Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova

C. Baiocchi

# Sul problema misto per l'equazione parabolica del tipo del calore

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 36, nº 1 (1966), p. 80-121

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_80_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SUL PROBLEMA MISTO PER L'EQUAZIONE PARABOLICA DEL TIPO DEL CALORE

*di* C. BAIOCCHI (*a Pavia*) *)

## Introduzione.

In un recente lavoro [1] in corso di stampa sui Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova ho trattato la regolarità e l'unicità della soluzione di una equazione differenziale astratta.

In questo articolo mi propongo di dare una applicazione concreta dei risultati ottenuti in [1] al caso delle equazioni del tipo del calore ottenendo teoremi di unicità della soluzione del problema misto in classi nelle quali è nota l'esistenza della soluzione; ed ottenendo in alcuni casi teoremi « più forti » di quelli ottenuti in forma astratta.

Il risultato fondamentale è enunciato nel teorema 8.4; e dà una risposta (affermativa) sotto ipotesi molto generali ad una questione posta dal Prof. Lions al corso C.I.M.E. 1963 (cfr. [8]), questione che ha dato avvio a questa ricerca.

## 1. Posizione del problema.

**1.1.** - Sia $\Omega$ un aperto limitato dello spazio euclideo a $n$ dimensioni $\mathcal{R}^n$ il cui punto generico sarà indicato con $x \equiv (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Avrò bisogno di una « sufficiente regolarità » su $\Omega$; per fis-

---

* Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pavia.

sare le idee supporrò $\Omega$ di classe $C^\infty$ [1]), ipotesi largamente sufficiente a trattare tutti i problemi in esame ma che può essere caso per caso notevolmente attenuata. In sintesi le ipotesi su $\Omega$ sono:

$$\text{(1.1)} \qquad \textit{$\Omega$ è un aperto limitato di $\mathfrak{R}^n$ di classe $C^\infty$.}$$

Sia $\Gamma$ la frontiera di $\Omega$; per la (1.1) $\Gamma$ sarà una varietà ad $n-1$ dimensioni indefinitamente differenziabile, ed $\Omega$ si troverà localmente da una sola parte di $\Gamma$. Indicherò con $\nu$ la normale a $\Omega$ orientata verso l'interno.

Sia $I = ]T_0, T_1[$ $(-\infty \leqslant T_0 < T_1 \leqslant +\infty)$ un intervallo aperto (o una semiretta, o l'intera retta) dello spazio euclideo a una dimensione $\mathfrak{R}^1$, il cui punto generico sarà indicato con $t : I = \{t \in \mathfrak{R}^1;\ T_0 < t < T_1\}$.

Indicando con $\overline{E}$ la chiusura di un sottoinsieme $E$ di uno spazio euclideo porrò $Q = \Omega \times I$; $\overline{Q} = \overline{\Omega} \times \overline{I}$; indicherò poi con $\Sigma = \Gamma \times I$ il « mantello » del cilindro $Q$; e con $\overline{\Sigma} = \Gamma \times \overline{I}$ il « mantello » del cilindro $\overline{Q}$.

**1.2.** - Sia $A = A(x, t)$ un operatore differenziale in $x$, lineare, del II ordine, che dipende da $\{x, t\} \in \overline{Q}$:

$$\text{(1.2)} \quad Au = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x,t) \cdot u$$

(qui e ovunque nel seguito le derivate, salvo esplicito avviso in contrario, sono intese nel senso delle distribuzioni; cfr. [18]). Sui « coefficienti » $a_{ij}$, $b_i$, $c$ dell'operatore $A$ avrò bisogno di una « sufficiente regolarità »; per fissare le idee supporrò che sia verificata la seguente ipotesi:

$$\text{(1.3)} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{ij}(x,t), \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_i}, \dfrac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}, \dfrac{\partial^2 a_{ij}}{\partial x_i \partial x_j}, b_i(x,t), \dfrac{\partial b_i}{\partial x_i}, c(x,t) \\ \textit{sono continui in } \overline{Q} \end{array} \right. \qquad (i, j = 1, 2, \ldots n)$$

[1]) Nel senso che $\Omega$ è di classe $C^k$ per ogni intero $k$. Per la definizione di aperto di classe $C^k$ cfr. ad es. [13].

Faccio ora le seguenti posizioni:

$$a = \left(\sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cos (x_j, \nu) \Big|^2 \right)^{1/2}; \quad b = \sum_{i=1}^{n} x_i\left(b_i(x, t) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\right);$$

$$\frac{\partial}{\partial \nu^*} = \frac{1}{a} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \cos (x_j, \nu) \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Con tali notazioni porrò, per $f \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$ (cioè continua con le sue derivate di ogni ordine ed a supporto compatto contenuto in $\overline{Q}$; notazioni di [18]) [2]):

$$(1.4) \quad S_2 f = f_{|\Sigma}; \quad S_1 f = \frac{\partial f}{\partial \nu^*}; \quad T_1 f = a \cdot f_{|\Sigma} : T_2 f = a \frac{\partial f}{\partial \nu^*} - b f_{|\Sigma}$$

Pongo ancora $\Lambda = A + \dfrac{\partial}{\partial t}$ ; $\Lambda^* = A^* - \dfrac{\partial}{\partial t}$ dove con $A^*$ indico l'operatore « aggiunto formale » di $A$ e cioè (indicando con $\overline{\alpha}$ il complesso coniugato del numero complesso $\alpha$):

$$A^* v = - \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 (\overline{a_{ij}}\, v)}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (\overline{b_i} \cdot v)}{\partial x_i} + \overline{c} \cdot v$$

Con tali notazioni, grazie alle (1.1), (1.3) si ha (cfr. [13]):

$$(1.5) \quad \int_Q f \cdot \overline{\Lambda^* g}\, dx dt - \int_Q \Lambda f \cdot \overline{g}\, dx dt = \int_\Omega f(x, T_0) \overline{g(x, T_0)}\, dx -$$
$$- \int_\Omega f(x, T_1) \overline{g(x, T_1)}\, dx + \int_\Sigma S_2 f \cdot \overline{T_2 g}\, d\sigma - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma$$
$$-\infty < T_0 < T_1 < +\infty$$
$$f, g \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$$

$$(1.5') \quad \int_Q f \cdot \overline{\Lambda^* d}\, x dt - \int_Q \Lambda f \overline{g}\, dx dt = \int_\Omega f(x, T_0) \overline{g(x, T_0)}\, dx +$$
$$+ \int_\Sigma S_2 f \cdot \overline{T_2 g}\, d\sigma - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma \qquad -\infty < T_0 < T_1 = +\infty$$
$$f, g \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$$

[2]) Qui e dovunque nel seguito se $f$ è una funzione definita in $E$ ed $E_1$ è un sottoinsieme di $E$ con $f_{|E_1}$ indico la restrizione di $f$ ad $E_1$.

$$(1.5'')\quad \int_Q f \cdot \overline{\Lambda^* g}\, dx dt - \int_Q \Lambda f \cdot \bar{g}\, dx dt = - \int_\Omega f(x, T_1)\overline{g(x, T_1)}\, dx +$$

$$+ \int_\Sigma S_2 f \cdot \overline{T_2 g}\, d\sigma - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma \qquad \begin{array}{l} f, g \in \mathfrak{D}(\bar{Q}) \\ -\infty = T_0 < T_1 < +\infty \end{array}$$

$$(1.5''')\quad \int f \cdot \overline{\Lambda^* g}\, dx dt - \int \Lambda f \cdot \bar{g}\, dx dt = \int S_2 f \cdot \overline{T_2 g}\, d\sigma - \int S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma$$

$$f,\ g \in \mathfrak{D}(\bar{Q}) \quad -\infty = T_0;\ T_1 = +\infty$$

dove $dx = dx_1 \cdot dx_2 \ldots dx_n$ indica l'elemento di « volume » su $Q$ e $d\sigma$ indica l'elemento di « superficie » su $\Sigma$.

**1.3.** - Sia $a(t, u, v)$ la « forma sesquilineare associata » ad $A$, cioè:

$$(1.6)\quad a(t, u, v) = \int_\Omega \left[ \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial (a_{ij} \bar{v})}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \bar{v} + c \cdot u \cdot \bar{v} \right] dx\,.$$

Grazie alle (1.1), (1.3) vale la « mezza formula di Green » (cfr. [13]):

$$(1.7)\qquad \int_{T_0}^{T_1} \left[ a(t, f, g) - \int_\Omega f \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial t}}\, dx \right] dt = \int_Q \Lambda f \cdot \bar{g}\, dx dt +$$

$$+ \int_\Omega f(x, T_0)\overline{g(x, T_0)}\, dx - \int_\Omega f(x, T_1)\overline{g(x, T_1)}\, dx - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma$$

$$-\infty < T_0 < T_1 < +\infty \quad f, g \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$$

e le analoghe per $T_0$, $T_1$ non entrambi finiti; in particolare:

$$(1.7')\quad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ a(t, f, g) - \int_\Omega f \cdot \overline{\frac{\partial g}{\partial t}}\, dx \right] dt = \int_Q \Lambda f \cdot \bar{g}\, dx dt - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma$$

$$T_0 = -\infty,\ T_1 = +\infty\ f, g \in \mathfrak{D}(\bar{Q})$$

Sulle funzioni $a_{ij}(x, t)$ farò la seguente ipotesi:

(1.8) *Esiste un numero* $\beta > 0$ *tale che per ogni* $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots$ $\ldots, \xi_n) \in \mathcal{R}^n$ *e per ogni* $\{x, t\} \in \overline{Q}$ *si ha* $Re \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, t)\xi_i\xi_j \leqslant \beta \cdot \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$.

Come è noto le (1.3), (1.8) implicano:

(1.9) *Esistono due numeri* $\alpha$ *e* $\gamma$ *con* $\alpha > 0$ *tali che, per ogni* $v \in H^1(\Omega)$ *ed ogni* $t \in \overline{I}$ *si ha* $Re\ a(t, v, v) + \gamma \mid v \mid^2_{L^2(\Omega)} \leqslant$ $\leqslant \alpha \mid v \mid^2_{H^1(\Omega)}$.

**1.4.** - Sia $\Sigma_1$ un aperto di $\Sigma$ e sia $\Sigma_2 = (\Sigma \overset{\circ}{-} \Sigma_1)$ (con $\overset{\circ}{E}$ indico l'interno dell'insieme $E$). Studierò nei prossimi numeri problemi misti del seguente tipo: assegnati $f(x, t)$, $u_0(x)$ in spazi opportuni (se $T_0 = -\infty$ si deve prendere $u_0 = 0$) studiare esistenza e unicità di $u(x, t)$ tale che verifichi:

$$(1.10) \qquad \Lambda u = f \quad in \quad Q; \quad u(x, T_0) = u_0(x) \quad in \quad \Omega; \\ S_1 u = 0 \ in \ \Sigma_2\,; \quad S_2 u = 0 \ in \ \Sigma_1\,.$$

In particolare se $\Sigma_1 = \Sigma$ (risp. se $\Sigma_1 = \emptyset$) si otterrà il problema misto del tipo Cauchy-Dirichlet (risp. Cauchy-Neumann).

Sugli insiemi $\Sigma_1, \Sigma_2$ avrò bisogno di una « sufficiente regolarità » (ad es. se $\Sigma - \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ non ha misura nulla non si potrà ovviamente avere unicità). Supporrò precisamente che la frontiera di $\Sigma_1$ su $\Sigma$ abbia misura $n$ dimensionale nulla, cioè che gli insiemi $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ siano misurabili secondo Peano Jordan. In sintesi supporrò che:

$$(1.11) \qquad \Sigma_1, \Sigma_2 \ sono \ aperti \ di \ \Sigma; \ \overline{\Sigma}_1 \cup \overline{\Sigma}_2 = \Sigma\,; \\ \text{mis}_n\ (\overline{\Sigma}_1 \cap \overline{\Sigma}_2) = 0\,.$$

Si osservi che, indicando con $\Gamma_i(\tau)$ l'intersezione tra $\Sigma_i$ e l'iperpiano di equazione $t = \tau$, la (1.11) implica:

$$(1.12) \qquad \Gamma_i(t) \ è \ aperto \ in \ \Gamma; \ per \ quasi \ ogni \ t \\ \text{mis}_{n-1}(\Gamma - \Gamma_1(t) \cup \Gamma_2(t)) = 0\,.$$

## 2. Richiami su alcuni spazi funzionali.

**2.1.** - Richiamo brevemente alcune definizioni su spazi « dissimetrici » rispetto al numero di derivate ed alcune loro proprietà.

Se $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sono due spazi di Hilbert con $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2$ ed $\mathcal{H}_1$ denso in $\mathcal{H}_2$ con $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]_\vartheta$ ($\vartheta \in ]0,1[$) indico lo spazio di interpolazione di indice $\vartheta$ tra $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$, ad es. secondo il metodo di [6].

Se $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert ed $I = ]T_0, T_1[$ con $L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})$ (ovvero con $H^0(T_0, T_1; \mathcal{H})$) si indica lo spazio delle funzioni definite in $I$, misurabili a valori in $\mathcal{H}$, la cui norma è in $L^2(I)$; munito del prodotto scalare $(u, v)_{L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})} = \int_{T_0}^{T_1} (u,(t), v(t))_{\mathcal{H}} dt$, $L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})$ risulta uno spazio di Hilbert. Per $k$ intero positivo si pone poi $H^k(T_0, T_1; \mathcal{H}) = \{u \in L^2(T_0, T_1; \mathcal{H}); \frac{d^\alpha u}{dt^\alpha} \in L^2(T_0, T_1; \mathcal{H}); \alpha = 1, 2, ..., k\}$ munito del prodotto scalare $(u, v)_{H^k(T_0, T_1; \mathcal{H})} = \sum_{\alpha=0}^{k} \left(\frac{d^\alpha u}{dt^\alpha}, \frac{d^\alpha v}{dt^\alpha}\right)_{L^2(T_0, T_1; \mathcal{H})}$, $H^k(T_0, T_1; \mathcal{H})$ risulta uno spazio di Hilbert (qui le derivate sono intese nel senso di $\mathcal{D}'(\mathcal{H})$; cfr. [19]).

Per $\vartheta$ reale in $]0,1[$ e $k$ intero $\geqslant 0$ si pone poi $H^{k+\vartheta}(T_0, T_1; \mathcal{H}) = [H^{k+1}(T_0, T_1; \mathcal{H}), H^k(T_0, T_1; \mathcal{H})]_{1-\vartheta}$.

**2.2.** - Si indichino con $\mathcal{F}_x f$ ed $\mathcal{F}_t t$ le trasformate di Fourier in $x$ e $t$ rispettivamente della distribuzione $f \in S'(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ (cfr. [18]); $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ e $\tau$ saranno le variabili duali di $x$ e $t$; $|\xi| = (\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2)^{\frac{1}{2}}$.

Siano $\alpha$, $\beta$ reali. Si indica con $H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ lo spazio: $\{f \in S'(\mathcal{R}^{n+1}); (1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}(1 + \tau^2)^{\beta/2}\mathcal{F}_x\mathcal{F}_t f \in L^2(\mathcal{R}^{n+1})\}$ con la norma $|f|_{H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)} = |(1 + |\xi|^2)^{\alpha/2}(1 + \tau^2)^{\beta/2}\mathcal{F}_x\mathcal{F}_t f|_{L^2(\mathcal{R}^{n+1})}$ che induce su $H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ una struttura di spazio di Hilbert.

Si verifica banalmente che, per $\alpha$, $\beta \geqslant 0$ lo spazio $H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$

è isomorfo (con norme equivalenti) allo spazio [3]):

$$L^2(-\infty, +\infty;\ H^\alpha(\mathcal{R}^n)) \cap H^\beta(-\infty, +\infty, L^2(\mathcal{R}^n))$$

(cfr. anche [16]).

Ricordo che, per $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ reali e $\vartheta$ reale in $]0,1[$ si ha (cfr. [16]):

$$(2.1)\qquad [H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1),\ H^{\gamma,\delta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)] \cong H^{\alpha(1-\vartheta)+\gamma\vartheta,\beta(1-\vartheta)+\delta\vartheta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)\,.$$

**2.3.** - Introduco ora gli spazi analoghi relativi al cilindro infinito $\Omega \times ]-\infty, +\infty[ = Q$. Precisamente pongo, per $\alpha$, $\beta$ reali $\geqslant 0$: $H^{\alpha,\beta}(Q) = L^2(-\infty, +\infty;\ H^\alpha(\Omega)) \cap H^\beta(-\infty, +\infty;\ L^2(\Omega))$. Si osservi che tali spazi coincidono, per $\alpha$ e $\beta$ interi, con gli spazi introdotti in [17] e ivi indicati con lo stesso simbolo; farò vedere ora che tale coincidenza si ha anche per $\alpha$ e $\beta$ razionali. Si ha intanto (cfr. [17]):

(2.2) *Indicando con $R$ l'operatore di restrizione a $Q$, per ogni coppia $\alpha$, $\beta$ di interi non negativi $R$ è lineare continua suriettiva da $H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times R^1)$ su $H^{\alpha,\beta}(Q)$.*

(2.3) *Per ogni fissato intero $k$ esiste un operatore $P_k$ tale che $P_k$ è lineare continuo da $H^{\alpha,\beta}(Q)$ in $H^{\alpha,\beta}(\mathcal{R}^n \times \mathcal{R}^1)$ per ogni coppia $\alpha, \beta$ di interi compresi tra $0$ e $k$; inoltre $R \cdot P_k =$ identità.*

**2.4.** - Siano ora $\alpha$, $\beta$ reali $\geqslant 0$; si indichi con $\alpha^*$ (risp. $\beta^*$) il più piccolo intero maggiore di $\alpha$ (risp. di $\beta$). Si ha:

$$H^{\alpha,0}(Q) \cong L^2(-\infty, +\infty;\ H^\alpha(\Omega)) \cong \text{(cfr. [10])}\ L^2(-\infty, +\infty;$$
$$[H^{\alpha^*}(\Omega), H^{\alpha^*-1}(\Omega)]_{\alpha^*-\alpha}) \cong \text{(cfr. [12] chap. VII)}\ [L^2(-\infty, +\infty\ ;$$
$$H^{\alpha^*}(\Omega)), L^2(-\infty, +\infty;\ H^{\alpha^*-1}(\Omega))]_{\alpha^*-\alpha} \cong [H^{\alpha^*,0}(Q), H^{\alpha^*-1,0}(Q)]_{\alpha^*-\alpha}\,.$$

---

[3]) Se $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$ sono due spazi di Hilbert si pensa $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$ spazio di Hilbert rispetto al prodotto scalare $(u,v)_{\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2} = (u,v)_{\mathcal{H}_1} + (u,v)_{\mathcal{H}_2}$.

Inoltre si ha ovviamente:

$$H^{0,\beta}(Q) \cong H^{\beta}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)) = [H^{\beta^*}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)),$$
$$H^{\beta^*-1}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))]^{\beta^*-\beta}.$$

Combinando le due relazioni trovate si ottiene:

$$(2.4) \qquad H^{\alpha,\beta}(Q) \cong [H^{\alpha^*,0}(Q), H^{\alpha^*-1,0}(Q)]_{\alpha^*-\alpha} \cap \cap [H^{0,\beta^*}(Q), H^{0,\beta^*-1}(Q)]_{\beta^*-\beta} \qquad \alpha, \beta \geqslant 0$$

essendo ovviamente, sempre per $\alpha$ e $\beta \geqslant 0$:

$$(2.5) \qquad H^{\alpha,\beta}(Q) \cong H^{\alpha,0}(Q) \cap H^{0,\beta}(Q).$$

La (2.3) e la (2.4), grazie a ben note proprietà di interpolazione, danno per $k \geqslant \max[\alpha^*, \beta^*]$:

$$P_k(H^{\alpha,\beta}(Q)) \subseteq P_k([H^{\alpha^*,0}(Q), H^{\alpha^*-1,0}(Q)]_{\alpha^*-\alpha}) \cap P_k([H^{0,\beta^*}(Q),$$

$$H^{0,\beta^*-1}(Q)]_{\beta^*-\beta}) \subseteq [P_k(H^{\alpha^*,0}(Q)), P_k(H^{\alpha^*-1,0}(Q))]_{\alpha^*-\alpha} \cap [P_k(H^{0,\beta^*}(Q)),$$

$$P_k(H^{0,\beta^*-1}(Q))]_{\beta^*-\beta} \subseteq [H^{\alpha^*,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1), H^{\alpha^*-1,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)]_{\alpha^*-\alpha} \cap$$
$$\cap [H^{0,\beta^*}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1), H^{0,\beta^*-1}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)]_{\beta^*-\beta} = \text{(per la (2.1))}$$

$$H^{\alpha,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1) \cap H^{0,\beta}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1) = H^{\alpha,\beta}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1).$$

Analogamente le (2.2) e (2.4) danno per $\alpha, \beta \geqslant 0$:

$$R(H^{\alpha,\beta}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)) = R(H^{\alpha,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1) \cap H^{0,\beta}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)) \subseteq$$
$$\subseteq R(H^{\alpha,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)) \cap R(H^{0,\beta}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1) = \text{(per la (2.1))}$$

$$R([H^{\alpha^*,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1), H^{\alpha^*-1,0}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)]_{\alpha^*-\alpha}) \cap$$
$$\cap R([H^{0,\beta^*}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1), H^{0,\beta^*-1}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)]_{\beta^*-\beta}) = \text{(per la 2.2))}$$

$$[H^{\alpha^*,0}(Q), H^{\alpha^*-1,0}(Q)_{\alpha^*-\alpha} \cap [H^{0,\beta^*}(Q), H^{0,\beta^*-1}(Q)]_{\beta^*-\beta} = H^{\alpha,\beta}(Q)$$

(per la (2.4)).

Si è così visto che, anche per $\alpha$, $\beta$ reali, $H^{\alpha,\beta}(Q)$ coincide con lo spazio delle restrizioni a $Q$ degli elementi di $H^{\alpha,\beta}(\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^1)$; cioè *lo spazio qui indicato con* $H^{\alpha,\beta}(Q)$ *coincide, per* $\alpha$, $\beta$ *razionali, con lo spazio introdotto in* [17] *e indicato allo stesso modo.* In seguito sfrutterò appunto per tali spazi proprietà dimostrate in [17] per gli spazi ivi introdotti.

**2.5.** - Sempre per $\alpha$, $\beta$ reali $\geqslant 0$ si pone:

$$H^{\alpha,\beta}(\Sigma) = L^2(-\infty, +\infty; H^\alpha(\Gamma)) \cap$$

$$\cap\, H^\beta(-\infty, +\infty; L^2(\Gamma)); \; H^{-\alpha,-\beta}(\Sigma) = (H^{\alpha,\beta}(\Sigma))'$$

(con $\mathcal{H}'$ indico l'antiduale dello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$). Analogamente a quanto visto sopra si ha che per $\alpha$ e $\beta$ razionali tali spazi coincidono con gli spazi introdotti in [17] e ivi indicati allo stesso modo.

Ricordo anche che, essendo $\Sigma( = \Gamma \times ]-\infty, +\infty[)$ « senza bordo », $\mathfrak{D}(\Sigma)$ è denso in $H^{\alpha,\beta}(\Sigma)$ per $\alpha$, $\beta$ reali di segno concorde; cioè gli spazi $H^{\alpha,\beta}(\Sigma)$ sono spazi normali di distribuzioni (terminologia di [18]).

## 3. Teoremi di tracce.

**3.1.** - Supporrò questo numero $Q = \Omega \times ] -\infty, +\infty[$.

Ricordo che $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ è denso in $H^{\alpha,\beta}(Q)$; e che si ha (cfr. [17]; i risultati enunciati sono validi anche per $\alpha$ e $\beta$ reali):

TEOREMA 3.1. - *L'applicazione* $u \to S_2 u$ *(risp.* $T_1 u$*) definita in* $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ *si prolunga in una applicazione lineare continua suriettiva, ancora indicata nello stesso modo di* $H^{\alpha,\beta}(Q)$ *su*

$$H^{\alpha-(1/2),\beta[1-(1/2\alpha)]}(\Sigma) \quad \text{per} \quad \alpha > \frac{1}{2}, \quad \beta \geqslant 0 .$$

*L'applicazione* $u \to S_1 u$ *(risp.* $T_2 u$*) definita in* $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ *si pro-*

*lunga in applicazione lineare continua suriettiva, ancora indicata nello stesso modo, di* $H^{\alpha,\beta}(Q)$ *su* $H^{\alpha-(3/2),\beta[1-3/2\alpha)]}(\Sigma)$ *per* $\alpha > \dfrac{3}{2}$, $\beta \geqslant 0$.

*Sempre per* $\alpha > \dfrac{3}{2}$, $\beta \geqslant 0$ *l'applicazione* $u \to \{S_2 u, S_1 u\}$ *(risp.* $\{T_1 u, T_2 u\}$*) di* $H^{\alpha,\beta}(Q)$ *in* $H^{\alpha-(1/2),\beta[1-(3/2\alpha)]}(\Sigma) \times H^{\alpha-(3/2),\beta[1(-3/2\alpha)]}(\Sigma)$ *è suriettiva; ed esiste un rilevamento* [4]) *lineare continuo di tale applicazione.*

OSSERVAZIONE 3.1 - Si osservi che, per passaggio al limite sulle $g \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$ la (1.5'''), grazie al teorema 3.1, dà:

$$(3.1)\quad (f, \Lambda^* g)_{L^2(Q)} - (\Lambda f, g)_{L^2(Q)} = \int_\Sigma S_2 f \cdot \overline{T_2 g}\, d\sigma - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma$$

$$f \in \mathfrak{D}(\overline{Q}),\ g \in H^{2,1}(Q)$$

e analogamente la (1.7') dà:

$$(3.2) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ a(t, f, g) - \int_\Omega f \cdot \frac{\partial \overline{g}}{\partial t}\, dx \right] dt = (\Lambda f, g)_{L^2(Q)} - \int_\Sigma S_1 f \cdot \overline{T_1 g}\, d\sigma$$

$$f \in \mathfrak{D}(\overline{Q}),\ g \in H^{1,1}(Q)$$

**3.2.** - Intraduco ora una nuova famiglia di spazi di Hilbert. Precisamente indicherò con $H^{\alpha,\beta}_\Lambda(Q)$ $(\alpha, \beta \geqslant 0)$ lo spazio $\{u \in H^{\alpha,\beta}(Q);\ \Lambda u \in L^2(Q)\}$ con prodotto scalare $(u, v)_{H^{\alpha,\beta}_\Lambda(Q)} = (u, v)_{H^{\alpha,\beta}(Q)} + (\Lambda u, \Lambda v)_{L^2(Q)}$.

Si dimostra (cfr. per ragionamenti analoghi [5] ed anche [11] in ipotesi più restrittive della (1.3) sui coefficienti di $A$):

$$(3.3)\qquad \mathfrak{D}(\overline{Q}) \text{ è denso in } H^{0,0}_\Lambda(Q)\,.$$

Dimostrerò ora per lo spazio $H^{0,0}_\Lambda(Q)$ un teorema di tracce

---

[4]) Nel senso che $\{S_2, S_1\}$ (risp. $\{T_1, T_2\}$) composto con tale applicazione, dà l'identità di $H^{\alpha-(1/2),\beta[1-(1/2\alpha)]}(\Sigma) \times H^{\alpha-(3/2),\beta[1-(3/2\alpha)]}(\Sigma)$.

analogo (a parte la suriettività dell'applicazione) al teorema 3.1. Precisamente:

TEOREMA 3.2. - *L'applicazione* $u \to S_2 u$ (*risp.* $S_1 u$) *definita in* $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ *si prolunga in una applicazione lineare continua di* $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ *in* $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$ (*risp. in* $H^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}}(\Sigma)$).

*Dimostrazione.* Sia $u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$. L'applicazione $u \to S_2 u$ definita in $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ si può considerare come un'applicazione di $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$; e se $\varphi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)$:

$$\langle S_2 u, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)} = \int_{\Sigma} S_2 u \cdot \overline{\varphi} d\sigma .$$

Sia $\varphi$ generica in $H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)$. Per il teorema 3.1 esisterà $v \in H^{2,1}(Q)$ tale che $T_1 v = 0$; $T_2 v = \varphi$; $| v |_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C \, | \varphi |_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)}$. Si osservi che si avrà anche (indico con la stessa lettera $C$ costanti diverse tra loro):

$$| v |_{L^2(Q)} \leqslant C \, | \varphi |_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)} ; \quad | \Lambda^* v |_{L^2(Q)} \leqslant C \, | \varphi |_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)} .$$

La (3.1) dà allora:

$$| \langle S_2 u, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)} | = \left| \int_{\Sigma} S_2 u \cdot \overline{T_2 v} d\sigma \right| = | (u, \Lambda v)_{L^2(Q)} -$$

$$- (\Lambda u, v)_{L^2(Q)} | \leqslant | u |_{L^2(Q)} \cdot | \Lambda^* v |_{L^2(Q)} + | \Lambda u |_{L^2(Q)} \, | v |_{L^2(Q)} \leqslant$$

$$\leqslant C \, | u |_{H^{0,0}_{\Lambda}(Q)} \cdot | \varphi |_{H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)}$$

e tale relazione, valendo per ogni $u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$ ed ogni $\varphi \in H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)$ dà: $| S_2 u |_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)} \leqslant C \, | u |_{H^{0,0}_{\Lambda}(Q)} \; \forall \, u \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$; il che esprime che l'applicazione $u \to S_2 u$ di $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ in $H^{-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}(\Sigma)$ è continua quando si indica su $\mathfrak{D}(\overline{Q})$ la norma di $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$, Per la (3.3) ed il teorema di Hahn-Banach ne segue il teorema relativamente all'applicazione $u \to S_2 u$. Analogamente si procede per quanto riguarda l'applicazione $u \to S_1 u$. *c.v.d.*

Osservazione 3.2. - Essendo l'applicazione $u \to T_1 u$ definibile mediante la formula $T_1 u = a \cdot S_2 u$ ed essendo (per la (1.3)) $a$ un moltiplicatore in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$ anche l'applicazione $u \to T_1 u$ si prolunga in una applicazione lineare continua di $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ in $H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma)$.

Osservazione 3.3. - Analogamente a quanto detto nell'osservazione 3.1, per passaggio al limite dalle (3.1) e (3.2) si ha; per $u \in H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ e $v \in H^{2,1}(Q)$;

$$(3.4) \qquad (u, \Lambda^* v)_{L^2(Q)} - (\Lambda u, v)_{L^2(Q)} = \langle S_2 u, T_2 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}}} - \langle S_1 u, T_2 v\rangle_{H^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}}(\Sigma), H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma)}$$

$$(3.5) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ a(t, u, v) - \int_{\Omega} u \cdot \overline{\frac{\partial v}{\partial t}}\, dx \right] dt = (\Lambda u, v)_{L^2(Q)} - \langle S_1 u, T_1 v\rangle_{H^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}}(\Sigma), H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma)}$$

## 4. Teoremi di interpolazione.

**4.1.** - Sfrutterò nei prossimi numeri alcuni teoremi di interpolazione che ho preferito riunire in un unico numero. Farò uso di teoremi generali sull'interpolazione dimostrati in [12] per gli spazi ivi indicati con $S(p_1, \vartheta_1, \mathcal{H}_1; p_2, \vartheta_2, \mathcal{H}_2)$ che sono qui applicabili perchè (cfr. appunto [12]) gli spazi $[\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2]_\vartheta$ coincidono con gli spazi indicati in [12] con $S(2, \vartheta, \mathcal{H}_1; 2, \vartheta - 1, \mathcal{H}_2)$.

**4.2.** - Sia $Q$ il cilindro infinito $\Omega \times ]-\infty, +\infty[$. Si ha:

$$[H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subset [H^1(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)), H^0(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2}}(-\infty, +\infty; L^2(\Omega)) \quad [H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subset$$

$$\subset [L^2(-\infty, +\infty; H^2(\Omega)), L^2(-\infty, +\infty; L^2(\Omega))]_{\frac{1}{2}} =$$

$$\text{(cfr. [12] ch. VII)} = L^2(-\infty, +\infty; [H^2(\Omega), L^2(\Omega)]_{\frac{1}{2}}) =$$
$$= \text{(cfr. [9])}\ L^2(-\infty, +\infty; H^1(\Omega)).$$

Combinando le due inclusioni si ha, per la (2.5):

$$[H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subseteq H^{1,\frac{1}{2}}(Q)\,. \tag{4.1}$$

OSSERVAZIONE 4.1. - Si può dimostrare (con prolungamenti e restrizioni del tipo (2.2) e (2.3)) che nella (4.1) si ha addirittura isomorfismo; io sfrutterò però solo l'inclusione trovata.

**4.3.** - Sia $\Sigma = \Gamma \times ]-\infty, +\infty[$; si ha allora (cfr. [16]; la dimostrazione è data supponendo $\Gamma$ un iperpiano ma vale anche se $\Gamma$ è una varietà « senza bordo »):

$$\begin{gathered}[H^{2,1}(\Sigma), H^{0,0}(\Sigma)]_{\frac{1}{4}} = H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma);\\ [H^{2,1}(\Sigma), H^{0,0}(\Sigma)]_{\frac{3}{4}} = H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)\,.\end{gathered} \tag{4.2}$$

Poichè si ha (cfr. [12] ch. III) $[H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{0,0}(\Sigma)$, applicando alle (4.2) il teorema di reiterazione di [12] (ch. IV) si ha [5]):

$$H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma) = [[H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_0, [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}}]_{\frac{1}{4}} =$$
$$= [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{8}}$$

$$H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) = [[H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_0, [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}}]_{\frac{3}{4}} =$$
$$= [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{3/8}\,.$$

Dalle ultime formule si ha, per dualità (cfr. [12] ch. III):

$$H^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}}(\Sigma) = [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{7/8};$$
$$H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma) = [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{\frac{5}{8}}\,.$$

---

5) Nel capitolo IV di [12] è sempre supposto $\vartheta \neq 0,1$ ma gli stessi risultati valgono anche per $\vartheta = 0,1$ (cfr. [12] pag. 36); analoghe osservazioni in seguito.

Applicando ancora il teorema di reiterazione si ha:

$$[H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = [H^{2,1}(\Sigma), H^{-2,-1}(\Sigma)]_{3/8} = H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)\ .$$

Analogamente (oppure per dualità dall'ultima formula trovata) si ha:

$$[H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)\,.$$

In sintesi si è ottenuto:

$$(4.3)\qquad \left\{\begin{array}{l} [H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma), H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma); \\ [H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}}(\Sigma)]_{\frac{1}{2}} = H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma). \end{array}\right.$$

OSSERVAZIONE 4.2. - Il procedimento seguito è di carattere generale e può essere ripetuto per interpolare tra spazi del tipo $H^{\alpha,\beta\cdot\alpha}(\Sigma)$ ed $H^{\gamma,\beta\cdot\gamma}(\Sigma)$ con $\alpha$, $\gamma$ reali qualunque e $\beta$ reale positivo. Più in generale si ha:

TEOREMA 4.1. - *Siano $H_1$, $H_{-1}$ due spazi di Hilbert con $H_1 \subset H_{-1}$ e $H_1$ denso in $H_{-1}$. Posto;*

$$(4.4)\qquad H_0 = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1}{2}}\ ;\ H_\vartheta = [H_1, H_0]_{1-\vartheta};\ H_{-\vartheta} = [H_0, H_{-1}]_\vartheta \qquad (\vartheta \in ]0,1[)$$

*si avrà:*

$$(4.5)\qquad H_\vartheta = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\vartheta}{2}} \qquad (\vartheta \in ]-1,1[)$$

$$(4.6)\qquad [H_\alpha, H_\beta]_\vartheta = H_{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta} \qquad \vartheta \in ]0,1[,\quad \alpha, \beta \in [-1,1]$$

*Viceversa presa la* (4.5) *come definizione valgono le* (4.4), (4.6).

*Dimostrazione.* Si prenda la (4.5) come definizione, dimostro la (4.6) e la (4.4) ne seguirà come caso particolare. Il teorema di reiterazione di [12] (cfr. [5]) dà, per $\alpha$, $\beta \in [-1,1]$, $\vartheta \in [0,1]$:

$$[H_\alpha, H_\beta]_\vartheta = [[H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\alpha}{2}}, [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\beta}{2}}]_\vartheta = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\alpha(1-\vartheta)-\beta\vartheta}{2}} =$$

$$= H_{\alpha(1-\vartheta)+\vartheta}\ ;$$

cioè vale la (4.6). Viceversa presa la (4.4) come definizione, si ha per $\vartheta \in ]0,1[$ cfr. sempre [12]):

$$H_\vartheta = [H_1, H_0]_{1-\vartheta} = [[H_1, H_{-1}]_0, [H_1, H_{-1}]_{\frac{1}{2}}]_{1-\vartheta} = [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\vartheta}{2}}$$

e analogamente per $\vartheta \in ]-1,0[$:

$$H_\vartheta = [H_0, H_{-1}]_\vartheta = [[H_1, H_{-1}]_{\frac{1}{2}}, [H_1, H_{-1}]_1]_\vartheta =$$
$$= [H_1, H_{-1}]_{\frac{1-\vartheta}{2}} ;$$

cioè la (4.4) implica la (4.5) e questa, come si è già visto, implica la (4.6). c.v.d.

**4.4.** - Si osservi che il teorema 4.1 ha un campo di applicazione molto vasto: ad es. prendendo $H_1 = H^{2,1}(\Sigma)$; $H_{-1} = H^{-2,-1}(\Sigma)$ e prendendo la (4.4) come definizione si ha ([12] ch. III) $H_0 = H^{0,0}(\Sigma)$ ed allora (cfr. [16]) è $H_\vartheta = H^{2\vartheta,\vartheta}(\Sigma)$ per $\vartheta \in [-1,1]$; e la (4.6) dà:

$$[H^{2\alpha,\alpha}(\Sigma), H^{2\beta,\beta}(\Sigma)]_\vartheta = H^{2[\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta, \alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta}(\Sigma) \qquad \alpha, \beta \in [-1,1]; \quad \vartheta \in [0,1] \tag{4.7}$$

che, come caso particolare, ridà la (4.3).

**4.5.** - Sfrutterò nel seguito anche il seguente risultato:

$$[H^1(\Omega), H^{-1}(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\Omega) \tag{4.8}$$

che non mi risulta esplicitamente osservato e di cui darò ora una dimostrazione. Più in generale dimostrarò che si ha:

TEOREMA 4.2. - *Siano $\alpha$ e $\beta$ reali, $\vartheta \in [0, 1]$ tali che $\alpha - \frac{1}{2}$, $\beta - \frac{1}{2}$ e $\alpha(1-\vartheta) + \beta\vartheta$ non siano interi negativi. Si ha:*

$$[H^\alpha(\Omega), H^\beta(\Omega)]_\vartheta = H^{\alpha(1-\vartheta)+\beta\vartheta}(\Omega) \tag{4.9}$$

*Dimostrazione.* Sia $m$ un intero positivo più grande di $|\alpha|$ e di $|\beta|$. Comincerò a far vedere che per avere la (4.9) basta dimostrare che:

$$[H^m(\Omega), H^{-m}(\Omega)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\Omega) . \tag{4.10}$$

E infatti, ad eccezione del caso $\gamma - \dfrac{1}{2}$ intero negativo, si ha (cf. [10]):

$$H^\gamma(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_{1-\gamma/m} \quad (0 < \gamma < m);$$

$$H^\gamma(\Omega) = [H^0(\Omega), H^{-m}(\Omega)]_{-\gamma/m} \quad (-m < \gamma < 0) .$$

Se vale la (4.10) prendendo nel teorema 4.1 $H_1 = H^m(\Omega)$, $H_{-1} = H^{-m}(\Omega)$ la (4.4), prendendo come definizione la (4.6), dà la (4.9).

Per dimostrare la (4.10) comincio ad osservare che con una partizione dell'unità e con omeomorfismi $m$ volte differenziabili insieme ai loro inversi ed a Jacobiano $\neq 0$ (che esistono per la (1.1)) posso sempre ridurmi al caso in cui $\Omega$ è un semispazio; posso cioè limitarmi a dimostrare che, posto $\mathfrak{R}^n_+ = \{x \in \mathfrak{R}^n;\ x_n > 0\}$, si ha:

$$[H^m(\mathfrak{R}^n_+), H^{-m}(\mathfrak{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\mathfrak{R}^n_+) .$$

Osservo ancora che essendo (cf. [12] ch. III) $[H^m_0(\mathfrak{R}^n_+), H^{-m}(\mathfrak{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} = L^2(\mathfrak{R}^n_+)$ per dimostrare l'ultima relazione, e quindi il teorema, basterà dimostrare:

$$[H^m(\mathfrak{R}^n_+), H^{-m}(\mathfrak{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} \subseteq L^2(\mathfrak{R}^n_+) . \tag{4.11}$$

Introduco alcune notazioni. Si ponga $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$; $y = x_n$. Il generico punto $x \in \mathfrak{R}^n_+$ potrà allora indicarsi con $x = (x', y)$ con $x'$ generico in $\mathfrak{R}^{n-1}$ e $y > 0$. Indicherò con $\overline{\mathfrak{R}^n_+}$ la chiusura di $\mathfrak{R}^n_+$ cioè $\overline{\mathfrak{R}^n_+} = \{x \in \mathfrak{R}^n;\ x = (x', y)$ con $y \geqslant 0\}$. Farò uso degli spazi $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}^n)$, $\mathfrak{D}(\overline{\mathfrak{R}^n_+})$ (cfr. [18]) cioè delle funzioni definitive in $\mathfrak{R}^n$ (risp. in $\overline{\mathfrak{R}^n_+}$) indefinitamente differenziabili ed a supporto compatto in $\mathfrak{R}^n$ (risp. in $\overline{\mathfrak{R}^n_+}$).

Sia $\{a_i\}_{i=1,2,\ldots,2m+2}$ la $2m+2$-upla di numeri soluzione di

$$\sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^l a_i = 1 \; ; \qquad l = 0,1,\ldots,2m+1 \tag{4.12}$$

(il sistema (4.12) è risolubile perchè il determinante dei coefficienti è il determinante di Vandermonde dei numeri (distinti) $\{-i\}_{i=1,\ldots,2m+2}$).

Indicando con $R$ la restrizione a $\overline{\mathcal{R}^n_+}$ pongo per $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{R}^n)$:

$$(T\varphi)(x',y) = \varphi(x',y) - \sum_{i=1}^{2m+2} (-1)^{m+1} a_i \varphi(x',-iy); \; Q\varphi = R \circ T\varphi.$$

Si osservi che per $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{R}^n) T\varphi$ ha supporto compatto: inoltre

$$\left.\frac{\partial^j T\varphi}{\partial y^i}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^j \varphi(x',y)}{\partial y^i}\right|_{y=0} - \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^{m+1} a_i \left.\frac{\partial^j \varphi(x',-iy)}{\partial y^i}\right|_{y=0} =$$

$$= \left.\frac{\partial^j \varphi(x,y)}{\partial y^j}\right|_{y=0} \cdot [1 - \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^{m+1+j} a_i] = 0$$

$$j = 0, 1, \ldots, m$$

per la (4.12) con $l = m+1, \ldots, 2m+1$.

Inoltre se $D^\alpha_{x'}$ è una generica derivata nelle variabili $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}$ è ovviamente:

$$D^\alpha_{x'} \left.\frac{\partial^j \varphi^\varphi}{\partial y^j}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^j D_{x'} T\varphi}{\partial y^j}\right|_{y=0} = \left.\frac{\partial^j T(D^\alpha_{x'}\varphi)}{\partial y_j}\right|_{y=0} = 0$$

$$\text{per } j = 0,1,\ldots,m$$

(risultato precedente applicato a $D^\alpha_{x'}\varphi$ invece di $\varphi$).

Se ne conclude che per $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{R}^n)$ $Q\varphi$ essendo continua con le sue prime $m$ derivate, a supporto compatto, e nulla con le sue derivate rispetto a $y$ fino all'ordine $m-1$ è in $H^m_0(\mathcal{R}^n_+)$.

Inoltre si ha ovviamente $| Q\varphi |_{H^m_0(\mathcal{R}^n_+)} \leqslant C \, | \varphi |_{H^m(\mathcal{R}^n)}$ per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{R}^n)$, $C$ che dipende solo da $m$; per il Teorema di Hahn-Banach si conclude che l'applicazione $\varphi \to Q\varphi$ si prolunga in modo unico in una applicazione lineare e continua, ancora indicata allo stesso modo, di $H^m(\mathfrak{R}^n)$ in $H_0^m(\mathfrak{R}_+^n)$.

Indicando con $Q^*$ l'applicazione trasposta (o aggiunta, nel senso degli spazi di Hilbert) di $Q$ si ha allora:

(4.13) $\quad$ *$Q^*$ è lineare continua da $H^{-m}(\mathfrak{R}_+^n)$ in $H^{-m}(\mathfrak{R}^n)$*

Siano ora $\varphi \in H^m(\mathfrak{R}_+^n)$, $\psi \in \mathfrak{D}(\mathfrak{R}^n)$. Si avrà:

$$\langle Q^*\varphi, \psi\rangle_{H^{-m}(\mathfrak{R}^n), H^m(\mathfrak{R}^n)} = \langle \varphi, Q\psi\rangle_{H^{-m}(\mathfrak{R}_+^n), H_0^m(\mathfrak{R}_+^n)} = (\varphi, Q\psi)_{L^2(\mathfrak{R}_+^n)} =$$

$$= \int_{\mathfrak{R}^{n-1}} dx' \left[ \int_0^\infty \varphi(x', y)\overline{\psi(x', y)} - \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^{m+1} a_i \varphi(x', y)\overline{\psi(x', -iy)}dy \right] =$$

$$= \int_{\mathfrak{R}^{n-1}} dx \left[ \int_0^\infty \varphi(x', y)\overline{\psi(x', y)}dy - \int_0^{-\infty} (-i)^{m+1} a_i \varphi\left(x', \frac{\eta}{-i}\right) \overline{\psi(x', \eta)} \frac{d\eta}{-i} \right] =$$

$$= \int_{\mathfrak{R}^{n-1}} dx \left[ \int_0^\infty \varphi(x', y)\overline{\psi(x', y)}dy + \int_{-\infty}^{0} \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^m a_i \varphi\left(x', \frac{y}{-i}\right) \overline{\psi(x', y)}dy \right]$$

da cui, posto $(S\varphi)(x', y) = \begin{cases} \varphi(x', y) & y \geqslant 0 \\ \sum_{i=1}^{2m+2} (-i)^m a_i \varphi\left(x', -\frac{y}{i}\right) & y < 0 \end{cases}$ si ha:

$$\langle Q^*\varphi, \psi\rangle_{H^{-m}(\mathfrak{R}^n), H^m(\mathfrak{R}^n)} = (S\varphi, \psi)_{L^2(\mathfrak{R}^n)} = \langle S\varphi, \psi\rangle_{H^{-m}(\mathfrak{R}^n) H^m(\mathfrak{R}^n)}$$

che, valendo per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathfrak{R}^n)$, dà $Q^*\varphi = S\varphi \;\forall\, \varphi \in H^m(\mathfrak{R}_+^n)$.

Sfruttando ora le (4.12) per $l = 0, 1, \ldots, m$, (analogamente a quanto fatto per l'applicazione $\varphi$) si ha che, per $\varphi \in \mathfrak{D}(\overline{\mathfrak{R}_+^n})$, $S\varphi$ è continua con le sue derivate fino all'ordine $m$; ed esiste una costante $C$ (che dimpende solo da $m$) tale che $| S\varphi |_{H^m(\mathfrak{R}^n)} \leqslant \leqslant C | \varphi |_{H^m(\mathfrak{R}_+^n)}$; ne segue:

(4.14) $\quad$ *$Q^*_{|H^m(\mathfrak{R}_+^n)}$ è lineare continua da $H^m(\mathfrak{R}_+^n)$ in $H^m(\mathfrak{R}^n)$*

Si osservi ancora che, indicando con $P$ il prolungamento a zero fuori di $\mathcal{R}^n_+$ si ha, per $\varphi \in \mathfrak{D}(\mathcal{R}^n_+)$, $(R \circ Q^*)\varphi = (Q \circ R^*)^*\varphi = (Q \circ P)\varphi = \varphi$ essendo ovviamente $Q \circ P$ l'operatore identico. Ne segue ($\mathfrak{D}(\mathcal{R}^n_+)$ essendo denso in $H^{-m}(\mathcal{R}^n_+)$) $R \circ Q =$ Identità di $H^{-m}(\mathcal{R}^n_+)$.

Ne segue, per note proprietà di interpolazione e per le (4.13),

$$
(4.14)\qquad \begin{aligned}
&[H^m(\mathcal{R}^n_+), H^{-m}(\mathcal{R}^n_+)]_{\frac{1}{2}} = R \circ Q^*[H^m(\mathcal{R}^n_+), H^{-m}(\mathcal{R}^n_+)] \subseteq \\
&\subseteq R([H^m(\mathcal{R}^n), H^{-m}(\mathcal{R}^n)]_{\frac{1}{2}}) = \\
&(\text{cfr. } [12]) = R(L^2(\mathcal{R}^n)) = L^2(\mathcal{R}^n_+)\ ;
\end{aligned}
$$

si ha cioè la (4.11) ed il teorema è completamente dimostrato.
c.v.d.

OSSERVAZIONE 4.3. - L'ipotesi (1.1) può essere sostituita, per passare dalla (4.10) alla (4.11), dall'ipotesi che $\Omega$ sia di classe $C^m$; le funzioni di $\mathfrak{D}(\mathcal{R}^n)$ e $\mathfrak{D}(\overline{\mathcal{R}^n_+})$ andrebbero sostituite dalle funzioni di $C^m(\mathcal{R}^n)$ e $C^m(\overline{\mathcal{R}^n_+})$ ed il teorema è ancora valido con la stessa dimostrazione. Nella costruzione dell'operatore $Q$ ci sono due condizioni di compatibilità superflue (cioè basta scegliere gli $\{a_i\}$ in modo che la (4.12) valga per $l = 1, 2, ..., 2m$) che sono state introdotte per comodità di calcolo.

## 5. Impostazione astratta dei problemi misti.

**5.1.** - Per l'ipotesi (1.11) si può approssimare all'esterno $\overline{\Sigma_1}$ (notazioni del n. 1.4) con una successione di insiemi $\{\Sigma_{1,m}\}_{m=1,2,...}$ del tipo $\Sigma_{1,m} = \bigcup_{i=1}^{k_m} \Gamma_{i,m} \times I_{i,m}$ con $\Gamma_{i,m}$ aperto connesso di $\Gamma$, $I_{i,m}$ intervallo (o semiretta, o retta) aperto di $\mathcal{R}^1$, in modo che la successione $\{\Sigma_1, m\}$ sia decrescente. Indicando con $\Gamma(m, \tau)$ l'intersezione tra $\Sigma_{1,m}$ e l'iperpiano di equazione $t = \tau$ si avrà (cfr. 1.12)):

$$
(5.1)\qquad \left\{ \begin{array}{l}
\{\Gamma(m,t)\}_{m=1,2,...} \textit{ è una successione non crescente di} \\
\textit{aperti misurabili secondo Peano-Hordan};\ \lim\limits_{m\to\infty} \Gamma(m,t) = \\
= \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \Gamma(m,t) = \Gamma_1(t) \textit{ per quasi ogni } t.
\end{array} \right.
$$

Si indichi poi con $V_m(t)$ (risp. $V(t)$) il sottospazio chiuso di $H^1(\Omega)$ definito da $V_m(t) = \{v \in H^1(\Omega);\, \gamma_0 v_{|\Gamma(m,t)} = 0\}$ (risp. $V(t) = \{v \in H^1(\Omega);\, \gamma_0 v_{|\Gamma_1(t)} = 0\}$) dove con $\gamma_0 v$ indico la « traccia » su $\Gamma$ dell'elemento $v \in H^1(\Omega)$; cfr. [9].

Si indichi poi con $W_m(t)$ (risp. $W(t)$) il sottospazio di $H^1(\Omega)$ ortogonale in $H^1(\Omega)$ a $V_m(t)$ (risp. a $V(t)$); e si indichi con $P_{m,t}$ (risp. $Pt$, risp. $p_{m,t}$, risp. $p_t$) la proiezione di $H^1(\Omega)$ sul suo sottospazio chiuso $V_m(t)$ (risp. $V(t)$, risp. $W_m(t)$, risp. $W(t)$).

Si indichi poi con $H^1_{I-\Delta}$ lo spazio $\{v \in H^1(\Omega);\, (I-\Delta)v \in L^2(\Omega)\}$ dove con $\Delta$ indico il laplaciano: $\Delta = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$. La norma $|v|_{H^1_{I-\Delta}} = (|v|^2_{H^1(\Omega)} + |(I-\Delta)v|^2_{L^2(\Omega)})^{\frac{1}{2}}$ induce su $H^1_{I-\Delta}$ una struttura di spazio di Hilbert.

Ricordo che (cfr. [9]) per $v \in H^1_{I-\Delta}$ ha senso $\gamma_1 v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ [6]; ed è:

$$(5.2) \quad (v, u)_{H^1(\Omega)} = ((I-\Delta)v, u))_{L^2(\Omega)} + \langle \gamma_1 v, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \qquad v \in H^1_{I-\Delta}\ u \in H^1(\Omega)$$

LEMMA 5.1. - *Per quasi ogni $t$, $\forall v \in H^1(\Omega)$ si ha:*

$$(5.3) \qquad (I-\Delta)p_{m,t}v = 0$$

$$(5.4) \qquad \gamma_0 p_{m,t} v_{|\Gamma(m,t)} = \gamma_0 v_{|\Gamma(m,t)}$$

(*cioè supporto* $\gamma_0(v - p_{m,t}v) \subseteq \Gamma - \Gamma(m,t)$)

$$(5.5) \qquad \gamma_1 p_{m,t} v_{|\Gamma - \overline{\Gamma(m,t)}} = 0$$

(*cioè supporto di* $\gamma_1 p_{m,t} v \subseteq \overline{\Gamma(m,t)}$) [7].

*Dimostrazione.* Poichè $\mathfrak{D}(\Omega) \subset V_m(t)$ e $p_{m,t}v$ è ortogonale a

---

[6]) Con $\gamma_1\varphi$ indico la « traccia » su $\Gamma$ della derivata normala di $\varphi$, $\frac{\partial \Phi}{\partial \nu}$.

[7]) $\gamma_1 \varphi_{m,t} v$ ha senso per la (5.3); per la definizione di supporto di una distribuzione cfr. [18].

$V_m(t)$ si avrà, per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$:

$$0 = (p_{m,t}v, \varphi)_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, \varphi)_{L^2(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_{m,t}v'}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \langle p_{m,t}v, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)} + \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial p_{m,t}v}{\partial x_j}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)} =$$

$$= \langle p_{m,t}v, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)} - \sum_{j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 p_{m,t}v}{\partial x_j}, \varphi\right\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)} =$$

$$= \langle (I - \Delta)p_{m,t}v, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Omega),\mathfrak{D}(\Omega)}$$

relazione che, valendo per ogni $\varphi \in \mathfrak{D}(\Omega)$, dà la (5.3).

La (5.4) è ovvia essendo, per definizione di $V_m(t)$, il supporto di $\gamma_0 P_{m,t}v (= \gamma_0(v - p_{m,t}v))$ contenuto in $\Gamma - \Gamma(m, t)$.

Sia ora $\psi \in \mathfrak{D}(\Gamma)$ con supporto in $\Gamma - \Gamma(m, t)$. È $\psi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ quindi (cfr. [97]) esiste $\varphi \in H^1(\Omega)$ con $\gamma_0\varphi = \psi$; ed è ovviamente $\varphi \in V_m(t)$.

La (5.2) scritta con $p_{m,t}v$ al posto di $v$ e $\varphi$ al posto di $u$ (si osservi che per la (5.3) $p_{m,t}v \in H^1_{I-\Delta}$) dà essendo $p_{m,t}v$ e $\varphi$ ortogonali:

$$0 = (p_{m,t}v, \varphi)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \gamma_0\varphi\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} =$$

$$= \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \psi\rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma),H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

relazione che, valendo per ogni $\psi$ del tipo detto, dà la (5.5). c.v.d.

OSSERVAZIONE 5.1. - Si osservi che, fissato $v \in H^1(\Omega)$, esiste uno ed un solo elemento di $H^1(\Omega)$ che verifichi le (5.3), (5.4), (5.5) (cfr. [3,22]); quindi il risultato del lemma 5.1 si inverte nel senso che si ha:

(5.6) $\left\{\right.$ *Se un elemento di* $H^1(\Omega)$ *verifica le* (5.3), (5.4), (5.5) *tale elemento è* $p_{m,t}v$.

OSSERVAZIONE 5.2. - Analogamente si dimostra che $p_t v$ è la soluzione di:

(5.7) $(I - \Delta)p_t v = 0$; supporto $\psi_i p_t v \subseteq \overline{\Gamma_1(t)}$; supporto $\gamma_0(v - p_t v) \subseteq \Gamma - \Gamma_1(t)$ .

OSSERVAZIONE 5.3. - Si osservi che la (5.2) prendendo $v \to p_{m,t}v$, $u \to v$ dà:

$$|p_{m,t}v|^2_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, p_{m,t}v)_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, p_{m,t}v)_{H^1(\Omega)} +$$
$$+ (p_{m,t}v, P_{m,t}v)_{H^1(\Omega)} = (p_{m,t}v, v)_{H^1(\Omega)} = ((I-\Delta)p_{m,t}v, v)_{L^2(\Omega)} +$$
$$+ \langle \gamma_1 p_{m,t}, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma),H^{\frac12}(\Gamma)} = \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma),H^{\frac12}(\Gamma)};$$

inoltre essendo $p_{m,t}$ una proiezione è $|p_{m,t}v|_{H^1(\Omega)} \leqslant |v|_{H^1(\Omega)}$; in sintesi:

$$\text{(5.8)} \quad \begin{cases} |p_{m,t}v|^2_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_1 p_{m,t}v, \gamma_0 v\rangle_{H^{-\frac12}(\Gamma),H^{\frac12}(\Gamma)}; \\ |p_{m,t}v|_{H^1_{I-\Delta}} = |p_{m,t}v|_{H^1(\Omega)} \leqslant |v|_{H^1(\Omega)}. \end{cases}$$

LEMMA 5.2. - *Sia* $\{C_m\}_{m=1,2,\ldots}$ *una famiglia monotona di insiemi chiusi di* $\Gamma$ *e sia* $C = \lim_{m\to\infty} C_m$. *Sia* $T_m \in \mathfrak{D}'(\Gamma)$ *con supporto in* $C_m$ *e sia* $T \in \mathfrak{D}'(\Gamma)$ *tale che, per ogni* $\varphi \in \mathfrak{D}(\Gamma)$ *si ha*:

$$\langle T, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Gamma),\mathfrak{D}(\Gamma)} = \lim_{m\to\infty} \langle T^m, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Gamma),\mathfrak{D}(\Gamma)}.$$

*Si ha: supporto* $T \subseteq \overline{C}$.

*Dimostrazione*. Sia $A$ un generico aperto di $\Gamma$ con $A \cap C = \varphi$; sia $B$ un generico chiuso contenuto in $A$; sia $\varphi$ un generico elemento di $\mathfrak{D}(\Gamma)$ con supporto in $B$; debbo dimostrare che è $0 = \langle T, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Gamma),\mathfrak{D}(\Gamma)} = \lim_{m\to\infty} \langle T_m, \varphi\rangle_{\mathfrak{D}'(\Gamma),\mathfrak{D}(\Gamma)}$ basterà perciò dimostrare che esiste un $\overline{m}$ tale che, per $m > \overline{m}$ è $B \cap C_m = \varnothing$. E in effetti se $\{C_m\}$ è crescente è $B \cap C_m \subseteq A \cap C = \varnothing$; mentre se $\{C_m\}$ è decrescente la successione $\{C_m \cap B\}_{m=1,2,\ldots}$ è una successione decrescente di chiusi che ha limite vuoto (perchè $\lim_{m\to\infty} B \cap C_m = B \cap \lim_{m\to\infty} C_m \subseteq A \cap C = \varnothing$); quindi $B \cap C_m = \varnothing$ per $m$ sufficientemente grande. c.v.d.

TEOREMA 5.1. - *Per ogni* $v \in H^1(\Omega)$ *per quasi ogni* $t$ *si ha*:

$$\lim_{m\to\infty} |P_{m,t}v - P_t v|_{H^1(\Omega)} = 0$$

*Dimostrazione.* Essendo $P_{m,t} = P_{m,t}$ o $P_t$ si ha $P_t v - P_{mt} v = = P_t v - P_{m,t} P_t v = p_{m,t} P_t v$ ; per dimostrare il teorema basterà dimostrare che, posto: $\alpha = \lim_{m\to\infty}'' | p_{m,t} P_t v |^2_{H^1(\Omega)}$, è $\alpha = 0$.

Si osservi che essendo per la seconda delle (5.8) $\alpha < \infty$ ed essendo per la (5.3) $| p_{m,t} P_t v |_{H^1(\Omega)} = | p_{m,t} P_t v |_{H^1_{I-\Delta}}$ si può estrarre da $\{p_{m,t} P_t v\}_{m=1,2,\dots}$ una sottosuccessione $\{p_{mk,t} P_t v\}_{k=1,2,\dots}$ tale che $\lim_{k\to\infty} | p_{m_k,t} P_t v |^2_{H^1(\Omega)} = \alpha$; e $\{p_{m_k,t} P_t v\}_{k=1,2,\dots}$ può essere scelta in modo che esista $\varphi_t \in H^1_{I-\Delta}$ tale che $p_{m_k,t} P_t v \rightharpoonup \varphi_t$ in $H^1_{I-\Delta}$ ; in particolare per la (5.3) sarà $(I - \Delta)\varphi_t = 0$; essendo $\gamma_1 : H^1_{I-\Delta} \to H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ lineare continua sarà $\gamma_1 P_{m_k,t} P_t v \rightharpoonup \gamma_1 \varphi_t$; analogamente $\gamma_0 P_{m_k,t} p_t v \rightharpoonup \gamma_0 \varphi_t$. Per il lemma 5.2 e per la (5.4), (5.5) si avrà allora, supporto $\gamma_1 \varphi_t \subseteq \lim_{m\to\infty} \Gamma(m, t) = \overline{\Gamma_1(t)}$ (cfr. (5.1)) per quasi ogni $t$; e analogamente si avrà supporto $\gamma_0(\varphi - P_t v) \subseteq \overline{\Gamma_2(t)}$ (cfr. (1.12)) per quasi ogni $t$.

Allora la (5.7) dà $\varphi_t = P_t v - P_t P_t v = 0$ per quasi ogni $t$.

Ne segue $\gamma_1 \varphi_t = 0$ e quindi, per la (5.8): $\lim_{m\to\infty}'' | p_{m,t} P_t v |^2_{H^1(\Omega)} = = \alpha = \lim_{k\to\infty} | p_{m_k,t} P_t v |^2_{H^1(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \langle \gamma_1 p_{m_k,t} P_t v, \gamma_0 P_t v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = = \langle \gamma_1 \varphi_t, \gamma_0 P_t v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = 0$ per quasi ogni $t$. c.v.d.

TEOREMA 5.2. - *Per ogni $v \in H^1(\Omega)$ la funzione di $t$ a valori in $H^1$ $t \to P_t v$ è misurabile.*

*Dimostrazione.* Basta osservare che $P_t v$ è, per il teorema 5.1, limite quasi ovunque di $P_{m,t} v$; e le funzioni $t \to P_{m,t} v$ sono ovviamente costanti a tratti misurabili.

**5.2.** - Si prenda, con le notazioni del n. 1 [1], $H = L^2(\Omega)$; $K = H^1(\Omega)$; $V(t)$ come è stato definito al n. 5.1.; $a(t, u, v)$ la forma definita dalla (1.6); con le notazioni del n. 3 [1] si prenda poi $V = H^1_0(\Omega)$; con procedimento usuali si identifichi $L^2(\Omega)$ al suo antiduale e si immerga $L^2(\Omega)$ in una varietà densa di $H^{-1}(\Omega)$ $(= (H^1_0(\Omega))')$ed $H^{-1}(\Omega)$ in un sottospazio di $H^{-1}_{\overline{\Omega}}(\mathfrak{R}^n)$ $(=(H^1(\Omega)')$; cfr. [15]). Si osservi che per $v \in H^1_0(\Omega)$ $a(t, u, v)$ definisce una forma lineare continua su $H^1(\Omega)$ (per la (1.3)). Si indichi per un momento con $\mathcal{A}(t)u$ $(u \in H^1(\Omega))$ l'elemento di $H^{-1}(\Omega)$

definito da $\langle \mathcal{A}(t)u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = a(t, u, v)$ $v \in H_0^1(\Omega)$. Si ha:

$$\langle \mathcal{A}(t)u, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = a(t, u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial(a_{ij}v)}{\partial x_i}\right)_{L^2(\Omega)} +$$

$$+ \left(\sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, v\right)_{L^2(\Omega)} + (c(x, t)u, v)_{L^2(\Omega)} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_j}, \frac{\partial(a_{ij}v)}{\partial x_i} \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} +$$

$$+ \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c, u, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = -$$

$$= - \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} +$$

$$+ \left\langle \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c, u, v \right\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)} = \langle Au, v\rangle_{H^{-1}(\Omega),H_0^1(\Omega)}$$

e tale relazione, valendo per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$, dà $\mathcal{A}u = Au$ cioè l'operatore indicato con $A$ nella (1.2) coincide con l'operatore introdotto nel n. 3 [1] e ivi indicato allo stesso modo.

Si osservi che grazie alle (1.1) (1.3) e (4.8), al teorema 5.2 ed a ben note proprietà degli spazi $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$, $H^{-1}(\Omega)$ (cfr. ad es. [10]) tutte le ipotesi necessarie ad assicurare la validità dei risultati nei nn. 2 e 3 di [1] sono verificati; enuncio ora i risultati ivi ottenuti con le notazioni qui introdotte.

**5.3.** - Si ponga ora (se $I \neq \mathcal{R}^1$) $Q^* = \Omega \times ]-\infty, +\infty[$; $\Sigma^* = \Gamma \times ]-\infty, +\infty[$; $\Sigma_2^* = \Sigma_2$; $\Sigma_1^* = (\Sigma^* - \Sigma_2^*)$; $\Gamma_i^*(\tau)$ sia l'intersezione tra $\Sigma_i^*$ e l'iperpiano $t=\tau$; $V^*(t) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v_{|\Gamma_1^*(t)} = 0\}$. Ovviamente la famiglia così definita coincide con quella indicata allo stesso modo nel n. 5 [1].

Si osservi che lo spazio indicato con $L^2(T_0, T; V(t))$ in [1] coincide, con le notazioni qui introdotte, con $\{u \in H^{1,0}(Q); S_2 u_{|\Sigma_1} = 0\}$ [8]); e lo spazio $\Phi(T_0, T_1; V(t))$ coincide con $\{\varphi \in H^{1,1}(Q); S_2 u_{|\Sigma_1} = 0;$

---

[8]) Con definizioni analoghe a quelle date nel n. 2 per il cilindro infinito.

$\varphi(x, T_1) = 0\}$ [9]); infine lo spazio $H^{\frac{1}{2}}(T_0, T_1; H)$ coincide con $H^{0,\frac{1}{2}}(Q)$. Analoghe considerazioni per gli spazi definiti su $Q^*$.

L'ipotesi (5.4) [1] (ovvero la (5.7) [1]) con tali notazioni si enuncia:

$$\{\varphi \in H^{1,1}(Q);\ S_2\varphi_{|\Sigma_1^*} = 0\} \text{ è denso in } \{u \in H^{1,\frac{1}{2}}(Q^*);\ S_2 u_{|\Sigma_1^*} = 0\}. \tag{5.9}$$

TEOREMA 5.3. - *Sotto le ipotesi* (1.1), (1.3), (1.8), (1.11), (5.9) *fissati ad arbitrio* $f \in L^2(T_0, T_1; H^{-1}(\Omega))$ *ed* $u_0 \in L^2(\Omega)$ (*se* $T_0 = -\infty$ *si deve prendere* $u_0 = 0$) *esiste una ed una sola*

$$u \in L^2(T_0, T_1; V(t)) \cap H^{\frac{1}{2}}(T_0, T_1; L^2(\Omega)) \cap C([T_0, T_1]; L^2(\Omega))$$

*tale che*:

$$\Lambda u = f \text{ in } Q; \quad u(x, T_0) = u_0(x) \text{ in } \Omega \tag{5.10}$$

$$\int_{T_0}^{T_1} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(\Omega)}]dt = (u_0, \varphi(T_0))_H + \int_{T_0}^{T_1} \langle f(t), \varphi(t)\rangle_{V'(t),V(t)} dt \quad \forall\ \varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t)). \tag{5.11}$$

*Inoltre tale* $u$ *verifica*:

$$|u|_{L^2(T_0,T_1;V(t))} \leqslant C(|f|_{L^2(T_0,T_1;H^{-1}(\Omega))} + |u_0|_{L^2(\Omega)}) \tag{5.12}$$

*Dimostrazione*. Si è già visto che le (1.1), (1.3), (1.11) assicurano l'applicabilità dei risultati dei nn. 2 e 3 [1]; la (1.8) implica la (1.9) e questa con la (5.9) implica la validità del teorema 6.1 [1] che, espresso con le notazioni qui impiegate, dà l'esistenza e l'unicità della soluzione della (5.11) nello spazio $L^2(T_0, T_1; V(t))$,

---

[9]) Per il senso di $\varphi(x, T_1)$ si ricordi che $H^{1,1}(Q) \subset C([T_0, T_1]); L^2(\Omega))$; cfr. anche [17]. Per una trattazione più generale del problema delle tracce sul cilindro finito cfr. [23].

e la maggiorazione (5.12); la (5.10) è conseguenza di teoremi di regolarità dati nel n. 3 [1] i quali inoltre assicurano l'appartenenza della soluzione $u$ allo spazio $H^{1,\frac{1}{2}}(Q) \cap C([T_0, T_1]; L^2(\Omega))$.

c.v.d.

Osservazione 5.4. - il teorema 5.3 risolve (in parte sostanzialmente, in parte solo formalmente) il problema (1.10). In effetti mentre le condizioni $\Lambda u = f$, $u(x, T_0) = u_0(x)$, $S_2 u_{|\Sigma_1} = 0$ hanno un senso e sono state verificate (le prime due per la (5.10), la terza per l'appartenenza di $u$ a $L^2(T_0, T_1; V(t))$ la condizione $S_1 u_{|\Sigma_2} = 0$ non ha per ora un senso preciso; tuttavia, scrivendo *formalmente* per tale $u$ e per $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$ la (3.5) e tenendo conto delle (5.10), (5.11) si arriva a concludere l'annullarsi di $\langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle$; il che *formalmente* implica $S_1 u_{|\Sigma_2} = 0$ [10]).

**5.4.** - Se in particolare nel teorema 5.2 si assume $f \in L^2(T_0, T_1; L^2(\Omega))$ le considerazioni svolte nell'osservazione 5.4 cessano di avere valore formale ed assumono un significato preciso. Mi limito ad esporre ciò nel caso in cui $T_0 = -\infty$, $T_1 = +\infty$; ciò non è restrittivo in quanto (cfr. nn. 2 e 5 di [1]) la soluzione del problema relativo al cilindro finito $Q$ è restrizione a $Q$ della soluzione di un analogo problema relativo al cilindro infinito $Q^*$. D'ora in poi supporrò sempre il cilindro infinito ed abolirò gli asterischi non essendoci più possibilità di confusione.

Teorema 5.4. - *Sotto le ipotesi* (1.1); (1.3), (1.8), (1.11), (5.9), *fissato ad arbitrio* $f \in L^2(Q)$ *esiste una ed una sola* $u \in H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ *tale che*:

$$\Lambda u = f \text{ in } Q; \quad S_2 u_{|\Sigma_1} = 0 \tag{5.13}$$

$$\langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{3}{2}, -\frac{3}{4}}(\Sigma), H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma)} = 0 \ \forall \varphi \in H^{2,1}(Q); \ S_2 \varphi_{|\Sigma_1} = 0 . \tag{5.14}$$

*Inoltre $u$ dipende con continuità da $f$ nel senso che*:

$$| u |_{L^2(Q)} \leqslant C \, | f |_{L^2(Q)} \quad (C \textit{ indipendente da } f) \tag{5.15}$$

---

10) Se si supponesse $f \in L^2(T_0, T_1; V'(t))$ invece che $f \in L^2(T_0, T_1; H^{-1}(\Omega))$ si avrebbe, sempre formalmente, $S_1[u - f - P_{H^{-1}(\Omega)} f)]_{|\Sigma_1} = 0$; non svolgerò però considerazioni di questo tipo.

*Dimostrazione.* Sia $u$ la soluzione della (5.11); si ha $\Lambda u = f \in L^2(Q)$ quindi è $u \in H^{1,\frac12}_\Lambda(Q) \subset H^{0,0}_\Lambda(Q)$; la (3.5) dà allora per $\varphi \in H^{2,1}(Q)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(Q)}]dt = \int_{-\infty}^{+\infty} (f, \varphi)_{L^2(Q)} dt -$$

$$- \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac12,-\frac14}(\Sigma), H^{\frac12,\frac14}} .$$

Se inoltre è $S_2 \varphi_{|\Sigma_1} = 0$ è $\varphi \in \Phi(T_0, T_1; V(t))$ e l'ultima relazione scritta, unita alle (5.10), dà la (5.14). Le (5.13), (5.15) sono ovvie (cfr. anche (5.12)). c.v.d.

Osservazione 5.5. - Il teorema 5.4 è ancora insufficiente perchè sfrutta un teorema di tracce nello spazio $H^{0,0}_\Lambda(Q)$ anzichè nello spazio $H^{1,\frac12}_\Lambda(Q)$. Se si avesse un teorema di tracce nello spazio $H^{1,\frac12}_\Lambda(Q)$ si potrebbe dare su $S_1$ una condizione più significativa della (5.13).

Per avere un teorema di tracce nello spazio $H^{1,\frac12}_\Lambda(Q)$ premetto uno studio dei problemi misti del tipo Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann nel cilindro infinito che, oltre a dare la caratterizzazione cercata delle tracce di $H^{1,\frac12}_\Lambda(Q)$, mi sembra interessante di per sè.

## 6. I problemi di Cauchy Dirichlet e Cauchy Neumann in $H^{2,1}(Q)$.

**6.1.** - *Supporrò in tutto questo numero verificate le* (1.1), (1.3), (1.8); *e supporrò* $Q = \Omega \times ]-\infty, +\infty[$; non richiamerò più tali ipotesi.

Sia $\Sigma_1 = \Sigma$ cioè $\Gamma_1(t) = \Gamma$ per ogni $t$. Le (1.11), (5.9) sono allora automaticamente verificate (cfr. anche [17]). Il teorema 5.4 dà:

Teorema 6.1. - *Per ogni* $f \in L^2(\Omega)$ *esiste una ed una sola* $u \in H^{1,\frac12}(Q)$ *tale che*:

(6.1) $$\Lambda u = f \text{ in } Q ; \quad S_1 u = 0 \text{ in } \Sigma$$

*Inoltre esiste una costante $C$ (indipendente da $f$) tale che:*

$$(6.2) \qquad |u|_{L^2(Q)} \leqslant C\,|f|_{L^2(Q)}.$$

**6.2.** - Sia ora $\Sigma_1 = \varnothing$ cioè $\Gamma_2(t) = \Gamma$ per ogni $t$. Le (1.11), (5.9), sono automaticamente verificate (cfr. sempre [17]); e il teorema 5.4 dà:

TEOREMA 6.2. - *Per ogni $f \in L^2(Q)$ esiste una ed una sola $u \in H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ tale che:*

$$(6.3) \qquad \Lambda u = f \ \textit{in } Q; \qquad S_1 u = 0 \ \textit{in } \Sigma.$$

*Inoltre esiste una costante $C$ (indipendente da $f$) tale che:*

$$(6.4) \qquad |u|_{L^2(Q)} \leqslant C\,|f|_{L^2(Q)}.$$

*Dimostrazione.* Basta ovviamente dimostrare che la (5.14) implica $S_1 u = 0$; e infatti per il teorema 3.1 fissata ad arbitrio $\psi \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma)$ esiste $\varphi \in H^{2,1}(Q)$ con $T_1\varphi = \psi$; la (5.14) dà allora $\langle S_1 u, \psi\rangle_{H^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}}(\Sigma), H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}} = 0$ che, valendo per ogni $\psi \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma)$, dà $S_1 u = 0$.

**6.3.** - Voglio ora dimostrare che le soluzioni dei problemi di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann trovate nei teoremi 6.1 e 6.2 sono in $H^{2,1}(Q)$. Per ottenere ciò comincio a ricordare che il risultato è vero se il cilindro $Q$ è finito [11]; precisamente si ha che; essendo i coefficienti di $A$ limitati indipendentemente da $t$ (cfr. 1.3)), si ha (cfr. [4.7,21]).

TEOREMA 6.3. - *Sia $u$ $H^{0,0}_{\Lambda}(\Omega\times]T_0, T_1[)$ con $T_0$ e $T_1$ finiti; sia inoltre $u(T_0) = 0$* [12] *e $S_2 u = 0$ (risp. $S_1 u = 0$).*

---

[11]) Con definizioni analoghe a quelle date nel n. 2 per gli spazi $H^{\alpha,\beta}(Q)$, $H^{\alpha,\beta}(\Sigma)$; cfr. [17]; [23].

[12]) Anche in $H^{0,0}_{\Lambda}(\Omega\times]T_0, T_1[)$ valgono teoremi di tracce analoghi (anche se più complicati) a quelli dati nel n. 3 per $H^{0,0}_{\Lambda}(\Omega\times]-\infty, +\infty[)$; cfr. ad es. [2].

*Si ha* $u \in H^{2,1}(\Omega \times ]T_0, T_1[)$ *ed è*:

$$|u|_{H^{2,1}(\Omega\times]T_0,T_1[)} \leqslant C\,|f|_{L^2(\Omega\times]T_0,T_1[)} \tag{6.5}$$

(*C dipende solo da* $T_1 - T_0$)

**6.4.** - Si indichi con $I_m$ ($m$ intero relativo) l'intervallo aperto $]m-1, m+1[$ e con $Q_m$, $\Sigma_m$ rispettivamente $\Omega \times I_m$ e $\Sigma \times I_m$.

Sia $\chi_m(t)$ una funzione definita per $t \in \mathfrak{R}^1$ tale che: $\chi_m(t)$ ha supporto compatto in $I_m$; $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_m(t) = 1 \;\forall t$; $\chi_m(t)$ è continua con la derivata prima; $|\chi_m(t)| + |\chi_m'(t)| \leqslant C$ con $C$ indipendente da $t$ e da $m$ (al solito con la stessa lettera $C$ indica costanti anche diverse tra loro ma indipendenti da $t$ e da $m$).

Sia $u \in H^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ soluzione della (6.1) (risp. (6.3). Pongo:

$$u_m(x,t) = u(x,t)\cdot\chi_m(t)\,;$$

$$f_m(x,t) = f(x,t)\cdot\chi_m(t) + u(x,t)\cdot\chi_m'(t)\,.$$

Essendo $\chi_m$ e $\chi_m'$ equilimitati essi sono dei moltiplicatori in $L^2(Q)$ di norma maggiorabile indipendentemente da $m$; e si avrà:

$$|f_{m|Q_m}|_{L^2(Q_m)} \leqslant C\,|f_{|Q_m}|_{L^2(Q_m)} + C\,|u_{|Q_m}|_{L^2(Q_m)};$$

tali relazioni, unite alla (6.2) (risp. alla 6.4)) danno:

$$|f_{m|Q_m}|_{L^2(Q_m)} \leqslant C\,|f_{|Q_m}|_{L^2(Q_m)}\,. \tag{6.6}$$

Si osservi che essendo $\Lambda u_m = \chi_m A u + \chi_m' u + \frac{\partial u}{\partial t}\chi_m = \chi_m \Lambda u + \chi_m' u = \chi_m f + \chi_m' u = f_m \in L^2(Q)$ si ha $u_m \in H_\Lambda^{0,0}(Q)$; $u_{m|Q_m} \in H_\Lambda^{0,0}(Q_m)$; ed è anche $u_m(x, m-1) = 0 \;\forall x \in \Omega$; $S_2 u_m = 0$ (risp. $S_1 u_m = 0$) in $\Sigma_m$.

Per il teorema 6.3. applicato a $u_{m|Q_m}$ e per la (6.6) si ha:

$$u_{m|Q_m} \in H^{2,1}(Q_m); \quad |u_{m|Q_m}|_{H^{2,1}(Q_m)} \leqslant C\,|f_{|Q_m}|_{L^2(Q_m)}\,; \tag{6.7}$$

*dove la costante $C$ è indipendente da $m$ essendo l'altezza del cilindro $Q_m$ costantemente uguale a 2.*

Si osservi ora che essendo $\chi_m$ a supporto compatto in $I_m$ $u_m$ è a supporto compatto in $\Omega \times I_m$; quindi $u_{m|Q_m}$ prolungata a zero fuori di $\Omega \times I_m$ (e tale prolungamento coincide con $u_m$) resta in $H^{2,1}(Q)$; quindi la (6.7) dà:

$$u_m \in H^{2,1}(Q)\ ;\ |\, u_m\, |_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C\ |\, f_{|Q_m}\, |_{L^2(Q_m)}\ . \tag{6.8}$$

Pongo ora $u_N^{(i)} = \sum_{|m|\leqslant N} u_{2m+i}$ $(i = 1,2)$. Si ha, per ogni $N$, $p>0$:

$$|\, u_{N+p}^{(i)} - u_N^{(i)}\, |_{H^{2,1}(Q)} = \Big|\sum_{N<|m|\leqslant N+p} u_{2m+i}\Big|^2_{H^{2,1}(Q)} = \sum_{N<|m|\leqslant N+p} |\, u_{2m+i}\,|^2_{H^{2,1}(Q)}$$

(perchè $u_{2m+i}$ ha supporto disgiunto da $u_{2l+i}$ per $l \neq m$ quindi $u_{2m+i}$ e $u_{2l+i}$ sono ortogonali in $H^{2,1}(Q)$). La (6.8) dà:

$$|\, u_{N+p}^{(i)} - u_N^{(i)}\, |_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C \sum_{N<|m|\leqslant N+p} \int_{Q_{2m+i}} |\, f(x,t)\,|^2 dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C \left( \int_{|t|\geqslant N-1} |\, f\,(x,t)\,|^2_{L^2(\Omega)} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

quindi la successione $\{u_N^{(i)}\}_{N=1,2,\ldots}$ converge in $H^{2,1}(Q)$. Posto $u^{(i)} = \lim_{N+\infty} u_N^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ si ha, per i conti fin qui svolti, $u^{(i)} \in H^{2,1}(Q)$ $|\, u^{(i)}\, |_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C\ |\, f\, |_{L^2(Q)}\ .$

Essendo ovviamente $u = u^{(1)} + u^{(2)}$ ho ottenuto il teorema:

TEOREMA 6.4. - *Sia $f \in L^2(Q)$. Esiste una ed una sola $u \in H^{2,1}(Q)$ tale che: $\Lambda u = f$ in $Q$; $S_2 u = 0$ in $\Sigma$; (risp. $S_1 u = 0$ in $\Sigma$); inoltre esiste una costante $C$ tale che:*

$$|\, u\, |_{H^{2,1}(Q)} \leqslant C\ |\, f\, |_{L^2(Q)} \quad (C \text{ indipendente da } f) \tag{6.9}$$

**6.5.** - Il teorema 6.4 risolve sul cilindro infinito $\Omega \times ]-\infty, +\infty[$ i problemi ai limiti omogenei (cioè con condizioni al contorno nulle) del tipo Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann. Grazie al teorema 3.1 si passa poi, con ragionamenti di carattere usuale, alla risoluzione dei corrispondenti problemi non omogenei.

TEOREMA 6.5. - $\{\Lambda, S_2\}$ *(risp.* $\{\Lambda, S_1\}$*) è un isomorfismo suriettivo di* $H^{2,1}(Q)$ *su* $L^2(Q) \times H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma)$ *(risp.* $\times H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$*).*

*Dimostrazione.* Basta ovviamente dimostrare la suriettività dell'applicazione. Siano $f \in L^2(Q)$, $\psi \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma)$ arbitrari. Per il teorema 3.1 esiste $v \in H^{2,1}(Q)$ con $S_2 v = \psi$; ed è ovviamente $\Lambda v \in L^2(Q)$. Si risolve (teorema 6.4) il problema: trovare $w \in H^{2,1}(Q)$ tale che si abbia $\Lambda w = f - \Lambda v$; $S_2 w = 0$. Posto $u = v + w$ è ovviamente $u \in H^{2,1}(Q)$; $\Lambda u = f$; $S_2 u = \psi$; inoltre $u$ dipende con continuità da $f$ e da $\psi$. Analogamente si procede per l'applicazione $\{\Lambda, S_1\}$. c.v.d.

## 7. I problemi di Cauchy Dirichlet e Cauchy Neumann in $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$.

**7.1.** - Tutti i risultati del n. 6 continuano a valere se si sostituiscono gli operatori $\Lambda$, $S_1$, $S_2$ rispettivamente con $\Lambda^*$, $T_2$, $T_1$; in particolare il teorema 6.5 dà, posto $X = \{v \in H^{2,1}(Q);\ T_1 v = 0\}$; $Y = \{v \in H^{2,1}(Q);\ T_2 v = 0\}$:

(7.1) $\Lambda^*$ *è un isomorfismo suriettivo di* $X$ *su* $L^2(Q)$

(7.2) $\Lambda^*$ *è un isomorfismo suriettivo di* $Y$ *su* $L^2(Q)$.

Si trasponga ora la (7.1) (per ragionamenti analoghi cfr. [9, 10, 11]): se $v \to L(v)$ è una forma antilineare continua su $X$ (cioè se $L \in X'$) esiste una ed una sola $u \in L^2(Q) (= L^2(Q)')$ tale che:

$$(7.3) \qquad (u, \Lambda^* v)_{L^2(Q)} = L(v) \quad \forall v \in X\,; \qquad |\, u\,|_{L^2(Q)} \leqslant C\,|\, L\,|_{X'}\,.$$

Si scelga la forma $v \to L(v)$ del seguente tipo: presi ad arbitrio $f \in L^2(Q)$, $\psi \in H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)$ si ponga:

$$(7.4) \qquad L(v) = (f, v)_{L^2(Q)} + \langle \psi, T_2 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)}$$

Si prenda $v \in \mathfrak{D}(Q)$; le (7.3), (7.4) danno:

$$\langle \Lambda u, v\rangle_{\mathfrak{D}'(Q)\mathfrak{D},(Q)} = (u, \Lambda^* v)_{L^2(Q)} = L(v) = (f, v)_{L^2(Q)} = \langle f, v\rangle_{\mathfrak{D}'(Q),\mathfrak{D}(Q)}$$

cioè $\Lambda u = f \in L^2(Q)$ quindi $u \in H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$. Le (7.3), (7.4), (3.4) danno:

$$\langle S_2 u, T_2 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma),H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = \langle \psi, T_2 v\rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma),H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} \ \forall \ v \in X$$

(perchè per $v \in X$ è $T_1 v = 0$). Essendo l'applicazione $v \to T_2 v$ suriettiva di $X$ su $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ (cfr. Teorema 3.1) si conclude $S_2 u = \psi$.

Osservando poi che per la (7.3) si ha

$$| u |_{L^2(Q)} \leqslant C\,(| L |_{X'}) \leqslant C_1\,(| f |_{L^2(Q)} + | \psi |_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)})$$

si conclude:

(7.5) $\{\Lambda, S_2\}$ *è un isomorfismo suriettivo di* $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ *su*

$L^2(Q) \times H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)$.

operando analogamente a partire dalla (7.2) si ottiene:

(7.6) $\{\Lambda, S_1\}$ *è un isomorfismo suriettivo di* $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ *su*

$L^2(Q) \times H^{-\frac{3}{2},-\frac{3}{4}}(\Sigma)$

**7.2.** - Il teorema 6.5 e le (7.5), (7.6) risolvono i problemi non omogenei di Cauchy-Dirichlet e Cauchy-Neumann rispettivamente « in forma forte » (cioè in $H^{2,1}(Q)$) e « in forma debole » (cioè in $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$). Per interpolazione tra i casi estremi si ha, per ogni $\vartheta \in ]0,1[$(cfr. la (4.7));

(7.7) $\{\Lambda, S_2\}$ *è un isomorfismo suriettivo di*

$[H^{2,1}(Q), H^{0,0}_{\Lambda}(Q)]_{\vartheta}$ *su* $L^2(Q) \times H^{\frac{3}{2}-2\vartheta,\frac{3}{4}-\vartheta}(\Sigma)$.

(7.8) $\{\Lambda, S_1\}$ *è un isomorfismo suriettivo di*

$[H^{2,1}(Q), H^{0,0}_{\Lambda}(Q)]_{\vartheta}$ *su* $L^2(Q) \times H^{\frac{1}{2}-2\vartheta,\frac{1}{4}-\vartheta}(\Sigma)$.

Le (7.7), (7.8) risolvono i problemi di Cauchy-Dirichlet e di Cauchy-Neumann in spazi intermedi tra $H^{2,1}(Q)$ed $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$; esse possono essere ulteriormente precisate perchè si può dimostrare che si ha $[H^{2,1}(Q), H^{0,0}_{\Lambda}(Q)]_{\vartheta} = H^{2(1-\vartheta),1-\vartheta}(Q)$; io dimostrerò tale relazione solo per $\vartheta = \frac{1}{2}$.

Precisamente, posto per un momento $\mathcal{K} = [H^{2,1}(Q), H^{0,0}_{\Lambda}(Q)]_{\frac{1}{2}}$ si ha ovviamente $\mathcal{K} \subseteq [H^{2,1}(Q), H^{0,0}(Q)]_{\frac{1}{2}} \subseteq H^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ per la (4.1); ed essendo $\Lambda$ lineare continuo da $H^{2,1}(Q)$ in $L^2(Q)$ e da $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ in $L^2(Q)$ si ha per interpolazione che $\Lambda$ è lineare continuo da $\mathcal{K}$ in $L^2(Q)$; cioè è $\mathcal{K} \subseteq H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$. Viceversa sia $u \in H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$; si ha $\Lambda u \in L^2(Q)$, $S_2 u \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$ (teorema 3.1) quindi per la (7.7) con $\vartheta = \frac{1}{2}$ esiste un $v \in \mathcal{K}$ con $\Lambda v = \Lambda u$; $S_2 v = S_2 u$. Poichè sia $u$ che $v$ sono in $H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$ posto $w = u - v$ si ha $w \in H^{0,0}_{\Lambda}(Q)$; $\Lambda w = 0$; $S_2 w = 0$; quindi per la (7.5) è $w = 0$ cioè $u = v \in \mathcal{K}$. Si è così ottenuto che $\mathcal{K} \subseteq H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ algebricamente e topologicamente e $\mathcal{K} \supseteq H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ algebricamente; per il teorema di Banach sugli isomorfismi si ha $\mathcal{K} \cong H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ cioè:

(7.9) $$[H^{2,1}(Q), H^{0,0}_{\Lambda}(Q)]_{\frac{1}{2}} \cong H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$$

*algebricamente e topologicamente.*

**7.3.** - Sono ora in grado di dare il teorema di tracce e le formule di Green che rendevano incompleto il toerema 5.4 (cfr. Osservazione 5.5).

Precisamente le (7.7), (7.8) per $\vartheta = \frac{1}{2}$ e la (7.9) danno:

(7.10) $S_2$ *è lineare continua suriettiva da* $H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ *su* $H^{+\frac{1}{2},+\frac{1}{4}}(\Sigma)$

(7.11) $S_1$ *è lineare continua suriettiva da* $H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ *su* $H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma)$.

Inoltre la (7.12), tenuto conto della Osservazione 3.2, dà:

(7.12) $T_1$ è lineare continua suriettiva da $H_\Lambda^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ su $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$.

Si osservi ora che la (3.2) può essere scritta:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(\Omega)}]dt = (\Lambda u, \varphi)_{L^2(Q)} -$$

$$- \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} \quad \forall\; u, \varphi \in \mathfrak{D}(\overline{Q})$$

e tale formula si prolunga per le $\varphi \in H^{1,1}(Q)$; grazie alla (7.12) si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} [a(t, u, \varphi) - (u, \varphi')_{L^2(Q)}]dt = (\Lambda u, \varphi)_{L^2(Q)} - \tag{7.13}$$

$$- \langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)}$$

*per ogni* $\varphi \in H^{1,1}(Q)$ *ed ogni* $u \in H_\Lambda^{1,\frac{1}{2}}(Q)$.

Si osservi anche che la (3.2), prendendo $f = g$, dà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t, f, f)dt = (\Lambda f, f)_{L^2(Q)} - \langle S_1 f, T_1 f \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma} \quad \forall\, f \in \mathfrak{D}(\overline{Q}) .$$

Tale formula, grazie alle (7.11), (7.12), si prolunga per $u \in H_\Lambda^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ e dà:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u)dt = (\Lambda u, u)_{L^2(Q)} - \tag{7.14}$$

$$- \langle S_1 u, S_2 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} \;\forall\; u \in H_\Lambda^{1,\frac{1}{2}}(Q) .$$

## 8. Il teorema di unicità per il problema misto.

**8.1..** - Sia per ora la (1.9) verificata con $\lambda = 0$. Allora l'enunciato dei teoremi 5.3 e 5.4 ,salvo al più l'unicità della soluzione e la dipendenza continua dai dati, vale indipendentemente dalla (5.9) (cfr. [7]); sostituirò ora l'ipotesi (5.9) con la seguente: si indichi per brevità con $H^{\alpha\beta}_{\overline{E}}$ ($\alpha, \beta$ reali, E sottoinsieme di $\Sigma$) l'insieme degli elementi di $H^{\alpha,\beta}(\Sigma)$ con supporto contenuto in $\overline{E}$. Supporrò che si abbia:

$$H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\Sigma_2} \text{ è denso in } H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\overline{\Sigma}_2}. \tag{8.1}$$

Teorema 8.1. - *Sotto le ipotesi* (1.1), (1.3), (1.11), (8.1), *se la* (1.9) *è verificata con* $\lambda = 0$, *fissata ad arbitrio* $f \in L^2(Q)$, *esiste* $u \in H^{1,\frac{1}{2}}_{\Lambda}(Q)$ *tale che*:

$$\Lambda u = f \text{ in } Q; \quad S_1 u_{|\Sigma_1} = 0; \quad S_1 u_{|\Sigma_2} = 0 \tag{8.2}$$

*Dimostrazione.* Sia $u$ una soluzione del teorema 5.4. Sfruttando la (7.13) (invece della (3.5) come si era fatto nella dimostrazione del teorema 5.4) si ha:

$$\langle S_1 u, T_1 \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = 0 \ \forall\ \varphi \in \Phi(-\infty, +\infty; V(t)); ;$$

e (per la suriettività dell'applicazione $\varphi \to T_1\varphi$ di $H^{1,1}(Q)$ su $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)$; cfr. Teorema 3.1) si ha:

$$\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = 0 \ \forall\ \psi \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\Sigma_2}.$$

Grazie alla (8.1) si avrà:

$$\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = 0 \ \forall \psi \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\overline{\Sigma}_2},$$

che, per definizione di supporto, (cfr. [18]) dà la terza delle (8.2).

**8.2.** - Si è così ottenuto un teorema di esistenza per le soluzioni del problema (1.10) in cui la condizione $S_1 u_{|\Sigma_2} = 0$ ha un senso preciso e non più formale; farò vedere ora che la (8.1) è sufficiente anche ad assicurare l'unicità della soluzione trovata.

TEOREMA 8.2. - *La soluzione della* (8.2) *è unica.*

*Dimostrazione.* Nella dimostrazione del teorema 8.1 si è ottenuto tra l'altro:

$$\langle S_1 u, \psi \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = 0 \ \forall \ \psi \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\Sigma_2} ;$$

in particolare avendo $T_1 u (= a S_2 u)$ supporto coincidente con quello di $S_2 u$ quindi contenuto in $\Sigma_2$ si avrà:

$$\langle S_1 u, T_1 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = 0.$$

Sia ora $u$ una soluzione della (8.2) relativa ad $f = 0$; basterà dimostrare che è $u = 0$; e infatti si ha $\Lambda u = f = 0$;

$$\langle S_1 u, T_1 u \rangle_{H^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{4}}(\Sigma), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma)} = 0; \text{ e la (7.14) da } \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u) dt = 0.$$

Ma se vale la (1.9) con $\lambda = 0$ si ha:

$$| u |^2_{L^2(-\infty,+\infty; V(\Omega))} = \int_{-\infty}^{+\infty} | u(t) |^2_{H^1(\Omega)} dt \leqslant \frac{1}{\alpha} Re \int_{-\infty}^{+\infty} a(t, u, u) dt = 0 \text{ cioè } u = 0.$$

c.v.d.

Si è così visto come la condizione (8.1), unita alla condizione (1.9) con $\lambda = 0$, è ancora sufficiente ad assicurare un teorema di unicità analogo a quello ottenibile con la (5.9); però la (8.1) dà una interpretazione non formale della condizione $S_1 u_{|\Sigma_2} = 0$.

**8.3.** - Ricordo che, indicando con $H_0^{\alpha,\beta}(Q)$ l'aderenza di $\mathfrak{D}(Q)$ in $H^{\alpha,\beta}(Q)$ si ha (cfr. [16])

$$H^{1,1}(Q) \cong H_0^{1,1}(Q) \oplus H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) ;$$

$$H^{1,\frac{1}{2}}(Q) \cong H_0^{1,\frac{1}{2}}(\Sigma) \oplus H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma) .$$

Teorema 8.3. - *Le condizioni* (5.9) *ed* (8.1) *sono equivalenti.*

*Dimostrazione.* Si osservi che con le notazioni introdotte si ha:

$$\{\varphi \in H^{1,1}(Q);\ S_2\varphi_{|\Sigma_1} = 0\} \cong H_0^{1,1}(Q) \oplus \{\psi \in H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\Sigma); \psi_{|\Sigma_1} = 0\} \equiv$$
$$\equiv H_0^{1,1}(Q) \oplus H_{\overline{\Sigma}_2}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}} ;$$

e analogamente:

$$\{u \in H^{1,\frac{1}{2}}(Q);\ S_2u_{|\Sigma_1} = 0\} = \cong H_0^{1,\frac{1}{2}}(Q) \oplus H_{\overline{\Sigma}_2}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}} .$$

Poichè ovviamente $H_0^{1,1}(Q)$ è denso in $H_0^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ si ha l'equivalenza voluta.

Osservazione 8.1. - Grazie al teorema 8.3 si sarebbe potuta evitare l'introduzione dell'ipotesi (8.1) e dedurla direttamente dalla (5.9), dimostrando così il teorema 81. senza l'ipotesi restrittiva della validità della (1.9) con $\lambda = 0$; inoltre non sarebbe più stato necessario il teorema 8.2, l'unicità della soluzione essendo conseguenza del teorema di unicità astratto di [1]. Ho però preferito seguire questa linea di dimostrazione sia perchè ho ottenuto il teorema 8.2 in data anteriore a quella in cui ho ottenuto il teorema di unicità astratto, sia anche perchè il metodo usato per dimostrare il teorema 8.2 è usuale in problemi di questo tipo (cfr. ad es. [14] in ipotesi e in spazi diversi) ed è immediatamente generalizzabile a problemi in cui l'ipotesi non debba necessariamente coincidere con l'ipotesi corrispondente alla (8.1) (ad es. se l'operatore $A$ è di ordine $2m$ con $m > 1$).

**8.4.** - I teoremi 5.4, 8.1 e 8.2 e 8.3 danno:

Teorema 5.4. - *Sotto le ipotesi* (1.1), (1.3), (1.8), (1.11), (8.1) *per ogni* $f \in L^2(Q)$ *esiste in* $H_\Lambda^{1,\frac{1}{2}}(Q)$ *una ed una sola soluzione del* *problema*

$$(8.4) \qquad \Lambda u = f \text{ in } Q; \quad S_2 u_{|\Sigma_1} = 0; \quad S_1 u_{|\Sigma_2} = 0 .$$

*Inoltre $u$ dipende con continuità da $f$.*

## 9. Un teorema di densità.

9.1. - Mi propongo in questo numero di dare delle condizioni su $\Sigma_2$ affinchè sia verificata la (8.1).

Si osservi anzitutto che a questo scopo sono difficilmente utilizzabili condizioni (usuali in questo tipo di problemi di densità) del tipo: « La frontiera di $\Sigma_2$ è una varietà $k$-volte differenziabile »; tali condizioni servono infatti a « spianare » l'insieme $\Sigma_2$ ed a ridursi al caso in cui $\Sigma_2$ è un semispazio; ma quando, come nella (8.1), figuri una dissimetria delle variabili tali « spianamenti » non sono possibili in quanto spazi del tipo $H^{1,\frac{1}{2}}(\Gamma \times ]-\infty, +\infty[)$ non sono invarianti rispetto a queste trasformazioni.

Una seconda osservazione è la seguente: la condizione (8.1) è di tipo molto generale; non so se essa è automaticamente verificata quando valga la (1.11) ,tuttavia non conosco esempi in cui valga la (1.11) e non la (8.1). Per questo motivo, invece di enunciare condizioni precise su $\Sigma_2$ atte ad assicurare la validità della (8.1) mi limiterò ad indicare un procedimento col quale si puòcercare di approssimare elementi di $H^{1,\frac{1}{2}}_{\Sigma_2}$ con elementi di $\mathfrak{D}_{\Sigma_2}$ (notazioni analoghe a quelle introdotte nella (8.1): $\mathfrak{D}_{\overline{E}} = \{\varphi \in \mathfrak{D}(\Sigma);\ \text{supporto } \varphi \subset \overline{E}\}$).

9.2. - Si fissi dunque un insieme $\Sigma_2 \subset \Sigma$ tale che valga la (1.11) e sia $u \in H^{1,\frac{1}{2}}_{\Sigma_2}$. Sia $\{\chi_m(t)\}_{m=0,\pm 1,\pm 2,\dots}$ una successione di funzioni tali che $\chi_m \in \mathfrak{D}(-\infty, +\infty)$; supporto $\chi_m \subset ]m-1, m+1[$; $\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \chi_m(t) = 1$.

Si verifica facilmente che è $u = \lim_{N\to\infty} \sum_{|m|\leq N} u \cdot \chi_m$ (limite in $H^{1,\frac{1}{2}}(\Sigma)$); per approssimare $u$ basterà quindi approssimare

$\sum_{|m|\leqslant N} u \cdot \chi_m$; il che equivale a dire che si può sostituire $\Sigma_2$ con $\Sigma_2 \cap (\Gamma \times ]m-1,\ m+1[)$; cioè che si può supporre $\Sigma_2$ limitato.

9.3. - Sia $\Sigma_2$ un insieme limitato di $\Sigma$ tale che valga la (1.11). Con una partizione dell'unità su $\Gamma$ e con $n-1$ omeomorfismi infinitamente differenziabili con i loro inversi ed a Jacobiano diverso da zero (che esistono per la (1.1)) del tipo:

$\xi_i = \xi_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ ; $\quad (x_1, x_2, ..., x_n) \in \Gamma$ ; $\quad i = 1, 2, ..., n-1$

ci si può ridurre al caso in cui $\Sigma_2$ sia un aperto limitato misurabile secondo Peano-Jordan dello spazio euclideo a $n$ dimensioni $\mathfrak{R}^{n-1} \times \mathfrak{R}^1$ il punto generico sarà indicato con $(\xi, t)$ dove $t \in \mathfrak{R}^1$ e $\xi = (\xi_1, ..., \xi_{n-1}) \in \mathfrak{R}^{n-1}$.

9.4. - Sia $\Sigma_2$ un aperto limitato di $\mathfrak{R}^n$, misurabile secondo Peano-Jordan. Supporrò che esista una decomposizione finita di $\mathfrak{R}^n$ in aperti misurabili secondo Peano-Jordan, $\mathfrak{R}^n = \bigcup_{i=1}^{h} A_i$, tale che $\Sigma_2 \cap A_i$ sia un insieme che goda della seguente proprietà di «contrazione»: si può traslare $\Sigma_2 \cap A_i$ in modo che l'origine sia punto interno a $\Sigma_2 \cap A_i$, e dopo tale traslazione l'insieme $\Sigma_2 \cap A_i$ è tale che $\lambda(\Sigma_2 \cap A_i) = \{(\lambda\xi, \lambda t);\ (\xi, t) \in \Sigma_2 \cap A_i\}$ abbia una distanza positiva dalla frontiera di $\Sigma_2 \subset A_i$ per ogni reale $\lambda \in ]0, 1[$ (14).

Se vale tale proprietà, con una partizione dell'unità relativa alla decomposizione $\mathfrak{R}^n = \bigcup_{i=i}^{h} A_i$, per dimostrare la (8.1) sarà sufficiente dimostrare il seguente teorema:

TEOREMA 9.1. - *Sia $E$ un aperto limitato di $\mathfrak{R}^n$ misurabile secondo Peano-Jordan, contenente l'origine, e tale che per ogni $\lambda \in ]0, 1[\lambda E$ ha distanza positiva dalla frontiera di $E$; allora $\mathfrak{D}_{\overline{E}}$ è denso in $H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}_{\overline{E}}$.*

---

(14) Ad es. tale proprietà vale se $\Sigma_2 \cap A_i$ è un insieme aperto limitato convesso contenente l'origine.

*Dimostrazione.* Si considerino su $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}^n)$ le applicazioni $T_\lambda$, $S_\lambda$ definite da: $(T_\lambda u)(\xi, t) = u\left(\frac{1}{\lambda}\xi, \frac{1}{\lambda}t\right)$ $\left(\text{pongo } \frac{1}{\lambda}\xi \equiv \equiv \left\{\frac{1}{\lambda}\xi_i\right\}_{i=1,2,\dots,n-1}\right)$; $S_\lambda = I - T_\lambda$ ($I$ = identità). Si verifica facilmente che le applicazioni $T_\lambda$ ed $S_\lambda$ di $\mathfrak{D}(\mathfrak{R}^n)$ in sè si prolungano in applicazioni lineari continue di $L^2(\mathfrak{R}^n)$ in sè e di $H^{2,1}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1)$ in sè; indicherò ancora con $T_\lambda$ ed $S_\lambda$ tali prolungamenti. Per interpolazione (cfr. Pagni [17]; si ha $[H^{2,1}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1), L^2(\mathfrak{R}^n)]_{\frac{1}{2}} = H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1))$ si avrà allora $T_\lambda$, $S_\lambda \in \mathfrak{L}(H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1))$ (15). Si verifica inoltre facilmente che è

$$\lim_{\lambda\to 1} \| S_\lambda \|_{\mathfrak{L}(L^2(\mathfrak{R}^n), L^2(\mathfrak{R}^n))} = 0 \; ; \qquad \lim_{\lambda\to 1} \|S_\lambda\|_{\mathfrak{L}(H^{2,1}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1), H^{2,1}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1)}$$

e ne seguirà, per interpolazione:

$$\lim_{\lambda\to 1} \| S_\lambda \|_{\mathfrak{L}(H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1), H^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}(\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^{n-1}\times\mathfrak{R}^1))} = 0;$$

quindi per approssimare una $u \in H_{\overline{E}}^{\frac{1}{2},\frac{1}{4}}$ con elementi di $\mathfrak{D}_{\overline{E}}$ basterà approssimare $T_\lambda u$ con elementi di $\mathfrak{D}_{\overline{E}}$; e tale approssimazione è facile perchè, per le ipotesi fatte su $E$, $T_\lambda u$ ha supporto in $\lambda \cdot E$; quindi si può regolarizzare (con prodotti di convoluzione) $T_\lambda u$ lasciandone il supporto in $\overline{E}$; ne segue il teorema. c.v.d.

## n. 10. - Osservazioni finali.

Le ipotesi sotto le quali è stato ottenuto il teorema (8.4) sono: la (1.8) necessaria anche per avere un teorema di esistenza per il problema in esame, la (1.11) necessaria (come si è già detto al n. 1.4) per avere la unicità cercata; le (1.1) ed (1.3) facilmente generalizzabili e molto poco restrittive; ed infine la (8.1) che, come si è visto nel n. 9 è di carattere molto generale.

Ci si può porre il problema di confrontare tali ipotesi con le

(15) Con $\mathfrak{L}$ $(X, Y)$ indico lo spazio delle applicazioni lineari continue di $X$ in $Y$.

ipotesi sotto le quali era già noto un teorema di unicità del tipo del teorema 8.4 (cfr. ad es. Kato-Tanabe [24], Lions [25]).

Tale confronto, che potrebbe essere fatto anche per il teorema di unicità astratto che ho ottenuto in [1], non è però agevole in quanto le ipotesi sotto le quali valgono i risultati di [24] e [25] sono essenzialmente del seguente tipo: l'applicazione $t \to P_t v$ (introdotta nel n. 5.1) è di classe $C^1$ e tale ipotesi (contrariamente a quanto si verifica per la (8.1)) è difficilmente esprimibile in termini di proprietà degli insiemi $\Sigma_1$, $\Sigma_2$.

Viceversa la (8.1) è valida, come si è visto nel n. 9, sotto ipotesi molto generali sugli insiemi $\Sigma_1$, $\Sigma_2$ e che risultano geometricamente evidenti; ad es. la condizione enunciata nel n. 7 di [1] si ottiene con un facile adattamento dei ragionamenti esposti al n. 9 (basta «contrarre» la figura rispetto all'asse delle $t$ anzichè rispetto all'origine).

## BIBLIOGRAFIA


[1] Baiocchi C.: *Regolarità e unicità....* In corso di stampa sui Rend., Padova.

[2] Baiocchi C.: *Sui problemi ai limiti....* Boll. U.M.I. vol. 19, pp.407-422.

[3] Fichera G.: *Analisi esistenziale....* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 1 (1947), pp. 75-100.

[4] Gagliardo E.: *Problema al contorno....* Ric. di Matematica, 5 (1956) pp. 169-205.

[5] Hormander L.: *Definition of maxmal....* Alk. Math., 3 (1958), pp. 501-504.

[6] Lions J.L.: *Espaces intermédiairès....* Bull. Math. R.P.R., Bucarest, 2 (1958), pp. 410-432.

[7] Lions J. L.: *Equations différentielles opérationnelles.* Grundleheren der Math. Wiss. B. 111.

[8] Lions J. L.: *Equations différentielles....* Corso CIME 1963. Cremonese Roma.

[9] Lions J. L., Magenes E. : *Problèmes aux limites non homogènes* (II). Ann. Inst. Fourier 13 (1961), pp. 137-178.

[10] LIONS J.L., MAGENES E.: *Problèmes aux limites non homogènes* (III). Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XV (1961), pp. 39-101.

[11] LIONS J. L., MAGENES E.: *Problèmes aux limites non homogènes* (V). Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, XVI (1962), pp. 1-44.

[12] LIONS J. L., PEETRE J.: *Sur une classe d'espaces d'interpolation.* Pubblicazione I.H.E.S. n. 19.

[13] MIRANDA C.: *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico.* Ergebnisse der Mathematik N.F. hefte 2.

[14] MAGENES E.: *Sull'equazione del calore. Teoremi di unicità....* I e II, Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova, 21 (1952), pp. 99-123; 136-170.

[15] MAGENES E., STAMPACCHIA G.: *I problemi al contorno....* Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, 12 (1958), pp. 247-358.

[16] PAGNI M.: *Sulle tracce di una certa classe di funzioni.* Rend. Sem. Mat. e fis. Modena XI (1961-62).

[17] PAGNI M.: *Problemi al contorno....* Rend. Sem. Mat. fis. Modena, XIII (1964), pp. 119-164.

[18] SCHWARTZ L.: *Théorie des distributions.* I e II. Herman Paris 1950-51.

[19] SCHWARTZ L.: *Théorie des distributions à valeurs vectorielles.* I e II. Ann. Inst. Fourier, 7 (1958) e 8 (1958).

[20] SCHWARTZ L.: *Trasformate di Fourier....* (parte I Corso CIME 1961) ed. Cremonese, Roma.

[21] SLOBODETSKIJ L. N.: *Gli spazi di S. L. Sololev d'ordine frazionario....* (in russo) Doklady Akad. Nauk., 118, (1958), pp. 243-246.

[22] STAMPACCHIA G.: *Problemi al contorno misti....* Annali Mat. p. e appl. 40 (1955), 177-193.

[23] GRISVARD P.: *Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications.* Thèse, Paris, 1965.

[24] KATO T., TANABE H.: *On the abstract evolutio equation.* Osaka Math. J. 14 (1962), pp. 107-133.

[25] LIONS J. L. *Remarques sur les équations differentielles opérationnelles.* Osaka Math. J. 15 (1963), pp. 131-142.

Manoscritto pervenuto in redazione il 23 giugno 1965.