SILVIO GRECO

Sull'integrità e la fattorialità dei completamenti *m*-adici

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 1 (1966), p. 50-65

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_50_0>

SULL'INTEGRITÀ E LA FATTORIALITÀ DEI COMPLETAMENTI $\mathfrak{m}$-ADICI

di SILVIO GRECO (*a Pisa*) *)

In questo lavoro **) ci proponiamo di dare dei criteri per l'integrità e la fattorialità dei completamenti $\mathfrak{m}$-adici di anelli noetheriani.

Dopo aver stabilito, nel n. **1**, alcune proprietà relative agli spettri degli anelli commutativi, vengono dati, nel n. **2**, dei criteri d'integrità che si ottengono approfondendo metodi e risultati di uso corrente nell'Algèbre Commutative di Bourbaki (cap. II) e negli Eléménts de Géométrie Algébrique di Grothendieck (cap. I).

I suddetti criteri vengono poi applicati nel n. **3** per estendere una proprietà dei completamenti $\mathfrak{m}$-adici stabilita da O. Zariski in [6]; questa estensione permette poi, nel n. **4**, di generalizzare alcuni risultati sulla fattorialità dei completamenti e degli anelli di serie ristrette, ottenuti da P. Salmon in [3].

Diamo infine, nel n. **5**, due risultati che generalizzano proprietà note sui completamenti dell'anello $\boldsymbol{Z}$ dei numeri interi: il primo di tali risultati è relativo ai domini di Dedekind, il secondo concerne topologie generate da ideali principali.

---

*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Via Val Chisone 35. Roma.

**) L'A. ringrazia il Prof. P. Salmon per avergli dato utili consigli nella redazione del presente lavoro.

1. – In questo numero, dopo aver premesso un richiamo su definizioni e risultati noti relativi allo spettro primo di un anello, stabiliamo due proprietà relative alla connessione degli spettri primi (proposizioni 1.2 e 1.3).

Supporemo tutti gli anelli commutativi e provvisti di identità. Un anello senza divisori dello zero sarà detto *integro*.

Sia A un anello. Lo *spettro primo* di A (o, brevemente, lo *spettro* di A è l'insieme spec A, degli ideali primi di A, munito della topologia che ha per chiusi i sottinsiemi del tipo

$$V(\mathfrak{a}) = \{\mathfrak{p} \in \operatorname{spec} A;\ \mathfrak{p} \supset \mathfrak{a}\}$$

dove $\mathfrak{a}$ è un ideale di A (cfr. [1] cap. II § 4, n. 3).

PROPOSIZIONE 1.1 - *Sia A un anello. Allora spec A è connesso se e solo se A non contiene elementi idempotenti diversi da* 0 *e da* 1.

PROVA. Vedi [1] cap. II, § 4, n. 3, cor. 2 della prop. 15.

PROPOSIZIONE 1.2. - *Sia A un anello noetheriano. Allora si ha $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$, dove spec A_i è connesso per $i = 1, \ldots, n$.*

PROVA. Se spec A è connesso non c'è nulla da dimostrare. In caso contrario esiste in A un idempotente $u \neq 0{,}1$ (prop. 1.1). Poiché A è noetheriano si può supporre che u non sia divisibile per nessun altro idempotente $\neq 1$.

Poniamo $v = 1 - u$. Allora v è idempotente e non divide nessun altro idempotente $\neq 0$. Infatti se $vx \neq 0$ è idempotente per qualche $x \neq 1$, $1 - vx$ è idempotente diverso da u e $(1 - vx)u = u$. Così u è divisibile per l'idempotente $1 - vx \neq 1$, contro la definizione di u.

Poniamo $A_1 = vA$ e $B_1 = uA$. Ovviamente A_1 non contiene elementi idempotenti $u \neq 0{,}1$, e quindi spec A_1 è connesso (prop. 1.1).

Inoltre $A = A_1 \oplus B_1$. Se spec B_1 è connesso la prova completa; altrimenti si ripete il ragionamento precedente su B_1 trovando $B_1 = A_2 \oplus B_2$, con spec A_2 connesso, e così via.

Questo procedimento ha termine dopo un numero finito di passi perchè A è noetheriano. Si ha quindi la tesi.

Ci proponiamo ora di dare un criterio atto a stabilire se lo spettro di un anello è connesso (prop. 1.3). Questo criterio si rivelerà particolarmente utile nello studio dell'integrità del completamenti $\mathfrak{m}$-adici.

È opportuno richiamare quanto segue: sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Si dice che la coppia $(A, \mathfrak{m})$ *verifica la condizione di Hensel* se valgono le seguenti proprietà:

a) A è un anello linearmente topologizzato separato e completo;

b) $\mathfrak{m}$ è chiuso in A ed ogni suo elemento è topologicamente nilpotente (cioè $\lim x^n = 0$ per ogni x in $\mathfrak{m}$).
(cfr. [1] cap. III, § 4, n. 5).

Si osservi che se la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel, $\mathfrak{m}$ è contenuto nel radicale di A. Infatti se $\lim x^n = 0$, $1 - x$ è invertibile (cfr. [1] cap. III, § 2, n. 13, lemma 3).

PROPOSIZIONE 1.3. - *Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A. Allora si ha*:

i) *spec $A/\mathfrak{m}$ connesso $\Rightarrow$ spec A connesso.*

Se inoltre la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel si ha:

ii) *spec A connesso $\Rightarrow$ spec $A/\mathfrak{m}$ connesso.*

PROVA. Dimostriamo la proposizione facendo uso della proposizione 1.1.

i). Supponiamo che $A/\mathfrak{m}$ non contenga elementi idempotenti $\neq 0,1$, e mostriamo che anche A non contiene elementi idempotenti $\neq 0,1$.

Sia u un idempotente di A. Se $u \in \mathfrak{m}$, $1 - u$ è invertibile, perchè $\mathfrak{m}$ è contenuto nel radicale di A; e poichè $u(1 - u) = 0$, si ha $u = 0$.

Supponiamo allora $u \notin \mathfrak{m}$, e sia $\overline{u}$ la sua immagine in $A/\mathfrak{m}$. Poichè $\overline{u}$ è un idempotente non nullo di $A/\mathfrak{m}$, $\overline{u} = \overline{1}$ e quindi $u = 1 + m$ per un opportuno $m \in \mathfrak{m}$. Ma $\mathfrak{m}$ è contenuto nel radicale di A, e quindi $1 + m$ è invertibile; e poichè $u = u^2$ si ha $u = 1$.

Così A non contiene idempotenti $\neq 1,1$, e la *i*) è dimostrata.

ii). Sia $f : A \to A/\mathfrak{m}$ l'omomorfismo naturale. Poichè la coppia $(A, \mathfrak{m})$ verifica la condizione di Hensel, f stabilisce una corrispondenza biunivoca tra gli idempotenti di A e quelli di $A/\mathfrak{m}$. (cfr. [1] cap. III, § 4, n. 6, lemma 2). La tesi discende allora dalla proposizione 1.1.

2. – In questo numero sono dati alcuni criteri per stabilire se un anello è integro; essi saranno poi applicati, nel n. 3, al caso dei completamenti $\mathfrak{m}$-adici di anelli noetheriani. Diamo inoltre una caratterizzazione degli anelli localmente integri (prop. 2.10).

Uno spazio topologico X si dice *irriducibile* se non è unione di due sottoinsiemi chiusi diversi da X. Si vede subito che X è irriducibile se e solo se l'intersezione di due aperti non vuoti di X è sempre non vuota. È chiaro inoltre che uno spazio irriducibile è connesso.

PROPOSIZIONE 2.1. - *Sia A un anello e sia F un sottospazio chiuso di spec A. Allora F è irriducibile se e solo se si può scrivere $F = V(\mathfrak{p})$, dove $\mathfrak{p}$ è un ideale primo di A.*

PROVA. Vedi [1] cap. II, § 4, n. 3, prop. 14.

Sia A un anello. Il radicale dell'ideale nullo di A si dice *nilradicale* di A, ed è costituito da tutti e soli gli elementi nilpotenti di A.

Un anello si dice *ridotto* se il suo nilradicale è nullo, ossia se l'unico elemento nilpotente è lo zero.

COROLLARIO 2.2. - *Sia A un anello e sia $\mathfrak{n}$ il nilradicale di A. Allora spec A è irriducibile se e solo se $A/\mathfrak{n}$ è integro. In particolare se A è ridotto, spec A è irriducibile se e solo se A è integro.*

PROVA. Vedi [1] cap. II, § 4, n. 3, cor. 1 della prop. 14.

LEMMA 2.3. - *Un anello A è ridotto se e solo se $A_{\mathfrak{m}}$ è ridotto per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.*

PROVA. Sia $\mathfrak{n}$ il nilradicale di A, e sia $\mathfrak{m}$ un ideale massimale di A. Allora $\mathfrak{n}A_{\mathfrak{m}}$ è il nilradicale di $A_{\mathfrak{m}}$, come si verifica facilmente. Quindi se A è ridotto, anche $A_{\mathfrak{m}}$ è ridotto. Viceversa se $\mathfrak{n}A_{\mathfrak{m}} = 0$ per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A, $\mathfrak{n} = 0$ per un risultato noto (vedi [1] cap. II, § 3, n. 3, cor. 3 del teorema 1).

COROLLARIO 2.4. - *Un anello localmente integro è ridotto.*

Un anello noetheriano A si dice *regolare* se $A_{\mathfrak{m}}$ è locale regolare [1]) per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$. Poichè un anello locale regolare è integro, un anello regolare è localmente integro. Ne segue

COROLLARIO 2.5 - *Un anello regolare è ridotto.*

La seguente proposizione 2.6 si può ottenere come conseguenza immediata di due fatti ben noti (cfr. [2], cap. I, 5.1.4 e 6.1.12), e di quanto precede; abbiamo tuttavia ritenuto opportuno darne una dimostrazione elementare, senza far ricorso al linguaggio degli schemi.

PROPOSIZIONE 2.6 - *Sia A un anello noetheriano. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) A è integro..

b) A è localmente integro e non contiene idempotenti $\neq 0,1$.

c) A è localmente integro e spec A è connesso.

d) A è ridotto e spec A è irriducibile.

PROVA. Evidentemente $a) \Rightarrow b)$. La proposizione 1.1 mostra che $b) \Rightarrow c)$, e dal corollario 2.2 segue che $d) \Rightarrow a)$.

Resta dunque da dimostrare che $c) \Rightarrow d)$. Ma A è ridotto per il corollario 2.4, e quindi basta dimostrare che spec A è irriducibile.

---

1) Per la definizione e le proprietà generali degli anelli locali regolari vedi [7], cap. VIII, § 11, e appendice 7.

Sia $\mathfrak{p}$ un ideale primo minimale di A (certo esistente perchè A è noetheriano), e poniamo $F = V(\mathfrak{p})$. Allora F è irriducibile per la proposizione 2.1. Mostriamo che spec $A = F$, o, ciò che è lo stesso, che $\mathfrak{p}$ è l'unico primo minimale di A.

Supponiamo allora che $\mathfrak{p}_1 \dots \mathfrak{p}_n$ ($n \geqslant 1$) siano i primi minimali di A distinti da $\mathfrak{p}$. Poniamo $F_i = V(\mathfrak{p}_i)$, $i = 1, \dots, n$.

Per ogni $i = 1, \dots, n$ si ha $F \bigcap F_i = \varnothing$. Infatti se così non fosse esisterebbe un ideale massimale $\mathfrak{m}$ contenente $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_i$. Ma allora $\mathfrak{p}A_{\mathfrak{m}} = 0 = \mathfrak{p}_i A_{\mathfrak{m}}$ perchè $A_{\mathfrak{m}}$ è integro e $\mathfrak{p}$ e $\mathfrak{p}_i$ sono primi minimali di A. Ne segue $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_i$, mentre si era supposto $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$. Allora si ha

$$F \bigcap \Big(\bigcup_1^n {}_i F_i\Big) = \varnothing \, .$$

D'altra parte $\bigcup_1^n {}_i F_i$ è chiuso e non vuoto, perchè $F_1, \dots, F_n$ sono chiusi e non vuoti. Poichè ovviamente:

$$\operatorname{spec} A = F \bigcup \Big(\bigcup_1^n {}_i F_i\Big)$$

spec A risulta sconnesso contro l'ipotesi. $\mathfrak{p}$ è allora l'unico primo minimale di A, e ciò prova la tesi.

Dal corollario 2.5 e dalla proposizione precedente segue subito

COROLLARIO 2.7 - *Sia A un anello regolare. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

a) A è integro.

b) A non contiene idempotenti diversi da 0 *e da* 1.

c) spec A è connesso.

d) spec A è irriducibile.

PROPOSIZIONE 2.8. - *Sia A un anello localmente integro e noetheriano e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A. Allora* *i) spec* $A/\mathfrak{m}$ *connesso* $\Rightarrow$ A *integro.*

Se poi la coppia $(A, \mathfrak{m})$ *verifica la condizione di Hensel.*

ii) A *integro* $\Rightarrow$ *spec* $A/\mathfrak{m}$ *connesso.*

PROVA. Se spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso, spec A è connesso per la proposizione 1.3. Ma A è localmente integro e quindi è integro per la proposizione 2.6. Ciò prova *i*).

Se A è integro, spec A è connesso (prop. 1.1), e quindi la *ii*) è una conseguenza immediata della proposizione 1.3.

OSSERVAZIONE. La *ii*) della proposizione precedente può essere falsa se la coppia $(A, \mathfrak{m})$ non verifica la condizione di Hensel. Sia infatti $A = \boldsymbol{Z}_S$ dove $\boldsymbol{Z}$ è l'anello dei numeri interi, ed S è il complementare dell'unione degli ideali massimali $2\boldsymbol{Z}$ e $3\boldsymbol{Z}$. Allora A è integro ed il suo radicale è $\mathfrak{m} = 2A \cap 3A$. Si vede subito che spec $A/\mathfrak{m}$ è costituito da due punti chiusi e quindi è sconnesso.

Sia A un anello (non necessariamente noetheriano), e supponiamo che A sia somma diretta degli anelli $A_1, \ldots, A_n$. Si vede subito che $\mathfrak{m}$ è un ideale massimale di A se e solo se si ha, per un i opportuno, $\mathfrak{m} = A \oplus \ldots \oplus \mathfrak{m}_i \oplus \ldots \oplus A_n$, dove $\mathfrak{m}_i$ è un ideale massimale di A_i. Si verifica inoltre che l'immersione naturale $A_i \to A$ induce un isomorfismo di anelli locali $A_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} A_{i\mathfrak{m}_i}$. Da tale osservazione segue subito il

LEMMA 2.9. - *Sia* $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ *un anello (non necessariamente noetheriano) decomposto nella somma diretta degli anelli* $A_1, \ldots, A_n$. *Siano* Ω *l'insieme degli ideali massimali di* A *e* Ω_i *l'insieme degli ideali massimali di* A_i $(i = 1, \ldots, n)$.

Esiste allora una corrispondenza biunivoca naturale $f : \Omega \to \bigcup_1^n{}_i \Omega_i$; *inoltre se* $\mathfrak{m} \in \Omega$ *e* $f(\mathfrak{m}) = \mathfrak{m}_i \in \Omega_i$ *si ha un isomorfismo naturale* $A_\mathfrak{m} \xrightarrow{\sim} A_{i\mathfrak{m}_i}$.

PROPOSIZIONE 2.10. - *Sia* A *un anello noetheriano. Allora* A *è localmente integro se e solo se si può decomporre nella somma diretta di un numero finito di anelli integri.*

PROVA. Per la proposizione 1.2 si ha $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_n$ con spec A_i connesso per $i = 1, \ldots, n$.

Ora se $A_1, \ldots, A_n$ sono integri, il lemma precedente mostra che A localmente integro.

Viceversa se A è localmente integro, $A_1, \ldots, A_n$ sono localmente integri (sempre per il lemma precedente), e poichè spec A_i è connesso per ogni $i = 1, \ldots, n$, $A_1, \ldots, A_n$ sono integri (prop. 1.3).

3. – In questo numero sarà data una condizione necessaria e sufficiente affinchè il completamento di un anello noetheriano A per una topologia $\mathfrak{m}$-adica sia integro.

Avvertiamo che in questo numero e nei seguenti tutti gli anelli sono supposti noetheriani.

Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Sia $\widehat{A}$ il completato (separato) di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Se $\mathfrak{a}$ è un ideale di A indicheremo con $\mathfrak{a}\widehat{A}$ l'estensione di $\mathfrak{a}$ mediante l'omomorfismo naturale $A \to \widehat{A}$.

Se A è un anello locale, in A sarà sempre considerata la topologia $\mathfrak{m}$-adica, dove $\mathfrak{m}$ è l'ideale massimale di A.

Denoteremo talvolta, per maggior precisione, con $(A, \mathfrak{m})$ un anello A munito di topologia $\mathfrak{m}$-adica, e con $\widehat{(A, \mathfrak{m})}$ il suo completato.

I risultati della seguente proposizione sono noti, e vengono richiamati per comodità del lettore (cfr. [1] cap. III; § 3, n. 4, prop. 8).

PROPOSIZIONE 3.1. - *Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Sia $\widehat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Allora:*

a) La topologia di $\widehat{A}$ coincide con la topologia $\mathfrak{m}\widehat{A}$-adica.

b) $\mathfrak{m}\widehat{A} \subset \mathrm{rad}\, \widehat{A}$, e $\widehat{A}/\mathfrak{m}\widehat{A} = A/\mathfrak{m}$.

c) La coppia $(\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})$ verifica la condizione di Hensel.

d) Gli ideali massimali di $\widehat{A}$ sono tutti e soli gli ideali del tipo $\mathfrak{n}\widehat{A}$, dove $\mathfrak{n}$ è un ideale massimale di A contenente $\mathfrak{m}$.

e) Per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ *di* A *contenente* $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{n}}$ *si identifica con un sottoanello di* $\widehat{A}_{\mathfrak{n}\widehat{A}}$, *ed i completamenti di questi anelli locali sono canonicamente isomorfi.*

COROLLARIO 3.2. - *Sia* A *un anello e sia* $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A. *Sia* $\widehat{A}$ *il completato di* A *per la topologia* $\mathfrak{m}$*-adica. Allora spec* $\widehat{A}$ *è connesso se e solo se spec* $A/\mathfrak{m}$ *è connesso.*

PROVA. L'asserto è una conseguenza immediata della proposizione 1.3 e della proposizione 3.1, *a*) *b*) *c*).

Poichè lo spettro di un anello integro è connesso (prop. 1.1), dal corollario precedente segue subito il

COROLLARIO 3.3. - *Se* $\widehat{A}$ *è integro, spec* $A/\mathfrak{m}$ *è connesso.*

OSSERVAZIONE. Il viceversa del corollario 3.3 in generale è falso: basta pensare ad un anello con divisori dello zero e con lo spettro connesso, munito della topologia discreta. Per esempio l'anello $K[x, y]/(xy)$ soddisfa alle condizioni suddette. (cfr. esempio 5.3). Si noti inoltre che il corollario 3.3 non dice nulla sulla irriducibilità di spec $A/\mathfrak{m}$ benchè spec $\widehat{A}$ sia irriducibile (cor. 2.2). Infatti se $A = K[x, y]$ ed $\mathfrak{m} = (xy)$, $(\widehat{A, \mathfrak{m}})$ è integro (cfr. esempio 5.3), mentre spec $A/\mathfrak{m}$ non è irriducibile, in quanto $A/\mathfrak{m}$ è ridotto ma non integro (cor. 2.2).

Studiamo ora alcuni casi in cui il corollario 3.3 ammette inverso. Ricordiamo che un anello locale A si dice *analiticamente irriducibile* se il suo completato $\widehat{A}$ è integro. Si noti che se A è analiticamente irriducibile A è integro, in quanto si identifica con un sottoanello del completamento. Il viceversa in generale è falso.

TEOREMA 3.4. - *Sia* A *un anello e sia* $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A. *Sia* $\widehat{A}$ *il completato di* A *per la topologia* $\mathfrak{m}$*-adica. Supponiamo che per ogni ideale massimale* $\mathfrak{n}$ *di* A *contenente* $\mathfrak{m}$, $A_{\mathfrak{n}}$ *sia analiticamente irriducibile. Allora* $\widehat{A}$ *è integro se e solo se spec* $A/\mathfrak{m}$ *è connesso* [2]).

---

[2]) La dimostrazione di questo teorema è stata data per la prima volta da O. Zariski nei due casi seguenti: 1) A è integro ed $\mathfrak{m}$ coincide

PROVA. Se A è integro, spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso per il corollario 3.3. Viceversa se spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso, spec $\hat{A}$ è connesso per il corollario 3.2. Basta allora provare che $\hat{A}$ è localmente integro (cfr. prop. 2.6).

Sia dunque $\mathfrak{n}\hat{A}$ un ideale massimale di $\hat{A}$, dove $\mathfrak{n}$ è un ideale massimale di A contenente $\mathfrak{m}$ (prop. 3.1, *d*)). Per la proposizione 3.1, e), gli anelli locali $A_{\mathfrak{n}}$ e $\hat{A}_{\mathfrak{n}\hat{A}}$ hanno lo stesso completamento (a meno di isomorfismi), e poichè $A_{\mathfrak{m}}$ è analiticamente irriducibile, anche $\hat{A}_{\mathfrak{n}\hat{A}}$ è analiticamente irriducibile. Ne segue che $\hat{A}_{\mathfrak{n}\hat{A}}$ è integro, e la prova è completa.

Poichè il completato di un anello locale regolare è ancora un anello locale regolare, gli anelli locali regolari sono analiticamente irriducibili. Si ha quindi un caso particolare notevole del teorema precedente:

COROLLARIO 3.5 - *Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Sia $\hat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Supponiamo che $A_{\mathfrak{n}}$ sia regolare per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ di A contenente $\mathfrak{m}$. Allora $\hat{A}$ è integro se e solo se spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso.*

COROLLARIO 3.6. - *Sia $(A, \mathfrak{m})$ un anello separato per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Se $A_{\mathfrak{n}}$ è regolare per ogni ideale massimale $\mathfrak{n}$ contenente $\mathfrak{m}$, e se spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso, A è integro.*

PROVA. Sia $\hat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica; $\hat{A}$ è integro per il corollario precedente. Poichè A è separato per la topologia $\mathfrak{m}$-adica, A si immerge canonicamente in $\hat{A}$ e quindi è integro.

4. - In questo numero si generalizzano alcuni risultati di P. Salmon sulla fattorialità dei completamenti $\mathfrak{m}$-adici e degli anelli di serie ristrette (cfr. [3], prop. 4, e teoremi 1, 5, 7).

Un anello integro a fattorizzazione unica sarà chiamato brevemente anello *fattoriale*. Una anello A sarà chiamato *localmente fattoriale* se $A_{\mathfrak{m}}$ è fattoriale per ogni ideale massimale $\mathfrak{m}$ di A.

---

col radicale di A; 2) A è l'anello delle coordinate di una varietà affine irriducibile, (cfr. [6], § 8).

Premettiamo il seguente lemma, che generalizza la proposizione 4 di [3].

LEMMA 4.1. - *Sia A un anello integro localmente fattoriale, e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A. Se ogni modulo proiettivo di rango 1 su $A/\mathfrak{m}$ è libero, A è fattoriale.*

La dimostrazione di questo lemma è stata data da P. Salmon (cfr. [3] prop. 4) nell'ipotesi più restrittiva « $A/\mathfrak{m}$ fattoriale » in luogo di « Ogni modulo proiettivo di rango 1 su $A/\mathfrak{m}$ è libero ». Si vede tuttavia che la suddetta dimostrazione fa uso soltanto della seconda ipotesi.

COROLLARIO 4.2. - *Sia A un anello localmente fattoriale, e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A contenuto nel radicale di A. Se spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso ed ogni modulo proiettivo di rango 1 su $A/\mathfrak{m}$ è libero, A è fattoriale.*

PROVA. Per la proposizione 2.8, *i*), A è integro. La tesi è allora una conseguenza immediata del lemma precedente.

Il teorema seguente generalizza il teorema 1 di [3].

TEOREMA 4.3. - *Sia A un anello regolare e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Sia $\widehat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Se spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso e se ogni modulo proiettivo di rango 1 su $A/\mathfrak{m}$ è libero, $\widehat{A}$ è fattoriale.*

PROVA. È noto che se A è regolare anche $\widehat{A}$ è regolare (cfr. [2] cap. 0, lemma 17.3.8.1 oppure [3] prop. 3).

Poiché un anello locale regolare è fattoriale, $\widehat{A}$ è localmente fattoriale. La tesi segue allora dal corollario precedente e dalla proposizione 3.1, *b*).

Il prossimo teorema 4.5 generalizza due risultati sulla fattorialità degli anelli di serie ristrette, sempre contenuti in [3] (cfr. teoremi 5 e 7).

Supporremo note le proprietà generali degli anelli di serie ristrette ed in particolare quelli riassunti nella seguente

PROPOSIZIONE 4.4. - *Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Siano $X_1, \ldots, X_{n+1}$ indeterminate su A, e poniamo*

$B = (A, \mathfrak{m})\ \{X_1, ..., X_n\}$. *Si ha allora:*

i) $(A, \mathfrak{m})\{X_1, ..., X_{n+1}\} = (B, \mathfrak{m}B)\{X_{n+1}\}$.

ii) $\widehat{B} = (\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X_1, ..., X_n\}$.

dove $\widehat{B}$ *è il completato di* B *per la topologia* $\mathfrak{m}B$*-adica, ed* $\widehat{A}$ *è il completato di* A *per la topologia* $\mathfrak{m}$*-adica.*

Per la dimostrazione vedi, per esempio, [3] §§ 1 e 3 (si osservi che l'ipotesi della noetherianità è essenziale per dimostrare la validità della *i*); cfr. [3], teor. 2).

TEOREMA 4.5. - *Sia* A *un anello regolare e fattoriale. Sia* $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A *tale che* $A/\mathfrak{m}$ *sia fattoriale. Siano* $X_1, ..., X_n$ *indeterminate. Allora l'anello di serie ristrette* $(A, \mathfrak{m})\{X_1, ..., X_n\}$ *è regolare e fattoriale.*

La dimostrazione che qui diamo ricalca quella del teorema 7 di [3].

PROVA. Poniamo $B_0 = A$ e $B_n = (A, \mathfrak{m})\{X_1, ..., X_n\}$ per ogni $n > 0$. Sia poi $\widehat{B_n}$ il completato di B_n per la topologia $\mathfrak{m}B_n$-adica ($n = 0, 1, ...$).

Il teorema è banale per $n = 0$. Procedendo per induzione su n, supponiamo che B_n sia regolare e fattoriale, e proviamo che B_{n+1} è regolare e fattoriale. La prima asserzione discende dal fatto che A è regolare e dal teorema 3 di [3]. Per dimostrare la seconda osserviamo che si ha (prop. 4.4).

$$B_{n+1} = (B_n, \mathfrak{m}B_n)\{X_{n+1}\} \tag{1}$$

e quindi si può applicare il teorema 6 di [3] il quale afferma che B_{n+1} è fattoriale purché siano fattoriali $B_n[[X_{n+1}]]$ e $(\widehat{B_n}, \mathfrak{m}\widehat{B_n})\{X_{n+1}\}$.

La prima di queste due ipotesi è verificata perchè B_n è regolare e fattoriale. Per provare che vale la seconda osserviamo che dalla (1) e dalla proposizione 4.4 si ricava:

$$(\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X_1, ..., X_{n+1}\} = \widehat{B_{n+1}} = (\widehat{B_n}, \mathfrak{m}\widehat{B_n})\{X_{n+1}\}.$$

Ora $A/\mathfrak{m}$ è fattoriale per ipotesi e quindi integro. Ne segue che spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso. Poichè A è regolare il corollario 3.5

mostra che $\widehat{A}$ è integro. Si può allora applicare il teorema 5 di [3] il quale mostra che nelle ipotesi precedenti $(\widehat{A}, \mathfrak{m}\widehat{A})\{X_1, \ldots, X_{n+1}\}$ è fattoriale. Così $(\widehat{B}_n, \mathfrak{m}\widehat{B}_n)\{X_{n+1}\}$ è e la prova è completa.

5. – In questo numero viene data una condizione necessaria e sufficiente particolarmente semplice per l'integrità dei completamenti $\mathfrak{m}$-adici di un dominio di Dedekind. Le considerazioni svolte si possono applicare talvolta anche ad anelli di altro tipo, come viene mostrato con alcuni esempi. Conclude il paragrafo una condizione per l'integrità dei completamenti rispetto a topologie generate da ideali principali.

LEMMA 5.1. - *Sia A un anello e siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ i suoi ideali primi minimali. Allora*:

$$i)\ \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_{i+1} \neq A,\ i = 1, \ldots, n-1 \Rightarrow \textit{spec}\ A\ \textit{connesso}\ ;$$

$$ii)\ \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_i \neq A,\ i = 1, \ldots, n \Rightarrow \textit{spec}\ A\ \textit{connesso}\ ;$$

$$iii)\ \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_i = A,\ i = 2, \ldots, n \Rightarrow \textit{spec}\ A\ \textit{sconnesso}\,.$$

PROVA. Poniamo $F_i = V(\mathfrak{p}_i)$, per $i = 1, \ldots, n$. Allora $\textit{spec}\ A = \bigcup_1^n {}_i F_i$ ed $F_1, \ldots, F_n$ sono irriducibili e quindi connessi (prop. 2.1).

Se poi $\mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_j \neq A$; si vede che $F_i \bigcap F_j \neq \varnothing$, e quindi le asserzioni *i*) e *ii*) discendono da noti teoremi di topologia.

Per provare la *iii*) osserviamo che se $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_i = A, F_1 \bigcap F_i = \varnothing$, e quindi $F_1 \bigcap (\bigcup_2^n {}_i F_i) = \varnothing$. Poichè $F_1, \ldots, F_n$ sono chiusi e non vuoti, la *iii*) è provata.

COROLLARIO 5.2. - *Sia A un anello e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Siano $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_n$ i primi minimali appartenenti ad $\mathfrak{m}$ e sia $\widehat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Supponiamo inoltre che sia verificata una almeno delle seguenti condizioni*:

$$i)\ \mathfrak{p}_i + \mathfrak{p}_{i+1} \neq A \quad \textit{per}\ i = 1, \ldots, n-1\ ;$$

$$ii)\ \mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_i \neq A \quad \textit{per}\ i = 1, \ldots, n.$$

Allora se A è regolare, $\widehat{A}$ è integro.

Se invece:

iii) $\mathfrak{p}_1 + \mathfrak{p}_i = A$ *per* $i = 2, ..., n$

$\hat{A}$ *non è integro.*

PROVA. Poichè $\mathfrak{p}_1/\mathfrak{m}, ..., \mathfrak{p}_n/\mathfrak{m}$ sono i primi minimali di $A/\mathfrak{m}$ il lemma precedente mostra che spec $A/\mathfrak{m}$ è connesso se vale la *i*) oppure la *ii*), ed è sconnesso se vale la *iii*). La tesi è allora una conseguenza immediata del corollario 3.5, e del corollario 3.3.

ESEMPIO 5.3. - Sia K un corpo e siano x, y due indeterminate su K. Sia $A = K[x, y]$ e sia $\mathfrak{m} = (xy)$. Allora $(\widehat{A, \mathfrak{m}})$ è integro per il corollario precedente, come si verifica facilmente.

ESEMPIO 5.4. Sia K un corpo e siano x, y, z tre indeterminate su K. Poniamo $A = K[x, y, z]$ ed $\mathfrak{m} = (xz(z+1), yz(z+1))$. I primi minimali di $\mathfrak{m}$ sono (x, y), (z) e $(z+1)$. Essi verificano la *ii*) del corollario 5.2, e quindi $(\widehat{A, \mathfrak{m}})$ è integro.

Applicheremo ora il corollario 5.2 allo studio dei completamenti $\mathfrak{m}$-adici di un dominio di Dedekind. Ricordiamo che un dominio di Dedekind è un anello regolare di dimensione 1 [3]).

TEOREMA 5.5. - *Sia A un dominio di Dedekind e sia $\mathfrak{m}$ un ideale di A. Sia $\hat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Allora $\hat{A}$ è integro se e solo se $\mathfrak{m}$ è primario.*

PROVA. Siano $\mathfrak{p}_1 ... \mathfrak{p}_n$ i primi associati ad $\mathfrak{m}$. Se $\mathfrak{m}$ è primario, $n = 1$, e quindi $\hat{A}$ è integro per il corollario 5.2.

Se $\mathfrak{m}$ non è primario $n > 1$ e $\mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_n$ sono ideali massimali di A. Allora è verificata la *iii*) del corollario 5.2, e quindi $\hat{A}$ non è integro.

OSSERVAZIONE. La tesi del teorema precedente si può anche esprimere così: $\hat{A}$ è integro se e solo se la topologia di A può essere generata da un ideale primo.

---

[3]) Per maggiori dettagli sui domini di Dedekind vedi [7] cap. V § 6 e seguenti.

Dal teorema precedente segue un ben noto corollario (cfr. [4] § 1.7) relativo ai completamenti dell'anello $\boldsymbol{Z}$ dei numeri interi.

COROLLARIO 5.6. - *Sia A un dominio a ideali principali, e sia $\mathfrak{m} = aA$ un ideale di A. Sia $\widehat{A}$ il completato di A per la topologia $\mathfrak{m}$-adica. Allora $\widehat{A}$ è integro se e solo se a è potenza di un elemento primo di A.*

Un altro risultato sui completamenti di anelli per topologie generate da ideali principali è il seguente.

PROPOSIZIONE 5.7 - *Sia A un anello e sia T una indeterminata su A. Supponiamo che $A[[T]]$ sia fattoriale. Sia $a \in A$ tale che per ogni decomposizione del tipo $a = pq$ con p, q non unità, si abbia $(p, q) \neq A$. Sia $\widehat{A}$ il completato di A per la topologia aA-adica. Allora $\widehat{A}$ è integro.*

PROVA. È noto che $\widehat{A} = A[[T]]/(a - T)$ (cfr. p. es. [1] cap. III, § 2, esercizio 26). Basta quindi far vedere che $a - T$ è primo in $A[[T]]$; e poichè $A[[T]]$ è fattoriale basta far vedere che $a - T$ è irriducibile. Sia allora

$$a - T = \Big(\sum_0^\infty {}_i b_i T^i\Big)\Big(\sum_0^\infty {}_i c_i T^i\Big)$$

una decomposizione di $a - T$. Si ha allora $a = b_0 c_0$ e $-1 = b_1 c_0 + c_1 b_0$. Ne segue che a_0 oppure b_0 deve essere una unità. Quindi $a - T$ è irriducibile è la tesi è provata.

OSSERVAZIONE 1. Se $a = pq$ con p, q non unità e $(p, q) = A$, $(\widehat{A, aA})$ non è integro. Si vede infatti che se $1 = bp + cq$, $\overline{bp}$ è un idempotente non banale di A/aA, e quindi spec A/aA è sconnesso per la proposizione 1.1. Il corollario 3.3 mostra allora che $(\widehat{A, aA})$ non è integro.

OSSERVAZIONE 2. La proposizione 5.7 non è inclusa in nessuno dei risultati precedenti. Infatti l'ipotesi che si fa su a assicura che spec A/aA è connesso; non si ha tuttavia nessuna ipotesi sulla integrità locale di $(\widehat{A, aA})$ o sulla regolarità di A. È noto infatti che esistono anelli non regolari A per i quali

$A[[T]]$ è fattoriale (per esempio $A = K[[x, y, z]]/(x^3 + y^5 - z^2)$ dove K è un corpo di caratteristica 2 gode di questa proprietà; cfr. [5], cap. III, remark 2 dopo il teorema 5.2, e remark 2 dopo il teorema 5.3).

BIBLIOGRAFIA

[1] BOURBAKI N.: *Algèbre Commutative*, cap. II e III. Herman, 1961.

[2] GROTHENDIECK A.: *Eléménts de Géométrie Algébrique*, cap. O e I; I.H.E.S., 1960, 1964.

[3] SALMON P.: *Sur les séries formelles restreintes*, Bull. Soc. Math. de France, 1964.

[4] SAMUEL P.: *Progrés Récents d'Algèbre Locale*, copie mimeografate, Rio de Janeiro, 1959.

[5] SAMUEL P.: *Lectures on Unique Factorization Domains*, Tata Inst. of Fund. Research, Bombay, 1964.

[6] ZARISKI O.: *Generalized semi-local rings*, Summa Brasiliensis Mathematicae, vol. 1, fasc. 8 (1946).

[7] ZARISKI O. e SAMUEL P.: *Commutative Algebra, voll.* I e II, Van Nostrand 1958, 1960.

Manoscritto pervenuto in redazione l'8 maggio 1965.