' , \qquad m_{i'}d\Sigma = m'_{i'}d\Sigma' ,$$

ove dC e $d\Sigma$ sono rispettivamente l'elemento di volume e l'elemento di superficie che nella configurazione di riferimento corrispondono agli elementi dC', $d\Sigma'$ della configurazione attuale.

Ciò premesso, indicato con $\eta^{i'j'l'}$ il tensore di Ricci (in forma euleriana), con $T^{[ij]}$ la parte emisimmetrica del tensore T^{ij} e intendendo

$$\partial_j = \frac{\partial}{\partial x^j} ,$$

una delle possibili espressioni in forma lagrangiana delle equazioni della statica dei sistemi continui è data, nelle attuali ipotesi, da [8])

$$(1.3) \qquad \begin{cases} F^{i'} = \partial_j(x_i^{i'}T^{ij}) , \\ M_{i'} + \eta_{i'h'k'}x_i^{h'}x_j^{k'}T^{[ij]} = \partial_j(\mid x_i^{i'} \mid x_{i'}^{i}L'_i{}^j) , \end{cases}$$

mentre le corrispondenti condizioni al contorno sono

$$(1.4) \qquad \begin{cases} f^{i'} = x_i^{i'}T^{ij}\nu_j , \\ m_{i'} = \mid x_i^{i'} \mid x_{i'}^{i}L'_i{}^j\nu_j , \end{cases}$$

ove con ν_i ho indicato il versore della normale interna a Σ.

Indicato poi con e_{ij} il tensore di deformazione, definito da [9])

$$(1.5) \qquad e_{ij} = \frac{1}{2}\,(g'_{ij} - \delta_{ij}) ,$$

---

[7]) Risulta pertanto
$$F^{i'} = \mid x_i^{i'} \mid F'^{i'} , \qquad M_{i'} = \mid x_i^{i'} \mid M'_{i'} .$$

[8]) Cfr. [2], 6, 7. Si tenga inoltre presente la nota [6]).

[9]) δ_{ij} è il simbolo di Kronecker, come pure δ_i^j.

ove è da intendersi

$$g'_{ij} = x^{i'}_{i} x^{i'}_{j} \ , \tag{1.6}$$

e indicato con $\mu'^{i}{}_{j}$ il rotore del tensore di deformazione (rotore di deformazione):

$$\mu'^{i}{}_{j} = \eta^{ihk} \partial_h e_{kj} \ , \tag{1.7}$$

una delle possibili espressioni del lavoro specifico delle forze interne di contatto relativo alla configurazione C, in corrispondenza al passaggio dalla configurazione C' a un'altra infinitamente prossima, è data da [10])

$$\delta l^{(i)} = (T^{(ij)} + \omega'^{ijh}{}_{k} L'_{h}{}^{k}) \delta e_{ij} + L'_{i}{}^{j} \delta \mu'^{i}{}_{j} \ , \tag{1.8}$$

dove $T^{(ij)}$ è la parte simmetrica di T^{ij}, mentre è da intendersi

$$\omega'^{ijh}{}_{k} = \eta^{hl(i} x^{j)}_{l'} x^{l'}_{kl} \ , \tag{1.9}$$

con

$$\eta^{hl(i} x^{j)}_{l'} = \frac{1}{2} (\eta^{hli} x^{j}_{l'} + \eta^{hlj} x^{i}_{l'}) \ .$$

Le $\mu'^{i}{}_{j}$, per le quali stanti le (1.5), (1.6), (1.7), risulta

$$\mu'^{i}{}_{j} = \frac{1}{2} \eta^{ihk} x^{i'}_{hj} x^{i'}_{k} \ , \tag{1.7'}$$

non sono indipendenti bensì soggette al legame

$$\mu'^{i}{}_{i} = 0 \ , \tag{1.10}$$

legame che, conformemente a quanto dimostrato in [3], risulta unico. Stante la (1.10), per le variazioni $\delta\mu'^{i}{}_{j}$ deve quindi essere

$$\delta\mu'^{i}{}_{i} = 0 \ . \tag{1.11}$$

---

[10]) Cfr. [1], 2.

Infine, in analogia alle (1.10), risulta

$$\omega'^{hki}{}_{i} = 0 \,, \tag{1.12}$$

come subito segue dalle (1.9).

2. - Una ulteriore forma per le equazioni generali.

È conveniente, per il seguito, assegnare una diversa forma alle equazioni generali (1.3), (1.4).

Posto

$$T_i = \frac{1}{2}\,\eta_{ihk}T^{[hk]} = \frac{1}{2}\,\eta_{ihk}T^{hk} \,, \tag{2.1}$$

ossia [11])

$$T_i = T^{[i+1\ i+2]} \,, \tag{2.1'}$$

risulta, come agevolmente si può verificare [12]),

$$\left\{\begin{aligned} &\partial_j(x_i^{i'}T^{[ij]}) = \eta^{ihk}x_i^{i'}\partial_h T_k \,, \\ &x_i^{i'}T^{[ij]}\nu_j = \eta^{ihk}x_i^{i'}\nu_h T_k \,, \end{aligned}\right. \tag{2.2}$$

$$\eta_{i'h'k'}x_i^{h'}x_j^{k'}T^{[ij]} = 2\,|\,x_i^{i'}\,|\,x_{i'}^{i}T_i \,. \tag{2.3}$$

Dalle seconde delle (1.3) si ricava pertanto

$$T_k = \frac{1}{2}\,|\,x_{i'}^{i}\,|\,x_k^{k'}[\partial_j(|\,x_i^{i'}\,|\,x_{k'}^{l}L'_l{}^{j}) - M_{k'}] \tag{2.4}$$

e queste, sostituite nelle prime delle (1.3), (1.4), dàn luogo, per

---

[11]) Naturalmente l'indice $i + \alpha$ $(\alpha = 1,\ 2)$, non appena supera 3 va diminuito di 3.

[12]) Si tenga presente che risulta

$$\eta^{ipq}\eta_{ihk} = \delta_h^p\delta_k^q - \delta_k^p\delta_h^q,$$

e che pertanto è

$$T^{[hk]} = \eta^{ihk}T_i \,.$$

le (2.2), alle

$$
(2.5) \qquad \left\{
\begin{aligned}
& F^{i'} - \partial_j (x_i^{i'} T^{(ij)}) - \\
& \qquad - \frac{1}{2} \eta^{ihk} x_i^{i'} x_k^{k'} \partial_h \{ | x_{i'}^i | [\partial_j (| x_i^{i'} | x_{k'}^l L'_l{}^j) - M_{k'}] \} = 0 , \\
& f^{i'} - x_i^{i'} T^{(ij)} \nu_j - \\
& \qquad - \frac{1}{2} | x_{i'}^i | \eta^{ihk} x_i^{i'} x_k^{k'} [\partial_j (| x_i^{i'} | x_{k'}^l L'_l{}^j) - M_{k'}] \nu_h = 0 ,
\end{aligned}
\right.
$$

nelle quali non v'è più traccia della parte emisimmetrica del tensore T^{ij}. Esse vanno naturalmente associate alle (2.4) e alle seconde delle (1.4).

3. - Introduzione del vincolo di incomprimibilità. Caso isotermo.

Supporrò d'ora in poi che il sistema continuo $\mathscr{C}$ sia *incomprimibile*, ipotesi che implica

$$
(3.1) \qquad | x_i^{i'} | = \lambda(\theta, \theta'; x^1, x^2, x^3) ,
$$

ove θ, θ' indicano rispettivamente la temperatura assoluta dello stato di riferimento e quella dello stato attuale e la funzione a secondo membro assume il valore 1 ogni qualvolta risulta $\theta' \equiv \theta$.

Ritenendo, almeno per il momento, che le trasformazioni a cui è soggetto $\mathscr{C}$ siano unicamente isoterme (caso isotermo), la (3.1) si riduce a

$$
(3.2) \qquad | x_i^{i'} | = 1 ,
$$

con la conseguenza che le (1.1) si specificano nelle

$$
(3.3) \qquad T^{ij} = x_{i'}^i x_{j'}^j T^{i'j'} .
$$

Pertanto, interpretate le coordinate lagrangiane x^i come particolari coordinate curvilinee della configurazione attuale, — coordinate per le quali la forma quadratica fondamentale è data da

$$ds'^2 = g'_{ij} dx^i dx^j \ ,$$

con le g'_{ij} definite dalle (1.6) —, *le* (3.3) *e le* (1.2) *permettono di interpretare le* T^{ij}, $L'_i{}^j$ *come componenti, nel riferimento curvilineo* x^i, *dei tensori che nel riferimento cartesiano* $x^{i'}$ *hanno per componenti rispettivamente le* $T^{i'j'}$, $L_{i'}{}^{j'}$.

Indicando con $\delta u^{i'} \equiv \delta x^{i'}$ le componenti di un qualunque spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ del sistema a partire da C', dalla (3.2) segue

$$0 = \frac{\partial \mid x_i^{i'} \mid}{\partial x_i^{i'}} \delta x_i^{i'} = \mid x_i^{i'} \mid x_{i'}^i \delta x_i^{i'}$$

che, in quanto è, ovviamente,

$$\delta x_i^{i'} = \partial_i \delta x^{i'} \ , \tag{3.4}$$

dà luogo alla

$$\partial_{i'} \delta u^{i'} = 0 \ , \tag{3.5}$$

esprimente il noto risultato che *nel caso isotermo gli spostamenti virtuali del sistema sono caratterizzati dai vettori solenoidali* $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} = 0 \ . \tag{3.5'}$$

È interessante (e utile per il seguito) osservare che, contrariamente a quanto ci si può attendere, nelle attuali ipotesi la (3.5) si traduce nella forma lagrangiana

$$\partial_i \delta u^i = 0 \ , \tag{3.6}$$

con δu^i componenti del vettore $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ nel riferimento curvilineo x^i:

$$\delta u^i = x_{i'}^i \delta u^{i'} \ . \tag{3.7}$$

L'asserto segue immediatamente dalla nota identità [13])

$$\partial_i (\mid x_i^{i'} \mid x_{i'}^i) = 0$$

---

[13]) Cfr., ad es., [2], 3.

che, presentemente, si traduce nella

$$\partial_i x^i_{i'} = 0 \,. \tag{3.8}$$

Inoltre, essendo, per le (1.6), (1.5),

$$x^i_{i'} \delta x^{i'}_i \equiv x^i_{j'} x^j_{i'} x^{i'}_j \delta x^{i'}_i = g'^{ij} \delta e_{ij} \,,$$

dove, naturalmente, è da intendersi

$$g'^{ij} = x^i_{i'} x^j_{i'} \,,$$

la (3.5) è equivalente a

$$g'^{ij} \delta e_{ij} = 0 \,, \tag{3.9}$$

esprimente che, sempre interpretando le x^i come particolari coordinate attuali, *nei sistemi incomprimibili soggetti a trasformazioni isoterme le* δe_{ij} *sono, al pari delle* $\delta \mu'^i{}_j$, *a invariante lineare nullo.*

4. - Decomposizione della sollecitazione interna nelle due parti puramente lavorante e non lavorante.

Continuando ad interpretare le x^i come particolari coordinate curvilinee della configurazione attuale e sempre restando nel caso isotermo, sulla base della (3.9) e delle (1.11), (1.12) è interessante osservare che, *non appena la sollecitazione interna sia tale che i tensori* $T^{(ij)}$ *e* $L'_i{}^j$ *risultino isotropi*, ossia tali da aversi

$$T^{(ij)} = p g'^{ij} \,, \qquad L'_i{}^j = q \delta^j_i \,,$$

con p e q scalari arbitrari, *essa è non lavorante* [14]), nel senso che *per ogni trasformazione infinitesima del sistema, compatibile con*

[14]) Cfr., per quanto concerne la terminologia, [1], 3.

il vincolo di incomprimibilità [15]), *il corrispondente lavoro* $\delta l^{(i)}$ *risulta nullo.*

Viceversa, se risulta $\delta l^{(i)} = 0$ per ogni spostamento infinitesimo del sistema, dall'unicità dei legami (3.9), (1.10) [16]) e dalle (1.12) segue che i tensori $T^{(ij)}$ e $L'_i{}^j$ devono essere isotropi.

Ne segue che una sollecitazione in cui i tensori T^{ij} e $L'_i{}^j$ sono tali che

$$(4.1) \qquad T^{ij} = T^{(ij)} \,, \qquad g'_{ij}T^{ij} = 0 \,, \qquad L'_i{}^i = 0 \,,$$

ossia *una sollecitazione per la quale il tensore degli sforzi è simmetrico ed è, con il tensore dei momenti superficiali, a invariante lineare nullo, risulta essere puramente lavorante,* nel senso che *il lavoro* $\delta l^{(i)}$ *per ogni trasformazione virtuale del sistema risulta nullo se e solo se essa è nulla.*

Infatti, per quanto ora visto, è $\delta l^{(i)} = 0$ per ogni spostamento virtuale del sistema se e soltanto se i tensori $T^{(ij)}$, $L'_i{}^j$ risultano essere isotropi, con la conclusione che, dovendo valere le (4.1), deve necessariamente essere

$$T^{ij} = 0 \,, \qquad L'_i{}^j = 0 \,.$$

Da quanto ora esposto segue che *ogni sollecitazione interna si può decomporre in uno e in un sol modo in due parti, di cui una non lavorante e l'altra puramente lavorante.*

Infatti si ponga, con evidente significato dei simboli,

$$(4.2) \qquad T^{ij} = T^{(0)ij} + T^{(1)ij} \,.$$

Per quanto visto prima, il più generale tensore $T^{(0)ij}$ è dato dalla somma di un tensore emisimmetrico, E^{ij}, e di un tensore isotropo, pg'^{ij}, mentre il più generale tensore $T^{(1)ij}$ risulta essere simmetrico e a invariante lineare nullo. Dovendo valere la (4.2), dall'unicità della parte emisimmetrica $T^{[ij]}$ di T^{ij} segue che

$$E^{ij} = T^{[ij]} \,,$$

[15]) Ossia per ogni trasformazione virtuale del sistema.

[16]) L'unicità del legame (3.9) è ovvia, conseguendo dal fatto che è unico il legame (3.2). L'unicità del legame (1.10) è dimostrata in [3].

mentre risulta

$$p = \frac{1}{3} g'_{ij} T^{ij} = \frac{1}{3} T ,$$

ove con T ho indicato l'invariante lineare di T^{ij}. In definitiva si ha quindi

$$(4.3)\quad T^{(0)ij} = T^{[ij]} + \frac{1}{3} Tg'^{ij} , \qquad T^{(l)ij} = T^{(ij)} - \frac{1}{3} Tg'^{ij} ,$$

con i secondi membri univocamente determinati (da T^{ij} e dalla configurazione C scelta come riferimento).

In modo analogo, indicando con L' l'invariante lineare di $L'_i{}^j$, si perviene alle

$$(4.4)\qquad L'^{(0)j}_i = \frac{1}{3} L'\delta^j_i , \qquad L'^{(l)j}_i = L'_i{}^j - \frac{1}{3} L'\delta^j_i ,$$

con i secondi membri univocamente determinati e che, con le precedenti, provano l'asserto.

La decomposizione di $L'_i{}^j$ coincide, com'è naturale, con quella operata in [1], 3 nel caso dei sistemi esenti da vincoli interni [17]) e che, d'altra parte, consegue subito da quanto in precedenza osservato e dal fatto che ogni tensore doppio si può decomporre in uno e in un solo modo in un tensore isotropo (parte scalare) e in un tensore a invariante lineare nullo (parte deviatrice).

I risultati stabiliti in [1], 3 per il tensore $L'_i{}^j$ valgono ora, oltre che per detto tensore, anche per il tensore T^{ij}. Ossia si ha che $T^{(0)ij}$, $T^{(l)ij}$, *così come* $L'^{(0)j}_i$, $L'^{(l)j}_i$, *sono fra loro ortogonali*, nel senso che risulta [18])

$$g'_{hi} g'_{kj} T^{(0)hk} T^{(l)ij} = 0 , \qquad g'^{hi} g'_{kj} L'^{(0)k}_h L'^{(l)j}_i = 0 ,$$

---

[17]) In tal caso per il tensore T^{ij} risulta

$$T^{(0)ij} = T^{[ij]} , \qquad T^{(l)ij} = T^{(ij)} .$$

[18]) In [1], 3 si è espressa l'ortogonalità tra $L'^{(0)}{}_i{}^j$ e $L'^{(l)}{}_i{}^j$ tramite la $L'^{(0)}{}_i{}^j\, L'^{(l)}{}_i{}^j = 0$ in quanto il riferimento x^i è inteso colà come cartesiano trirettangolo (riferimento lagrangiano). Analoga osservazione vale per il modulo dello scarto.

relazioni che, con l'introduzione delle componenti contravarianti e covarianti dei tensori che in esse compaiono, si scrivono concisamente

$$(4.5) \qquad T^{(0)ij}T^{(1)}{}_{ij} = 0 \ , \qquad L'^{(0)ij}L'^{(1)}{}_{ij} = 0 \ ,$$

ecc. E ancora, definito, come al solito, *scarto* fra due tensori A^{ij}, B^{ij} la differenza $D^{ij} = A^{ij} - B^{ij}$ e *modulo dello scarto* la determinazione positiva della radice quadrata di $D^{ij}D_{ij}$, $T^{(0)ij}$ *è il tensore del tipo* $E^{ij} + pg'^{ij}$ (E^{ij} *emisimmetrico*) *per cui il modulo dello scarto da* T^{ij} *risulta minimo* [19]). Analogamente, $L'^{(0)}{}_i{}^j$ è il tensore del tipo $q\delta_i^j$ per cui risulta minimo il modulo dello scarto da $L'_i{}^j$.

Da quanto ora esposto segue che l'espressione (1.8) di $\delta l^{(i)}$ si può sostituire con

$$(4.6) \qquad \delta l^{(i)} = (T^{(1)ij} + \omega'^{ijh}{}_k L'^{(1)}{}_h{}^k)\delta e_{ij} + L'^{(1)}{}_i{}^j \delta\mu'^i{}_j \ .$$

* * *

La decomposizione ora operata per i tensori T^{ij}, $L'_i{}^j$, avendo carattere tensoriale, si trasporta immediatamente, immutata nella forma, ai tensori $T^{i'j'}$, $L_{i'}{}^{j'}$, non appena si tenga presente l'interpretazione che è stata fatta delle coordinate x^i.

---

[19]) Il quadrato del modulo dello scarto del tensore $E^{ij} + pg'^{ij}$ dal tensore T^{ij} è espresso da

$$f(E^{ij}, p) = E_{ij}E^{ij} - 2T_{[ij]}E^{ij} + 3p^2 - 2pT + T_{(ij)}T^{(ij)} + T_{[ij]}T^{[ij]},$$

da cui si ricava che è

$$\frac{\partial f(E^{ij}, p)}{\partial E^{ij}} = 0 \ , \qquad \frac{\partial f(E^{ij}, p)}{\partial p} = 0$$

unicamente per

$$E^{ij} = T^{[ij]} \ , \qquad p = \frac{T}{3} \ .$$

Che la funzione $f(E^{ij}, p)$ assuma in corrispondenza a tali valori delle E^{ij}, p il suo minimo assoluto si vede subito passando dalle coordinate *curvilinee* x^i alle coordinate cartesiane ortogonali $x^{i'}$. Infatti, in tale sistema di coordinate appare evidente che detta funzione diverge positivamente non appena parte delle E^{ij}, p, o tutte, tendano all'infinito.

Le espressioni di $T^{(0)i'j'}$, $T^{(1)i'j'}$, $L^{(0)j'}_{i'}$, $L^{(1)j'}_{i'}$ sono date dalle analoghe delle (4.3), (4.4):

$$(4.3') \quad T^{(0)i'j'} = T^{[i'j']} + \frac{1}{3}\, T\delta^{i'j'} \,, \qquad T^{(1)i'j'} = T^{(i'j')} - \frac{1}{3}\, T\delta^{i'j'} \,,$$

$$(4.4') \qquad L^{(0)j'}_{i'} = \frac{1}{3}\, L'\delta^{j'}_{i'} \,, \qquad L^{(1)j'}_{i'} = L_{i'}{}^{j'} - \frac{1}{3}\, L'\delta^{j'}_{i'} \,,$$

ed il legame fra $T^{(0)ij}$ e $T^{(0)i'j'}$, $L'^{(0)j}_{i}$ e $L^{(0)j'}_{i'}$, ecc., risulta espresso da relazioni identiche, nella forma, rispettivamente alle (3.3), (1.2).

* * *

Qualora le trasformazioni a cui è soggetto $\mathscr{C}$ non siano soggette alla restrizione di essere isoterme, vale la (3.1), con la conseguenza che per una generica trasformazione infinitesima a partire da C' la (3.9) va sostituita con

$$(4.7) \qquad | x^{i'}_{i} \,|\, g'^{ij} \delta e_{ij} = \frac{\partial \lambda}{\partial \theta'}\, \delta\theta' \,,$$

mentre le due parti non lavorante e puramente lavorante della sollecitazione interna risultano espresse, per quanto concerne il tensore T^{ij}, da

$$(4.8) \qquad T^{(0)ij} = T^{[ij]} \,, \qquad T^{(1)ij} = T^{(ij)}$$

e, per quanto concerne il tensore $L'_{i}{}^{j}$, ancora dalle (4.4).

* * *

Osservazione I. Conviene tener presente che, com'è noto, il determinante

$$\mathfrak{D} = | x^{i'}_{i} |$$

si può esprime in funzione delle e_{ij}, avendosi, come subito segue dalle (1.6), (1.5), [20])

$$(4.9) \qquad \mathfrak{D}(e) = \sqrt{| 2e_{ij} + \delta_{ij} |} \,,$$

espressione che tornerà utile nel seguito.

---

[20]) È ovvio che è da intendersi

$$| 2e_{ij} + \delta_{ij} | = \mathrm{Det} \, \| 2e_{ij} + \delta_{ij} \| \,.$$

Osservazione II. Conviene porre, per ovvi motivi di concisione,

$$\overline{T^{(ij)}} = T^{(ij)} - \frac{1}{3} T g'^{ij} , \qquad \overline{L'_i{}^j} = L'_i{}^j - \frac{1}{3} L' \delta_i^j .$$

Con tale convenzione le seconde delle (4.3), (4.4) si scrivono

$$T^{(l)ij} = \overline{T^{(ij)}} , \qquad L'^{(l)j}_{\;i} = \overline{L'_i{}^j} . \tag{4.10}$$

5. - Intervento dell'energia libera termodinamica.

Supposto il sistema a trasformazioni reversibili, in corrispondenza a ogni trasformazione infinitesima del sistema a partire dallo stato attuale vale la

$$\delta F = - \delta l^{(i)} - E' \delta \theta' , \tag{5.1}$$

con F energia libera termodinamica ed E' entropia dello stato attuale. Stante la (1.8), si può quindi concludere che, nelle attuali ipotesi, l'energia libera termodinamica è da intendersi funzione, in modo essenziale, oltre che delle x^i (se $\mathscr{C}$ non è omogeneo in C) e della temperatura, delle e_{ij} e $\mu'^i{}_j$.

Stante però la (1.10) le $\mu'^i{}_j$ non sono tra loro indipendenti e, per la (3.1) [21]), fra loro indipendenti non risultano neppure le e_{ij} e la θ', non appena le trasformazioni a cui è soggetto $\mathscr{C}$ rispettino il vincolo di incomprimibilità. È inoltre $e_{ij} = e_{ji}$. Ne segue che, sotto la condizione, d'ora in poi tacitamente ammessa, che le trasformazioni rispettino il vincolo di incomprimibilità, la (5.1) si considererà non per variazioni arbitrarie delle e_{ij}, $\mu'^i{}_j$ ma per tutte e sole quelle che soddisfano alle (4.7), (1.11) e, ovviamente, alle $\delta e_{ij} = \delta e_{ji}$, che conseguono dalla simmetria delle e_{ij}. Pertanto la (5.1) si esaurisce nell'imporre l'esistenza di due scalari p, q che rendano simultaneamente soddisfatte le 16 eguaglianze [22])

---

[21]) Si tenga presente l'osservazione I alla fine del n. precedente.

[22]) Naturalmente i legami (3.1), (1.10) danno origine ad una certa indeterminazione nell'espressione effettiva dell'energia libera e delle sue derivate parziali, indeterminazione che risulta però evidentemente eliminata non appena si convenga di fare sempre capo ad una stessa, ben determinata espressione di F.

$$\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = -(2-\delta_{ij})(T^{(ij)} + \omega'^{ijh}{}_k L'_h{}^k - p\mathfrak{D}g'^{ij}) ,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mu'^i{}_j} = - L'_i{}^j + q\delta^j_i ,$$

$$\frac{\partial F}{\delta \theta'} = - E' - p\frac{\partial \lambda}{\partial \theta'} ,$$

nelle prime delle quali è ovvio che non va sommato rispetto agli indici ripetuti i, j. Da esse, tenute presenti le (1.12) e posto, per brevità,

$$\frac{1}{2-\delta_{ij}}\frac{\partial F}{\partial e_{ij}} = F^{*ij} , \quad \frac{\partial F}{\partial \mu'^i{}_j} = F_i{}^j , \tag{5.2}$$

per le prime delle quali vale la stessa osservazione fatta in precedenza (osservazione che d'ora in poi intenderò sempre sottintesa), si ricavano le

$$T^{(ij)} = - F^{*ij} + \omega'^{ijh}{}_k F_h{}^k + p\mathfrak{D}g'^{ij} , \tag{5.3}$$

$$L'_i{}^j = - F_i{}^j + q\delta^j_i , \tag{5.4}$$

$$E' = -\frac{\partial F}{\partial \theta'} - p\frac{\partial \lambda}{\partial \theta'} . \tag{5.5}$$

Dalle (5.3), (5.4) seguono le

$$p = \frac{1}{3\mathfrak{D}}[T + g'_{ij}(F^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k F_h{}^k)] , \tag{5.6}$$

$$q = \frac{1}{3}(L' + F_i{}^i) , \tag{5.7}$$

le quali, come d'altra parte appariva già evidente dalle considerazioni svolte al n. 4, esprimono che, una volta nota l'espressione dell'energia libera termodinamica, *il problema della determinazione degli scalari p, q non differisce da quello della determinazione degli invarianti lineari T, L' dei due tensori T^{ij}, $L'_i{}^j$.*

Nell'ipotesi in cui le trasformazioni alle quali è soggetto il sistema siano isoterme, valgono le (4.3), (4.4) e pertanto dalle (5.3), (5.4) seguono le

$$(5.8)\qquad T^{(l)ij} = -F^{*ij} + \omega'^{ijh}{}_k F_h{}^k + \frac{1}{3} g'_{pq}(F^{*pq} - \omega'^{pqh}{}_k F_h{}^k) g'^{ij},$$

$$(5.9)\qquad L'^{(l)}{}_i{}^j = -F_i{}^j + \frac{1}{3} F_p{}^p \delta_i^j$$

che, con il significato dei simboli ovvio (si ricordi l'osservazione II alla fine del n. precedente), si possono concisamente scrivere

$$(5.8')\qquad T^{(l)ij} = -\overline{(F^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k F_h{}^k)},$$

$$(5.9')\qquad L'^{(l)}{}_i{}^j = -\overline{F_i{}^j}$$

e nelle quali non v'è traccia degli scalari p, q: *nel caso isotermo, analogamente al caso dei sistemi esenti da vincoli interni* [23]), *la parte puramente lavorante della sollecitazione interna è completamente determinata non appena sia nota l'espressione dell'energia libera termodinamica.*

Nel caso di trasformazioni generiche valgono, invece delle (4.3), le (4.8), con la conseguenza che, mentre restano immutate le (5.9), le (5.8) van sostituite con le

$$(5.10)\qquad T^{(l)ij} = -F^{*ij} + \omega'^{ijh}{}_k F_h{}^k + p\mathfrak{D} g'^{ij},$$

donde la conclusione: *nel caso di trasformazioni non isoterme, a differenza del caso dei sistemi esenti da vincoli interni* [24]), *per la determinazione della parte puramente lavorante della sollecitazione interna è necessaria, oltre all'espressione dell'energia libera termodinamica, la conoscenza dello scalare p.*

Il fatto che le (5.10) non includano le (5.8) si spiega osservando che, nel passare dal caso non isotermo a quello isotermo, la

---

[23]) Cfr. [1], 6.
[24]) Cfr. [1], 6.

decomposizione del tensore degli sforzi nelle due parti non lavorante e puramente lavorante avviene in modo differente (si ricordino le (4.8), (4.3)).

* * *

Si tenga presente che, nel caso di trasformazioni non isoterme, l'espressione del lavoro delle forze interne di contatto in funzione dell'energia libera risulta data da

$$(5.11) \qquad \delta l^{(i)} = -\,\delta F - E'\delta\theta' = -\,(F^{*ij} - p\mathfrak{D}g'^{ij})\delta e_{ij} - F_i{}^j\delta\mu'^i{}_j ,$$

come subito si ottiene dalle (5.1), (5.3), (5.5), (4.7). Detta espressione, nel caso di trasformazioni isoterme, si riduce a

$$(5.12) \qquad \delta l^{(i)} = -\,F^{*ij}\delta e_{ij} - F_i{}^j\delta\mu'^i{}_j ,$$

il cui secondo membro non è altro che $-\delta F$ calcolato per $\theta' = \theta = \text{cost.}$

6. - Introduzione del potenziale isotermo.

D'ora in poi supporrò sistematicamente che le trasformazioni a cui è soggetto $\mathscr{C}$ siano isoterme, sicchè varranno la (3.2), con le conseguenti (3.5), (3.6), (3.8), (3.9), e le (4.3), (4.4), (5.8'), (5.9').

Introdotto il potenziale isotermo a temperatura costante θ (uniforme), definito, con evidente significato dei simboli, da [25])

$$(6.1) \qquad W(e,\, \mu';\, \theta;\, x) = F(e,\, \mu';\, \theta,\, \theta;\, x) - F(0,\, 0;\, \theta,\, \theta;\, x)\ ,$$

alle (5.3), (5.4) si possono sostituire le

$$(6.2) \qquad \begin{cases} T^{(ij)} = -\,W^{*ij} + \omega'^{ijh}{}_k W_h{}^k + pg'^{ij}\ , \\ L'_i{}^j = -\,W_i{}^j + q\delta_i^j\ , \end{cases}$$

nelle quali, in analogia alle (5.2), ho posto, come sempre farò

---

[25]) Si tenga presente che l'energia libera è funzione, oltre che delle e_{ij}, $\mu'^i{}_j$ e, eventualmente, delle x^i, di θ e θ', temperature dello stato di riferimento e dello stato attuale.

nel seguito,

$$\frac{1}{2-\delta_{ij}}\frac{\partial W}{\partial e_{ij}} = W^{*ij}, \qquad \frac{\partial W}{\partial \mu'^i{}_j} = W_i{}^j .$$

Inoltre, indicati con $p^{(0)}$, $q^{(0)}$ ciò che diventano p, q quando C' viene a coincidere con C, valori che si possono pensare quali dati e che in generale saranno funzioni dei punti di C, si ponga, prescindendo dai legami (3.2), (1.10), [26])

$$(6.3) \quad Z(e, \mu'; \theta; x) = W(e, \mu'; \theta; x) - \frac{p^{(0)}(x)}{2}(\mathfrak{D}^2(e)-1) - q^{(0)}(x)\mu'^i{}_i .$$

In quanto è per la (4.9),

$$\frac{\partial \mathfrak{D}^2(e)}{\partial e_{ij}} = 2\frac{\partial\, |g'_{ij}|}{\partial g'_{ij}} = 2(2-\delta_{ij})\mathfrak{D}^2 g'^{ij} ,$$

dove naturalmente non va sommato rispetto agli indici ripetuti i, j, dalla posizione (6.3) si ricava, introducendo dopo la derivazione la (3.2),

$$(6.4) \qquad \begin{cases} Z^{ij} = W^{ij} - p^{(0)}(2-\delta_{ij})g'^{ij} , \\ Z_i{}^j = W_i{}^j - q^{(0)}\delta_i^j , \end{cases}$$

con

$$Z^{ij} = \frac{\partial Z}{\partial e_{ij}}, \qquad Z_i{}^j = \frac{\partial Z}{\partial \mu'^i{}_j}, \qquad W^{ij} = \frac{\partial W}{\partial e_{ij}} .$$

Dalle (6.4) e (6.2), con le posizioni

$$(6.5) \qquad \pi = p - p^{(0)} , \qquad \chi = q - q^{(0)} ,$$

seguono le

$$(6.6) \qquad \begin{cases} T^{(ij)} = -Z^{*ij} + \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k + \pi g'^{ij} , \\ L'_i{}^j = -Z_i{}^j + \chi\delta_i^j , \end{cases}$$

con il significato di Z^{*ij} ormai ovvio.

---

[26]) Si tenga presente, in proposito, quanto osservato alla nota [22]).

Ne segue che, non appena è $C' \equiv C$, si ha, con evidente significato dei simboli,

$$(6.7)\qquad \left\{\begin{aligned} T^{(ij)(0)} &= -\, Z^{*ij(0)},\\ L'_i{}^{j(0)} &= -\, Z_i{}^{j(0)} \end{aligned}\right.$$

in quanto, ricordate le (1.9), è

$$(6.8)\qquad \omega'^{ijh}{}_k{}^{(0)} = 0\ .$$

Chiamata, al solito, *configurazione naturale*, una configurazione in cui, subordinatamente a una conveniente specificazione di p e q, risultino identicamente nulli i due tensori degli sforzi e dei momenti superficiali, segue dalle (6.7) che la *condizione che C sia configurazione naturale si traduce nella condizione che in C, oltre a Z* [27]*, si annullino le sue derivate prime rispetto alle e_{ij} e alle $\mu'^i{}_j$.* E tale condizione implica, per le (6.4), quest'altra, alquanto restrittiva, per il potenziale isotermo W:

$$(6.9)\qquad \left\{\begin{aligned} W^{*ij(0)} &= p^{(0)}\delta^{ij}\ ,\\ W_i{}^{j(0)} &= q^{(0)}\delta_i^j\ . \end{aligned}\right.$$

Dalle (6.6), tenute presenti le (4.10), seguono inoltre le

$$(6.10)\qquad \left\{\begin{aligned} T^{(l)ij} &= -\, \overline{(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k)}\ ,\\ L'^{(l)}{}_i{}^j &= -\, \overline{Z_i{}^j}\ , \end{aligned}\right.$$

in tutto analoghe alle (5.8′), (5.9′) e a quelle che si ottengono sostituendo in queste ultime alla F la W.

Infine, tenendo presenti le (1.12), la sostituzione delle (6.6) nella (1.8) dà luogo a

$$(6.11)\qquad \delta l^{(i)} = -\, Z^{*ij}\delta e_{ij} - Z_i{}^j \delta\mu'^i{}_j \equiv -\, \delta Z\ ,$$

---

[27]) Si osservi che risulta, ricordando le (1.7′),

$$\mu'^i{}_j{}^{(0)} = 0,$$

dove il significato di $\mu'^i{}_j{}^{(0)}$ è ovvio.

in tutto analoga alla (5.12) e all'espressione che si ottiene sostituendo nella (1.8) le (6.2).

7. - Equazioni fondamentali della statica isoterma dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili.

Ricordate le (3.8) e le (2.2), la sostituzione delle (6.6) nelle (1.3), (1.4) dà luogo alle [28])

$$(7.1)\qquad F^{i'} + \partial_j[x_i^{i'}(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k)] - \eta^{ihk} x_i^{i'} \partial_h T_k = \partial_{i'} \pi \ ,$$

$$(7.2)\qquad \begin{cases} f^{i'} + x_i^{i'}(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k)\nu_j - \eta^{ihk} x_i^{i'} T_k \nu_h = \pi x_{i'}^i \nu_i \ , \\ m_{i'} + x_{i'}^i Z_i{}^j \nu_j = \chi x_{i'}^i \nu_i \ , \end{cases}$$

$$(7.3)\qquad M_{i'} + 2x_{i'}^i T_i + \partial_j(x_{i'}^i Z_i{}^j) = \partial_{i'} \chi \ ,$$

alle quali vanno associate le (2.1) e che, qualora si indichino con $A^{i'}(\equiv A_{i'})$, $B^{i'}(\equiv B_{i'})$, $C_{i'}$, $D_{i'}$ i loro primi membri e, come al solito, si interpretino le x^i come coordinate curvilinee della configurazione attuale, si possono riassumere nella forma vettoriale seguente, conveniente per il seguito,

$$(7.1')\qquad \mathbf{A} = \operatorname{grad} \pi \ ,$$

$$(7.2')\qquad \begin{cases} \mathbf{B} = \pi \boldsymbol{\nu} \ , \\ \mathbf{C} = \chi \boldsymbol{\nu} \ , \end{cases}$$

$$(7.3')\qquad \mathbf{D} = \operatorname{grad} \chi \ ,$$

---

[28]) È naturale che nelle (7.1), (7.2), (7.3), come già nelle (1.3), (1.4), (2.5), ecc., le $x_{i'}^i$ vanno intese espresse in forma lagrangiana, ossia come il complemento algebrico, diviso per $|x_i^{i'}|$, dell'elemento $x_i^{i'}$ nella matrice $\| x_i^{i'} \|$. E lo stesso dicasi per $\partial_{i'}\pi$ e $\partial_{i'}\chi$, che vanno intese esplicitate al modo seguente

$$\partial_{i'}\pi = x_{i'}^i \partial_i \pi \ , \qquad \partial_{i'}\chi = x_{i'}^i \partial_i \chi \ .$$

dove si è implicitamente ammesso che si deve intendere

$$\nu_{i'} = x^i_{i'}\nu_i \,, \qquad A_i = x^{i'}_i A_{i'} \,, \; \dots \,. \tag{7.4}$$

Osservato poi che risulta [29])

$$x^{i'}_i x^{k'}_k \eta^{ihk} = x^h_{h'} \eta^{i'h'k'} \,, \tag{7.5}$$

la sostituzione nelle (7.1), (7.2) di T_k, dedotto dalle (7.3), dà luogo alle [30])

$$\begin{aligned} &F^{i'} + \partial_j[x^{i'}_i(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k)] + \\ &\qquad + \frac{1}{2}\eta^{i'h'k'}\partial_{h'}[\partial_j(x^k_{k'}Z_k{}^j) + M_{k'}] = \partial_{i'}\pi \,, \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &f^{i'} + x^{i'}_i(Z^{*ij} - \omega'^{ijh}{}_k Z_h{}^k)\nu_j + \\ &\quad + \frac{1}{2}\eta^{i'h'k'}[\partial_j(x^k_{k'}Z_k{}^j) + M_{k'}]x^h_{h'}\nu_h = \\ &\qquad\qquad = \pi x^i_{i'}\nu_i + \frac{1}{2}\eta^{i'h'k'}x^h_{h'}\partial_{k'}\chi\nu_h, \\ &m_{i'} + x^i_{i'}Z_i{}^j\nu_j = \chi x^i_{i'}\nu_i \,, \end{aligned} \right. \tag{7.7}$$

alle quali vanno associate le (7.3) e (2.1) e che, è ovvio, coincidono con quelle che si ottengono sostituendo le (6.6) direttamente nelle (2.5) e nelle seconde delle (1.4).

Nelle (7.6) *non compare l'incremento* χ.

Convenendo di indicare con $\alpha^{i'}(\equiv \alpha_{i'})$, $\beta^{i'}(\equiv \beta_{i'})$ e, come prima, con $C_{i'}$ i primi membri delle (7.6), (7.7), dette equazioni

---

[29]) Si tenga presente che, essendo nelle attuali ipotesi $|x^{i'}_i| = 1$, risulta

$$\eta^{i'h'k'} = x^{i'}_i x^{h'}_h x^{k'}_k \eta^{ihk} \,.$$

[30]) È ovvio che anche per le (7.5), (7.6) vale la stessa osservazione contenuta nella nota [28]).

si possono riassumere nelle

$$(7.6') \qquad \boldsymbol{\alpha} = \operatorname{grad} \pi \,,$$

$$(7.7') \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\beta} = \pi \boldsymbol{\nu} + \dfrac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \operatorname{grad} \chi \,, \\ \mathbf{C} = \chi \boldsymbol{\nu} \,, \end{cases}$$

mentre il legame fra i vettori $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ e i vettori **A**, **B**, **D** risulta espresso, come subito si verifica, dalle

$$(7.8) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{A} + \dfrac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{D} \,, \\ \boldsymbol{\beta} = \mathbf{B} + \dfrac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{D} \,. \end{cases}$$

Le (7.6), (7.7), *con le* (7.3), (2.1), *rappresentano le equazioni fondamentali della statica isoterma dei corpi incomprimibili a trasformazioni reversibili.* Presupposta naturalmente nota la funzione Z, in esse, a calcoli fatti, figurano come incognite le coordinate $x^{i'}$ (che in generale compaiono per il tramite delle loro derivate sino a quelle del 4° ordine incluso), le tre T_i e i due incrementi π, χ. Anzi nelle (7.6) non v'è traccia dell'incremento χ, come non v'è traccia dell'incremento π nelle (7.3). E inoltre, in dette equazioni tali incrementi, che intervengono direttamente nelle condizioni al contorno, espresse dalle (7.7), compaiono soltanto per il tramite delle loro derivate parziali prime.

* * *

In una teoria ove si suppongano necessariamente nulle le $L'_i{}^j$ e, conseguentemente, le $m_{i'}$, il $\delta l^{(i)}$ assume la stessa espressione del caso simmetrico e le funzioni termodinamiche sino ad ora considerate si presentano indipendenti dalle $\mu'^i{}_j$, ossia dipendono dalle stesse variabili che intervengono nel caso simmetrico. Le (7.1), (7.2), (7.3) si riducono a

$$(7.9)\qquad \begin{cases} F^{i'} + \partial_j(x^{i'}_i Z^{*ij}) - \eta^{ihk} x^{i'}_i \partial_h T_k = \partial_{i'}\pi \,, \\ f^{i'} + x^{i'}_i Z^{*ij}\nu_j - \eta^{ihk} x^{i'}_i T_k \nu_h = \pi x^{i}_{i'} \nu_i \,, \end{cases}$$

$$(7.10)\qquad T_i = -\frac{1}{2}\, x^{i'}_i M_{i'} \,,$$

e le (7.6), (7.7) a

$$(7.11)\qquad \begin{cases} F^{i'} + \partial_j(x^{i'}_i Z^{*ij}) + \dfrac{1}{2}\, \eta^{i'h'k'} \partial_{h'} M_{k'} = \partial_{i'}\pi \,, \\ f^{i'} + x^{i'}_i Z^{*ij}\nu_j + \dfrac{1}{2}\, \eta^{i'h'k'} x^{h}_{h'} M_{k'} \nu_h = \pi x^{i}_{i'} \nu_i \,. \end{cases}$$

Se infine si suppongono nulli anche i momenti di massa (caso simmetrico) le precedenti equazioni si riducono a

$$(7.12)\qquad \begin{cases} F^{i'} + \partial_j(x^{i'}_i Z^{*ij}) = \partial_{i'}\pi \,, \\ f^{i'} \;\; + x^{i'}_i Z^{*ij}\nu_j = \pi x^{i}_{i'} \nu_i \,, \end{cases}$$

dove, come già nelle (7.11), le incognite $x^{i'}$ compaiono per il tramite delle loro derivate sino a quelle del 2° ordine soltanto e dove, è ovvio, non v'è più traccia dell'incremento $\mathcal{X}$.

8. - Relazione simbolica della statica isoterma dei sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili.

D'ora in poi, per semplicità (e per brevità), supporrò che per il continuo in esame non esistano vincoli (nè interni, nè in superficie) diversi da quello di incomprimibilità [31]).

Ricordando che gli spostamenti virtuali del sistema incomprimibile, a partire da C', sono caratterizzati, nel caso isotermo, dai vettori solenoidali $\boldsymbol{\delta u}$ (cfr. il n. 3), le (7.1′), (7.2′), (7.3′)

---

[31]) È quanto ho già implicitamente ammesso al n. 3.

implicano, per ogni vettore solenoidale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, la relazione [32])

$$(8.1)\qquad \int_C (\mathbf{A} - \operatorname{grad}\pi) \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\, dC + \int_\Sigma (\mathbf{B} - \pi\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\, d\Sigma +$$

$$+ \int_\Sigma (\mathbf{C} - \chi\boldsymbol{\nu}) \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}\, d\Sigma + \int_C (\mathbf{D} - \operatorname{grad}\chi) \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}\, dC = 0 \ ,$$

ove $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$ è il vettore rappresentante la rotazione locale subita dagli elementi del sistema nel passaggio dalla configurazione C' alla configurazione che si ottiene sottoponendo C' allo spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$:

$$(8.2)\qquad \delta r^{i'} = \frac{1}{2}\, \eta^{i'h'k'} \partial_{h'} \delta u_{k'} \qquad\qquad (\delta u_{i'} \equiv \delta u^{i'}) \ ,$$

ossia

$$(8.2')\qquad \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} \ .$$

Alle (8.2), qualora si intenda, in analogia alle (3.7),

$$\delta r^i = x^i_{i'} \delta r^{i'} \ , \qquad \delta u_i = x^{i'}_i \delta u_{i'} \ ,$$

fan riscontro, nel riferimento curvilineo x^i, le

$$(8.2'')\qquad \delta r^i = \frac{1}{2}\, \eta^{ihk} \partial_h \delta u_k \ ,$$

così come alla (3.5) fa riscontro, nel suddetto riferimento curvilineo, la (3.6).

Tenendo presente che $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}$ sono vettori solenoidali e che, qualunque sia il vettore solenoidale $\mathbf{v}$, risulta

$$(8.3)\qquad \operatorname{grad} f \times \mathbf{v} = \operatorname{div}(f\mathbf{v}) \ ,$$

---

[32]) L'incondizionata corrispondenza biunivoca fra i punti P' di C' e i punti P di C permette di pensare $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, funzione vettoriale di P' soggetta all'unica condizione di essere solenoidale, come funzione vettoriale di P.

segue che la relazione (8.1) è equivalente alla

$$(8.4)\quad \int_C \mathbf{A} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} dC + \int_\Sigma \mathbf{B} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} d\Sigma + \int_\Sigma \mathbf{C} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} d\Sigma + \int_C \mathbf{D} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} dC = 0 \,.$$

Conviene a questo punto osservare che, indicate con $\delta e_{i'j'} = \frac{1}{2}(\partial_{i'}\delta u_{j'} + \partial_{j'}\delta u_{i'})$ le caratteristiche di deformazione inerenti al passaggio dalla configurazione C' a quella che si ottiene sottoponendo C' allo spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, risulta, tenendo presenti le (1.5) e le (3.4) [33],

$$\delta e_{ij} = x_i^{i'} x_j^{j'} \delta e_{i'j'} \,,$$

relazioni esprimenti che le variazioni δe_{ij} sono le componenti, nel riferimento x^i, delle $\delta e_{i'j'}$.

È inoltre [34])

$$x_{i'}^i \partial_j \delta r^{i'} = \omega'^{hki}{}_j \delta e_{hk} + \delta \mu'^i{}_j \,.$$

Pertanto, ricordata l'espressione esplicita di **A**, **B**, **C**, **D** e le (7.5), l'applicazione della formula di Green permette esplicitare la (8.4) nella

$$(8.5)\quad \int_C F^{i'} \delta u_{i'} dC + \int_\Sigma f^{i'} \delta u_{i'} d\Sigma + \int_C M_{i'} \delta r^{i'} dC + \int_\Sigma m_{i'} \delta r^{i'} d\Sigma - \\ - \int_C Z^{*ij} \delta e_{ij} dC - \int_C Z_i{}^j \delta \mu'^i{}_j dC = 0 \,,$$

valida per ogni spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, *nella quale non v'è più traccia nè degli incrementi* π, X, *nè della parte emisimmetrica di* T^{ij}, *nè delle* $\omega'^{hki}{}_j$.

* * *

Con procedimento identico a quello seguito per ottenere la (8.4), dalle (7.6'), (7.7') si ottiene, in corrispondenza a ogni

[33]) Cfr. anche [1], 1.
[34]) Cfr. [1], 2.

spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, la relazione

$$(8.6) \qquad \int_C \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\, dC + \int_\Sigma \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{u}\, d\Sigma + \int_\Sigma \mathbf{C} \times \boldsymbol{\delta}\mathbf{r}\, d\Sigma = 0 \ ,$$

la quale, esplicitata, dà luogo ancora alla (8.5), donde la conclusione: *le relazioni globali* (8.4), (8.6) *si equivalgono.*

* * *

Per quanto ora visto, le (7.6′), (7.7′) implicano, per ogni spostamento virtuale $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, la (8.6) o, il che è lo stesso, la (8.4). Ma, come ora dimostrerò, sussiste pure la proprietà inversa: *il verificarsi della* (8.4) (*o della* (8.6)) *per ogni spostamento virtuale* $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ *è sufficiente ad assicurare l'esistenza di due scalari* π, χ *tali da rendere soddisfatte le* (7.6′), (7.7′).

Tenuto presente che ogni vettore solenoidale si può sempre pensare come il rotore di un altro vettore, si ha che la condizione affinchè $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$ sia solenoidale, e che quindi rappresenti uno spostamento virtuale del sistema, si può esprimere ponendo

$$\boldsymbol{\delta}\mathbf{u} = \operatorname{rot} \mathbf{w} \ ,$$

con $\mathbf{w}$ funzione vettoriale regolare definita in C', e quindi in C [35]). Con ciò la (8.4), ricordata la (8.2′), si scrive

$$(8.7) \qquad \int_C \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC + \int_\Sigma \mathbf{B} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}\, d\Sigma +$$
$$+ \frac{1}{2} \int_\Sigma \mathbf{C} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}\, d\Sigma + \frac{1}{2} \int_C \mathbf{D} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC = 0 \ .$$

Dovendo quest'ultima relazione valere, per ipotesi, qualunque sia $\mathbf{w}$, in un primo tempo si supponga che su Σ risulti, con evi-

---

[35]) Si veda la nota [31]).

dente significato dei simboli,

$$\mathbf{w} = 0\,, \qquad \frac{d\mathbf{w}}{dP} = 0\,, \qquad \frac{d^2\mathbf{w}}{dP^2} = 0\,.$$

Con le prime due di tali ipotesi la (8.7) si riduce alla

$$\int_C \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC + \frac{1}{2}\int_C \mathbf{D} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC = 0$$

che, tenendo presente la relazione

$$\mathbf{v}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{v}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 - \operatorname{div}(\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) \tag{8.8}$$

e applicando la formula di Green, dà luogo, per la prima delle dette ipotesi, alla

$$\int_C \operatorname{rot}\left(\mathbf{A} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{D}\right) \times \mathbf{w}\, dC = 0,$$

la quale, per l'arbitrarietà di $\mathbf{w}$, implica l'esistenza di uno scalare π' per il quale sia

$$\mathbf{A} + \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{D} = \operatorname{grad}\pi'\,. \tag{8.9}$$

Da questa, tenendo presenti la (8.8) e la (8.3), segue che si ha, qualunque sia $\mathbf{w}$,

$$\int_C \mathbf{A} \times \operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC + \frac{1}{2}\int_C \mathbf{D} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC =$$

$$= \int_C \operatorname{grad}\pi' \times \operatorname{rot} \mathbf{w}\, dC - \frac{1}{2}\int_C \operatorname{div}(\mathbf{D} \wedge \operatorname{rot}\mathbf{w})\, dC =$$

$$= \int_\Sigma \left(-\pi'\boldsymbol{\nu} + \frac{1}{2}\boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{D}\right) \times \operatorname{rot}\mathbf{w}\, d\Sigma$$

e pertanto la (8.7) si riduce alla

$$(8.10)\qquad \int_\Sigma \left(\mathbf{B} + \frac{1}{2}\,\boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{D} - \pi'\boldsymbol{\nu}\right) \times \operatorname{rot} \mathbf{w} d\Sigma + $$

$$+ \frac{1}{2}\int_\Sigma \mathbf{C} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w} d\Sigma = 0 \,.$$

Si supponga ora che su Σ risulti

$$\frac{d\mathbf{w}}{dP} = 0 \,, \qquad \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{w}}{d\nu} = 0 \,,$$

onde su Σ risulta, in base a una nota identità vettoriale [36]),

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w} = \boldsymbol{\nu} \wedge \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{w}}{d\nu} \,.$$

Con tali ipotesi la (8.10) si riduce alla

$$0 = \int_\Sigma \mathbf{C} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}\, d\Sigma = \int_\Sigma \mathbf{C} \wedge \boldsymbol{\nu} \times \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{w}}{d\nu}\, d\Sigma$$

che, per l'arbitrarietà di $\dfrac{d \operatorname{rot} \mathbf{w}}{d\nu}$, implica il parallelismo di $\mathbf{C}$ con $\boldsymbol{\nu}$: resta così accertata l'esistenza di uno scalare χ' per il

---

[36]) È la

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \mathbf{c}_i \wedge \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y^i} \,,$$

con $\mathbf{c}_i$ versore dell'i-esimo asse coordinato dell'arbitrario riferimento cartesiano y^i. Scelto uno dei tre versori $\mathbf{c}_i$ coincidente con $\boldsymbol{\nu}$, l'ipotesi che sia $\dfrac{d\mathbf{w}}{dP} = 0$ su Σ implica, per via di detta identità, che su Σ si abbia

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w} = \boldsymbol{\nu} \wedge \frac{d \operatorname{rot} \mathbf{w}}{d\nu} \,.$$

quale, su tutto Σ, risulta

$$\mathbf{C} = \chi' \boldsymbol{\nu} \,. \tag{8.11}$$

Tenute presenti la (8.3) e la (8.8) si ha quindi, qualunque sia $\mathbf{w}$,

$$\int_{\Sigma} \mathbf{C} \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Sigma = -\int_{C} \operatorname{div}(\chi' \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}) dC =$$

$$= -\int_{C} \operatorname{grad} \chi' \times \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w} \, dC = \int_{C} \operatorname{div} (\operatorname{grad} \chi' \wedge \operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{w}) dC =$$

$$= -\int_{\Sigma} \boldsymbol{\nu} \wedge \operatorname{grad} \chi' \times \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Sigma,$$

con la conclusione che la (8.10), e quindi la (8.7), si riduce alla

$$\int_{\Sigma} \left(\mathbf{B} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{D} - \pi' \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \operatorname{grad} \chi' \right) \times \operatorname{rot} \mathbf{w} \, d\Sigma = 0 \,.$$

Da questa, non appena si supponga che su Σ sia

$$\mathbf{w} = 0 \,, \qquad \frac{d\mathbf{w}}{d\nu} \neq 0 \,,$$

si deduce [37]) il parallelismo con $\boldsymbol{\nu}$ del vettore che in essa compare entro parentesi, ossia

$$\mathbf{B} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \mathbf{D} - \pi' \boldsymbol{\nu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \operatorname{grad} \chi' = \pi'' \boldsymbol{\nu} \,. \tag{8.12}$$

Con un ragionamento identico a quello contenuto in [5], I, 2,

---

[37]) È sufficiente ricordare l'identità richiamata nella nota [36]). Scelto uno dei tre versori $\mathbf{c}_i$ coincidente con $\boldsymbol{\nu}$, dall'ipotesi che su Σ sia $\mathbf{w} = 0$ si ha, su Σ,

$$\operatorname{rot} \mathbf{w} = \boldsymbol{\nu} \wedge \frac{d\mathbf{w}}{d\nu} \,.$$

si può infine provare che risulta

$$\pi'' = \text{cost.}$$

e pertanto, posto

$$\pi = \pi' + \pi'' , \qquad \chi = \chi'$$

e ricordate le (7.8), le (8.9), (8.12), (8.11) si scrivono

$$\boldsymbol{\alpha} = \operatorname{grad} \pi ,$$

$$\boldsymbol{\beta} = \pi \boldsymbol{\nu} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\nu} \wedge \operatorname{grad} \chi ,$$

$$\mathbf{C} = \chi \boldsymbol{\nu} ,$$

che, conformemente a quanto si intendeva provare, non sono altro che le (7.6′), (7.7′).

Resta così stabilita la perfetta equivalenza della (8.5) — *relazione simbolica della statica isoterma dei sistemi incomprimibili a trasformazioni reversibili* — *con le equazioni* (7.6′), (7.7′).

Detta relazione ha carattere lagrangiano.

* * *

Come già ho osservato, il pregio della relazione simbolica (8.5), in cui vengono ad identificarsi la (8.4) e la (8.6), risiede nel fatto che in essa non v'è traccia nè degli incrementi π, χ, nè della parte emisimmetrica del tensore degli sforzi.

Quando si sia riusciti a determinare l'incognito spostamento in modo da rendere completamente soddisfatta la (8.5), insieme, naturalmente, alla (3.2), si può ulteriormente far ricorso alla (7.6′) e alla prima delle (7.7′) per determinare, con sole quadrature, l'incognita π [38]), dopodichè, tramite le prime delle (6.6), resteranno univocamente determinate le $T^{(ij)}$. Sfugge invece a una determinazione analitica l'incremento χ, come subito segue

[38]) Dalle prima delle (7.7′) si ha per π la condizione al contorno

$$\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\nu} = \pi .$$

dalle (7.3). Esso resta determinato unicamente sul contorno, dalla condizione

$$\mathbf{C} \times \boldsymbol{\nu} = \chi \,,$$

che consegue dalla seconda delle (7.7′).

* * *

Qualora si suppongano nulle le $L'_{i}{}^{j}$ e, conseguentemente, le $m_{i'}$, la relazione simbolica (8.5) si riduce a

$$(8.13) \qquad \int_C F^{i'} \delta u_{i'} \, dC + \int_\Sigma f^{i'} \delta u_{i'} \, d\Sigma + \int_C M_{i'} \delta r^{i'} \, dC - \\ - \int_C Z^{*ij} \delta e_{ij} \, dC = 0$$

e *vi è perfetta equivalenza fra detta relazione, ritenuta valida per ogni spostamento virtuale* $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$, *e le equazioni* (7.11).

Nel caso in cui risultino nulle anche le $M_{i'}$ (caso simmetrico) la relazione in questione si riduce a

$$(8.14) \qquad \int_C F^{i'} \delta u_{i'} \, dC + \int_\Sigma f^{i'} \delta u_{i'} \, d\Sigma - \int_C Z^{*ij} \delta e_{ij} \, dC = 0 \;,$$

perfettamente equivalente alle equazioni (7.12) *non appena si ritenga valida per ogni spostamento virtuale* $\boldsymbol{\delta}\mathbf{u}$.

La relazione (8.14) è l'equivalente, in forma lagrangiana, della relazione simbolica stabilita in forma euleriana in [5], I, 2.

9. - Corpi elastici incomprimibili.

Escludendo il caso in cui nel sistema continuo vi sia intervento di autotensioni o automomenti superficiali (automomenti interni di contatto) [39]), ammetterò per $\mathscr{C}$ l'esistenza di una con-

[39]) In tal caso non è possibile postulare per $\mathscr{C}$ l'esistenza di configurazioni naturali ma unicamente l'esistenza di configurazioni spontanee, intendendo per tali le configurazioni che, subordinatamente a una con-

figurazione naturale che assumerò come configurazione di riferimento C. In tale configurazione risulta quindi (si veda il n. 6)

$$Z^{(0)}\ , \qquad Z^{ij(0)} = 0\ , \qquad Z_i^{\ j(0)} = 0\ . \tag{9.1}$$

Sempre escludendo il caso che nel sistema vi sia intervento di autotensioni o automomenti superficiali e conformemente alla teoria classica, ammetterò poi come postulato caratteristico dei corpi elastici l'esistenza di una *configurazione naturale intrinsecamente stabile*, ossia l'esistenza di una configurazione naturale tale che per ogni trasformazione isoterma a partire da essa, finita o infinitesima, che non si riduca a uno spostamento rigido e che rispetti il vincolo di incomprimibilità, il lavoro delle forze interne di contatto risulti essere negativo [40]).

In corrispondenza alla trasformazione isoterma che fa passare $\mathscr{C}$ da C a C', il lavoro delle forze interne di contatto relativo alla generica particella del sistema risulta essere espresso, stante quanto osservato alla fine del n. 6, da $-W(e,\ \mu';\ \theta;\ x)\,dC$, sicchè, fatta la posizione

$$V = \int_C Z(e,\ \mu';\ \theta;\ x)\,dC\ , \tag{9.2}$$

il lavoro complessivo risulta espresso da $-V$, non appena nella (6.3) si tengano presenti la (3.2) e la (1.10).

Nell'ipotesi che $\mathscr{C}$ sia elastico si può quindi concludere che la condizione che C sia configurazione naturale intrinsecamente stabile si traduce nelle condizioni locali (9.1) e nella condizione globale

$$V = \int_C Z(e,\ \mu';\ \theta;\ x)\,dC > 0 \tag{9.3}$$

---

veniente specificazione di p e q, rendano soddisfatte le equazioni generali (o, il che è lo stesso, la relazione globale (8.5)) in assenza di ogni forza e momento di massa e di ogni forza e momento superficiale esterni.

[40]) In tale proprietà è implicito che a partire da una configurazione naturale intrinsecamente stabile se ne può ottenere un'altra solo mediante uno spostamento rigido. Pertanto C risulta individuata a meno di uno spostamento rigido.

per ogni trasformazione isoterma che non corrisponda a uno spostamento rigido e che naturalmente soddisfi alla (3.2).

BIBLIOGRAFIA

[1] GALLETTO D.: *Contributo allo studio dei sistemi continui a trasformazioni reversibili con caratteristiche di tensione asimmetriche,* Rend. del Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. XXXV (1965), pp. 299-334.

[2] GALLETTO D.: *Nuove forme per le equazioni in coordinate generali della statica dei continui con caratteristiche di tensione asimmetriche,* Ann. della Scuola Norm. Sup. di Pisa, Sc. Fis. e Mat., s. III, vol. XVIII (1963), pp. 297-317.

[3] GALLETTO D.: *Sull'unicità in presenza di vincoli interni di una condizione cinematica fondamentale nella teoria delle deformazioni finite,* Atti dell'Ist. Veneto di Sc. Lett. e Arti, Classe di Sc. Mat. e Nat., t. CXXIII (1965), pp. 197-206.

[4] GRIOLI G.: *Elasticità asimmetrica,* Ann. di Mat., s. IV, vol. L (1960), pp. 389-417.

[5] SIGNORINI A.: *Trasformazioni termoelastiche finite,* Mem. 3ª, Ann. di Mat., s. IV, vol. XXXIX (1955), pp. 147-201.

Manoscritto pervenuto in redazione il 9 settembre 1965.