RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

GIOVANNI PRODI

Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde con termine dissipativo non lineare

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 36, nº 1 (1966), p. 37-49

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_37_0>

SOLUZIONI PERIODICHE DELL'EQUAZIONE DELLE ONDE CON TERMINE DISSIPATIVO NON LINEARE

di GIOVANNI PRODI (*a Pisa*) *)

Sia Ω un aperto limitato di R^n; sia $f(x, t)$ una funzione definita in $\Omega \times R$, periodica rispetto a t di periodo T. Considero qui il problema dell'esistenza di soluzioni $u(x, t)$ periodiche rispetto a t con lo stesso periodo T, dell'equazione

$$u'' - \Delta u + \beta(u') = f \tag{1}$$

dove è

$$u' = \partial u / \partial t\,, \qquad u'' = \partial^2 u / \partial t^2\,, \qquad \Delta \text{ operatore di Laplace}$$

con la condizione al contorno $u_{|\partial\Omega} = 0$.

L'esistenza di una ed una sola soluzione periodica è stata da me dimostrata in un lavoro del 1956 [5] nell'ipotesi che β abbia rapporto incrementale compreso fra due costanti positive. Recentemente, G. Prouse [6] ha dimostrato l'esistenza ed unicità, per il caso di un termine della forma $\beta(u') = u' + |u'|u'$, nell'ipotesi che la dimensione dell'aperto Ω non sia superiore a 5.

Qui dimostro che la tesi sussiste nel caso di una β monotona e divergente come una arbitraria potenza di esponente

---

*) Ha parzialmente contribuito finanziariamente alla preparazione di questo lavoro l'Air Force Office of Scientific Research OAR con il Grant AFEOAR 65-42.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Pisa.

$\varrho \geqslant 1$, e senza alcuna restrizione per la dimensione dello spazio. Le difficoltà particolari presentate dal problema consistono in questo: è relativamente facile ottenere maggiorazioni di tipo integrale per $u'(t)$, mentre non è agevole ottenere, da queste, maggiorazioni per la stessa incognita $u(t)$. Ma ciò invece è possibile in modo ovvio nel caso di una $u(t)$ a valore medio nullo; la tecnica usata consiste pertanto nell'assumere come nuova incognita la funzione

$$(2) \qquad v(t) = u(t) - \overline{u}\,, \qquad \text{dove} \qquad \overline{u} = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt\,.$$

Mentre la $v(t)$ soddisfa ad una equazione analoga alla (1), ma risulta a valor medio nullo, per valor medio $\overline{u}$ di $u(t)$ si ottiene una equazione del tipo di Poisson, con secondo membro in $L^{(\varrho+1)/\varrho}(\Omega)$. Poichè è $1 < (\varrho + 1)/\varrho \leqslant 2$, la risoluzione di questa equazione presenta qualche difficoltà nel caso di un aperto Ω qualsiasi. Pertanto, nei § § 1 e 2 suppongo il campo Ω di classe 2; nel § 3, seguendo un'indicazione fornitami da G. Stampacchia, tolgo ogni ipotesi di regolarità su Ω. Il problema di Cauchy per l'equazione (1) è stato ampiamente studiato da J. L. Lions e W. Strauss [4] [3]; successivamente a G. Andreassi e G. Torelli [2] è stato possibile migliorare, in una direzione, i risultati dei predetti A.A. togliendo l'ipotesi che β siamo monotona (e sostituendola con una condizione di tipo asintotico). Anche per il problema delle soluzioni periodiche si pone il quesito se si possa garantire l'esistenza di una soluzione (prescindendo dall'unicità) in ipotesi di tipo esclusivamente asintotico sul termine $\beta(u')$. Il quesito si presenta tanto più spontaneamente, in quanto solo in un punto la dimostrazione dell'esistenza utilizza la monotonia di β. Non mi è stato possibile, tuttavia, di dare una risposta.

1. – Supponiamo che la funzione reale β definita in R abbia queste proprietà:

i) β sia continua e monotona in senso stretto

ii) Esista un numero $\varrho \geqslant 1$ tale che, per $\xi \to \pm\infty$ si abbia:

$$\beta(\xi) \approx |\xi|^{\varrho-1}\xi \quad ^{1)}$$

Per $p \geqslant 1$, k intero $\geqslant 1$, indichiamo, con $W^{k,p}$ lo spazio delle funzioni reali che hanno derivate fino all'ordine k a p-esima potenza sommabile in Ω con la consueta norma; $\mathring{W}^{1,p}$ indicherà la chiusura dello spazio $\mathfrak{D}(\Omega)$ (spazio delle funzioni indefinitamente derivabili, a supporto compatto in Ω) in $W^{1,p}$. Indichiamo con $W^{-1,p'}$ lo spazio duale di $\mathring{W}^{1,p}(1/p + 1/p' = 1)$. Se $u \in L^p$, $v \in L^{p'}$, con $1/p + 1/p' = 1$, porremo:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx$$

Se $u \in L^2$, scriveremo:

$$|u| = (u, u)^{1/2}.$$

Per $u, v \in W^{1/2}$, porremo:

$$((u, v)) = \int_\Omega \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial v}{\partial x_k} dx \qquad \text{e} \qquad \|u\| = ((u, u))^{1/2}.$$

Pertanto $\|u\|$, in $\mathring{W}^{1,2}$, è una norma equivalente a quella indotta da $W^{1,2}$. Per spazi diversi L^2 e da $W^{1,2}$, accanto al simbolo della norma, indicheremo lo spazio a cui la norma si riferisce.

Se B è uno spazio di Banach, ed è $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, indichiamo con $L^p(T; B)$ lo spazio delle funzioni di t fortemente misurabili, a valori in B, periodiche con periodo T e a p-esima potenza sommabile in ogni intervallo di periodicità. Dato ancora uno spazio di Banach B, useremo, con abuso di linguaggio, il medesimo simbolo B per indicare l'insieme delle funzioni di variabile reale a valori in B e costanti.

Sia ora S_ϱ lo spazio delle funzioni v di variabile reale, a

---

[1]) La scrittura $\beta(\xi) \approx \alpha(\xi)$ indica che il rapporto fra $\beta(\xi)$ ed $\alpha(\xi)$ è compreso, per $|\xi|$ abbastanza grande, fra due costanti positive.

valori vettoriali, periodiche di periodo T e tali che

$$v \in L^{\infty}(T;\ \mathring{W}^{1/2})$$
$$v' = L^{\varrho+1}(T;\ L^{\varrho+1}) \cap L^{\infty}(T;\ L^{2})$$
$$\overline{v} = T^{-1}\int_0^T v(t)dt = 0\ .$$

Supponiamo poi che:

$$iii) \qquad f \in L^{(\varrho+1)/\varrho}(T;\ L^{(\varrho+1)/\varrho})$$

Consideriamo una funzione reale u appartenente ad $S_\varrho \oplus \oplus\ \mathring{W}^{1,(\varrho+1)/\varrho}$; poichè $-\Delta$ (inteso nel senso delle distribuzioni) definisce un'applicazione continua di $\mathring{W}^{1,(\varrho+1)/\varrho}$ in $W^{-1,(\varrho+1)/\varrho}$, si riconosce facilmente che Δu, $\beta(u')$, f appartengono a $L^{(\varrho+1)/\varrho}(T;\ W^{-1,(\varrho+1)/\varrho})$. Quindi la (1) potrà essere intesa nel senso delle distribuzioni, di variabile indipendente reale, a valori in $W^{-1,(\varrho+1)/\varrho}$.

Vale allora il

TEOREMA 1. - *Se Ω è un aperto limitato di classe* 2, *e se valgono le ipotesi i) ii) iii), l'equazione* (1) *ha una ed una sola soluzione* (*periodica di periodo T*) *nello spazio $S_\varrho \oplus W^{1,(\varrho+1)/\varrho}$.*

Applicando i valor medio di ambo i membri della (1) (ciò che ha certamente senso, trattandosi di distribuzioni vettoriali periodiche) ed eseguendo la sostituzione (2), tenendo conto del fatto che $u' = v'$, si ottiene l'equazione:

$$-\Delta\overline{u} + \overline{\beta(v')} = \overline{f} \tag{3}$$

(in cui il soprassegno indica il valor medio). Qui è $\overline{u} \in \mathring{W}^{1,(\varrho+1)/\varrho}$. Sottraendo poi membro a membro dalla (1) si ricava:

$$v'' - \Delta v + [\beta(v') - \overline{\beta(v')} = g \tag{4}$$

avendo posto $g = f - \overline{f}$. Il sistema (3), (4) è manifestamente equivalente al problema posto se $\overline{u} \in W^{1,(\varrho+1)/\varrho}$, $v \in S_\varrho$.

Per risolvere la (4) è opportuno trasformarla in una equazione di forma integrale. Si verifica facilmente che la (4) equivale alla:

$$\frac{d^2}{dt^2}(v(t), \omega) + ((v(t), \omega)) + ([\beta(v') - \overline{\beta(v')}], \omega) = (g, \omega) \tag{5}$$

supposta verificata per ogni $\omega \in L^{\varrho+1} \cap \mathring{W}^{1/2}$. Questa equivale, ancora, ad imporre che per ogni φ periodica con periodo T, tale che $\varphi \in L^\infty(T; \mathring{W}^{1/2}) \cap L^{\varrho+1}(T; L^{\varrho+1})$ e $\varphi' \in L^{\varrho+1}(T; L^{\varrho+1}) \cap$ $\cap\ L^\infty(T; L^2)$, si abbia (convenendo, qui e nel seguito, di omettere l'indicazione degli estremi di integrazione ogni volta che l'integrale è fatto su un periodo):

$$\int \{ - (v'(t), \varphi'(t)) + ((v(t), \varphi(t))) + \\ + ([\beta(v') - \overline{\beta(v')}], \varphi(t))\}\, dt = \int (g(t), \varphi(t))dt\,. \tag{6}$$

2. – Risolviamo ora la (4) utilizzando il metodo di Galerkin-Faedo. Sia ω_m una successione di elementi di $W^{1,2} \cap L^{\varrho+1}$, linearmente indipendenti, le cui combinazioni lineari siano un insieme denso in $W^{1,2} \cap L^{\varrho+1}$. Cerchiamo, per ogni intero $m > 0$, una funzione $v_m(t) = \sum_1^m{}_k C_{m,k}(t)\omega_k$ che soddisfi alla (5) per $\omega = \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Si abbia cioè:

$$\frac{d^2}{dt^2}(v_m(t), \omega_k) + ((v_m(t), \omega_k)) + (\beta(v'_m) - \overline{\beta(v'_m)}, \omega_k) = (g, \omega_k) \tag{7}$$

con $k = 1, 2, \ldots, m$. Questa fornisce un sistema differenziale per $C_{m,1}(t), C_{m,2}(t), \ldots, C_{m,m}(t)$, sistema che può essere messo in forma normale, a motivo dell'indipendenza lineare delle ω_k. Ora, si vede facilmente che il sistema (7) ammette una (ed una sola) soluzione periodica di periodo T; ciò può essere dimostrato, ad esempio, con il metodo di Leary-Schauder, facendo intervenire il sistema, dipendente dal parametro $\lambda \in [0, 1]$,

$$\text{(7')} \qquad \frac{d^2}{dt^2}(v_m(t), \omega_k) + ((v_m(t), \omega_k)) + (v_m'(t), \omega_k) =$$
$$= \lambda(v_m'(t), \omega_k) - \lambda([\beta(v_m') - \overline{\beta(v_m')}], \omega_k) + (g, \omega_k)$$
$$(k = 1, 2, \dots, m)$$

dove v_m ha sempre la forma $v_m(t) = \sum_1^m {}_k\, C_{m,k}(t)\omega_k$.

Notiamo ora che, per $\lambda = 0$, questo sistema è lineare ed ha una ed una sola soluzione, qualunque sia g; la maggiorazione a priori (uniforme rispetto a λ) delle sue soluzioni per m fissato non presenta difficoltà.

Dalla (7) si deduce che la soluzione v_m ha valor medio nullo. Infatti, integrando la (7) su un periodo e tenendo conto del fatto che $\bar{g} = 0$, si ottiene:

$$((\bar{v}_m, \omega_k)) = 0 \qquad\qquad k = 1, 2, \dots, n$$

ciò che comporta, evidentemente, $\bar{v}_m = 0$.

Passiamo ora ad ottenere maggiorazioni per v_m, indipendenti da m. Moltiplicando la (7) membro a membro per $C_{m,k}'(t)$, sommando rispetto all'indice k e integrando su un intervallo $[\tau', \tau'']$ $(\tau' < \tau'')$ si ottiene:

$$\text{(8)} \qquad \left(\frac{1}{2}\,|\,v_m'(t)\,|^2 + \frac{1}{2}\,\|\,v_m(t)\,\|^2\right)\Bigg|_{\tau'}^{\tau''} +$$
$$+ \int_{\tau'}^{\tau''} (\beta(v_m'(t)) - \overline{\beta(v_m'(t))}, v_m'(t))dt = \int_{\tau'}^{\tau''} (g(t), v_m'(t))dt\,.$$

Facendo, in particolare, $\tau' = 0, \tau'' = T$, si ricava:

$$\text{(9)} \qquad \int (\beta(v_m'(t)), v_m'(t))dt = \int (g(t), v_m'(t))dt$$

Osserviamo ora che, in virtù dell'ipotesi *ii*) esistono due costanti positive δ, h, tali che, per $|\xi| \geqslant \delta$ si ha $\beta(\xi)\xi \geqslant h |\xi|^{\varrho+1}$. Pertanto, per ogni $w \in L^{\varrho+1}$, vale la disuguaglianza:

$$(\beta(w), w) \geqslant h \| w \|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}} - H \operatorname{mis} \Omega$$

dove si è posto $H = h\delta^{\varrho+1} + \max_{|\xi| \leqslant \delta} |\beta(\xi)\xi|$. Applicando questa alla (9) si ottiene:

$$h \int \| v'_m(t) \|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}} dt \leqslant \left(\int \| g(t) \|^{(\varrho+1)/\varrho}_{L^{(\varrho+1)/\varrho}} dt \right)^{\varrho/(\varrho+1)} \left(\int \| v'_m(t) \|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}} dt \right)^{1/(\varrho+1)} +$$
$$+ H\, T \operatorname{mis} \Omega .$$

Da questa si deduce immediatamente la limitazione:

$$\int \| v'_m(t) \|^{\varrho+1}_{L^{\varrho+1}} dt \leqslant c_1 \tag{10}$$

dove la costante c_1 è indipendente da m. Poichè v_m ha valor medio nullo, da questa si ottiene la limitazione:

$$\max_t \| v_m(t) \|_{L^{\varrho+1}} \leqslant c_2 \tag{11}$$

dove anche c_2 dipende solo dai dati del problema.

Consideriamo ancora la (7); moltiplicando membro a membro per $c_{m,k}(t)$, sommando rispetto a k e integrando su un periodo, otteniamo:

$$\begin{aligned} &\int \{ - | v'_m(t) |^2 + \| v_m(t) \|^2 \} dt + \\ &\qquad + \int (\beta(v'_m(t)), v_m(t))\, dt = \int (g(t), v_m(t))\, dt . \end{aligned} \tag{12}$$

Teniamo ora presente che (come si deduce dall'ipotesi *ii*) esistono due costanti positive k, K tali che $|\beta(\xi)| \leqslant K + k |\xi|^{\varrho}$.

Allora, dalla (12) si ha:

$$\int \| v_m(t) \|^2 \, dt \leqslant \int | v_m'(t) |^2 \, dt + K \, (\text{mis } \Omega)^{1/2} (T)^{1/2} \left(\int | v_m(t) |^2 \, dt \right)^{1/2} +$$
$$+ k \left(\int \| v_m'(t) \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho+1} \, dt \right)^{\varrho/(\varrho+1)} \left(\int \| v_m(t) \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho+1} \, dt \right)^{1/(\varrho+1)} +$$
$$+ \left(\int \| g(t) \|_{L^{(\varrho+1)/\varrho}}^{(\varrho+1)/\varrho} \, dt \right)^{\varrho/(\varrho+1)} \left(\int \| v_m(t) \|_{L^{\varrho+1}}^{\varrho+1} \, dt \right)^{1/(\varrho+1)} .$$

Teniamo ora presente che, avendo Ω misura finita, $L^{\varrho+1}$ è immerso in L^2 con continuità; applicando le (10) e (11) si vede che esiste una costante C_3, dipendente solo dai dati del problema tale che:

$$\int \| v_m(t) \|^2 \, dt \leqslant C_3 \, . \tag{13}$$

Ritorniamo ora alla (8); integrando rispetto a τ', membro a membro, nell'intervallo $[\tau'' - T, \tau'']$, e tenendo conto della (10) e della (13) si constata che esiste una costante C_4, dipendente solo dai dati del problema, tale che:

$$\max_t \{ \, | v_m'(t) |^2 + \| v_m(t) \|^2 \, \} \leqslant C_4 \, . \tag{14}$$

Allora (procedendo come Lions e Strauss ([3], [4])) possiamo estrarre una successione parziale v_ν tale che:

v_ν converge debolmente in $L^\infty(T;\, W^{1,2})$ verso un elemento v (qui la topologia debole è quella che proviene dal considerare $L^\infty(T;\, W^{1,2})$ come spazio duale di $L^1(T;\, W^{1,2})$).

v_ν' converge debolmente (in senso analogo a quello ora visto) in $L^\infty(T;\, L^2)$, e converge pure debolmente in $L^{\varrho+1}(T;\, L^{\varrho+1})$.

$\beta(v_\nu')$ converge debolmente in $L^{(\varrho+1)/\varrho}\,(T;\, L^{(\varrho+1)/\varrho})$ verso un elemento h (pertanto $\overline{(\beta(v_\nu')}$ converge debolmente in $L^{(\varrho+1)/\varrho}$ verso $\overline{h}$).

Dalla (7) si ricava allora facilmente la relazione:

$$(15) \qquad \int \{-(v'(t), \varphi'(t)) + ((v(t), \varphi(t))) + (h(t) - \overline{h}, \varphi(t))\}\, dt = $$
$$= \int (g(t), \varphi(t))dt$$

per ogni funzione $\varphi(t) = \sum_{1}^{r} {}_h \gamma_h(t)\omega_h$ essendo le $\gamma_h(t)$ funzioni periodiche di periodo T dotate di derivate prime continue. Tenuto conto della proprietà di densità della famiglia $\{\omega_h\}$ si deduce che la (15) vale per ogni φ di periodo T e tale che :

$$\varphi \in L^\infty(T; \overset{\circ}{W}{}^{1,2}) \text{ e } \varphi' \in L^{\varrho+1}(T; L^{\varrho+1}) \cap L^\infty(T; L^2) .$$

Dunque, per poter affermare che v è soluzione del nostro problema, nella forma espressa dalla (6), basta mostrare che:

$$h(t) = \beta(v'(t)) .$$

Applicando un risultato di G. Torelli [8] [2]) alla (15) si ottiene la relazione:

$$(16) \qquad \int (h(t) - \overline{h}, v'(t))dt = \int (g(t), v'(t))dt$$

che si può scrivere, considerando che $\overline{v}' = 0$,

$$(17) \qquad \int (h(t), v'(t))dt = \int (g(t), v'(t))dt$$

---

[2]) Notiamo che il risultato, sufficiente ai nostri scopi, espresso dalla (16) si può ottenere con dimostrazione più semplice di quella del teorema di G. Torelli, dal momento che, volendo qui ottenere la « relazione dell'energia » per l'intervallo di periodicità, vengono a mancare i termini di frontiera.

Da questa e dalla (9) otteniamo:

$$\lim_{\nu\to\infty}\int(\beta(v'_\nu(t)),\, v'_\nu(t))dt = \int(g(t),\, v'(t))dt = \tag{18}$$

$$= \int(h(t),\, v'(t))dt\,.$$

Si ha ora:

$$\int(\beta(v'_\nu(t)) - \beta(v'(t)),\, v'_\nu(t) - v'(t))dt =$$

$$= \int(\beta(v'_\nu(t)),\, v'_\nu(t))dt - \int(\beta(v'_\nu(t)),\, v'(t))dt -$$

$$- \int(\beta(v'(t)),\, v'_\nu(t) - v'(t))dt\,.$$

Per la (18) questa espressione è infinitesima. Essendo β monotona in senso stretto e continua, ciò comporta la convergenza di $\beta(v'_\nu(x,t))$ verso $\beta(v'(x,t))$ in misura, nel cilindro $\Omega\times[0,T]$. Pertanto è $h(t) = \beta(v'(t))$.

Dunque, la (4), (o le equivalenti (5), (6)), ammette una soluzione. Dimostriamo che essa è unica (sempre nello spazio S_ϱ).

Siano dunque v_1, v_2 soluzioni della (6); posto $v_1 - v_2 = w$, si ha:

$$\int\{-(w'(t),\, \varphi'(t)) + ((w(t),\, \varphi(t))) +$$

$$+ (\beta(v'_1(t)) - \beta(v'_2(t)) - [\overline{\beta(v'_1)} - \overline{\beta(v'_2)}]\,,\ \varphi(t)\}\,dt = 0$$

per ogni φ tale che $\varphi\in L^\infty(T;\, \mathring{W}^{1,2})\cap L^{\varrho+1}(T;\, L^{\varrho+1})$, $\varphi'\in L^{\varrho+1}(T;\, L^{\varrho+1})\cap L^\infty(T;\, L^2)$.

Applicando il citato teorema di G. Torelli si ottiene:

$$\int(\beta(v'_1(t)) - \beta(v'_2(t)) - [\overline{\beta(v'_1)} - \overline{\beta(v'_2)}],\, v'_1(t) - v'_2(t))\,dt = 0$$

e da questa si ottiene, avendo v_1' e v_2' valor medio nullo,

$$\int (\beta(v_1'(t)) - \beta(v_2'(t)), v_1'(t) - v_2'(t))\, dt = 0\,.$$

Essendo β monotona in senso stretto, si ha $v_1'(t) = v_2'(t)$ e, infine, ricordando che $\bar{v}_1 = \bar{v}_2 = 0$, $v_1(t) = v_2(t)$.

Risolta la (4), passiamo ora alla (3) tenendo conto che tanto $\bar{f}$ quanto $\overline{\beta(v')}$ sono in $L^{(\varrho+1)/\varrho}$.

Avendo supposto il campo Ω sia di classe 2, da noti risultati (Agmon [1]) segue che la (3) possiede una ed una sola soluzione $\bar{u}$ in $\mathring{W}^{(\varrho+1)/\varrho}$. Il teorema 1 risulta dunque dimostrato.

OSSERVAZIONE. - *Il risultato ora citato, relativo alle equazioni di tipo elittico, permette di affermare che la soluzione u della* (3) *appartiene allo spazio $W^{2,(\varrho+1)/\varrho}$. Dunque la soluzione del nostro problema appartiene ad $S_\varrho \oplus (\mathring{W}^{1,(\varrho+1)/\varrho} \cap W^{2,(\varrho+1)/\varrho})$.*

3. - Nel caso di un aperto Ω limitato qualsiasi la risoluzione del problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson

$$-\Delta u = h \tag{19}$$

presenta qualche difficoltà se si prende $h \in L^p$ con $1 < p < 2$.

Il seguente esempio mostra che, già per un campo a frontiera lipschitziana, non si ha in generale unicità della soluzione nello spazio $\mathring{W}^{1,p}$.

Preso un numero α, con $1/2 < \alpha < 1$, si consideri, nel piano, il settore circolare Λ rappresentato in coordinate polari (ϱ, θ) dalle disuguaglianze: $0 < \varrho < 1$, $0 < \theta < \pi/\alpha$ e, in esso, la funzione armonica $u(\varrho, \theta) = (\varrho^\alpha - \varrho^{-\alpha})$ sen $\alpha\theta$.

Si verifica senza difficoltà che $u \in \mathring{W}^{1,p}(\Lambda)$ non appena è $p < \dfrac{2}{\alpha+1}$. Dunque, per ogni $p \in \,]1,4/3[$ si può trovare un campo piano con frontiera lipschitziana tale che in esso la soluzione del problema di Dirichlet per la (19) non sia unica.

Occorre dunque sostituire a $\mathring{W}^{1/p}$ uno spazio più ristretto in cui la soluzione del problema di Dirichlet per la (19), con

$h \in L^p (1 < p \leqslant 2)$ esista e sia unica, prescindendo da ogni ipotesi di regolarità su Ω Ciò è possibile in virtù del seguente

LEMMA. – *Sia Ω un aperto limitato qualunque di R^n. Si consideri in Ω l'operatore $-\Delta$ di $\overset{\circ}{W}{}^{1/p}$ in L^p $(1 < p \leqslant 2)$, definito dapprima nell'insieme delle $u \in \overset{\circ}{W}{}^{1/2}$ tali che $-\Delta u$ sia in L^2. Questo operatore ammette un prolungamento chiuso, il quale stabilisce un isomorfismo tra il suo dominio di definizione V_p e lo spazio L^p. Pertanto la* (19) *ha, per qualunque $h \in L^p$, una ed una sola soluzione in V_p.*

Indichiamo con p' l'esponente coniugato di p; si avrà dunque $p' \geqslant 2$. In base ad un risultato di G. Stampacchia ([7] *th.* 4.1) la restrizione dell'operatore di Green $G = (-\Delta)^{-1}$: $: W^{-1,2} \to \overset{\circ}{W}{}^{1,2}$ allo spazio $W^{-1,p'}$ definisce un operatore continuo tra $W^{-1,p'}$ e L^r, dove r è un numero $\geqslant 2$, che è arbitrario se è $p' \geqslant n$, minore o uguale dell'esponente di Sobolev relativo a p' se è $p' < n$ (In quest'ultimo caso è dunque $1/r \geqslant$ $\geqslant 1/p' - 1/n$). In entrambi i casi si può porre $r = p'$.

Pertanto, dall'applicazione continua $G : W^{-1,p'} \to L^{p'}$, si deduce, per dualità, un'applicazione continua $G^* : L^p \to \overset{\circ}{W}{}^{1,p}$. Ora, come si verifica facilmente, G^* coincide con G su L^2; inoltre G^* è iniettiva, essendo ottenuta per dualità da una applicazione con immagine densa. L'operatore $(G^*)^{-1}$ è chiuso, come inverso di un operatore continuo; il dominio di definizione, che indichiamo con V_p, coincide — ovviamente — con l'immagine dell'applicazione G^* in $\overset{\circ}{W}{}^{1,p}$. Esso è il minimo prolungamento chiuso di $-\Delta$, come si vede subito notando che L^2 è denso in L^p. Poichè G^* coincide con G in L^2, $u = Gh$ è, per ogni $h \in L^p$, soluzione dell'equazione (19) nel senso delle distribuzioni. Il lemma è così dimostrato.

Ritorniamo alla (1), nell'ipotesi che Ω sia un aperto limitato qualunque, cercando una soluzione nello spazio $S_\varrho \oplus V_{(\varrho+1)/\varrho}$. Si ottiene ancora la decomposizione nel sistema (3) e (4), dove ora le (3) è posta nello spazio $V_{(\varrho+1)/\varrho}$. Per il lemma, la (3) ha una ed una soluzione $\overline{u}$ in $V_{(\varrho+1)/\varrho}$. Tenendo presente che la soluzione della (4) è stata trovata senza alcuna ipotesi di regolarità su Ω, si ha il seguente

TEOREMA 2. – *Nel caso di un aperto limitato qualsiasi Ω, l'equazione* (1) *ha una ed una sola soluzione periodica* (*di periodo* T) *appartenente allo spazio* $S_\varrho \oplus V_{(\varrho+1)/\varrho}$.

BIBLIOGRAFIA

[1] AGMON S.: *The L_p approach to the Dirichlet problem.* Annali della Sc. Norm. Sup. di Pisa. Ser. III, vol. 13, (1959).

[2] ANDREASSI G. e TORELLI G.: *Su una equazione di tipo iperbolico non lineare.* (in corso di stampa sui Rendiconti del Seminario Mat. di Padova).

[3] LIONS J. L., STRAUSS W. A.: *Sur certains problèmes hyperboliques non linéaires.* C.R.A.S. Paris, vol. 257, 3267-3270, (1963).

[4] LIONS J. L. e STRAUSS W. A.: *Some non linear evolution equations.* (in corso di stampa).

[5] PRODI G.: *Soluzioni periodiche di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico non lineari.* Annali di Mat. Ser. IV, vol. 42, 25-49, (1956).

[6] PROUSE G.: *Soluzioni periodiche dell'equazione delle onde non omogenea con termine dissipativo quadratico.* (in corso di stampa su Ricerche di Mat.).

[7] STAMPACCHIA G.: *Equations elliptiques du second ordre à coéfficients discontinus.* Collège de France, (1964).

[8] TORELLI G.: *Un complemento ad un teorema di J. L. Lions sulle equazioni differenziali astratte del secondo ordine.* Rend. Sem. Mat. Univ. di Padova, vol. 24, 224-241, (1964).

Manoscritto pervenuto in redazione il 26 maggio 1965.