

RENDICONTI  
*del*  
SEMINARIO MATEMATICO  
*della*  
UNIVERSITÀ DI PADOVA

INGO WEIDIG

**Gruppen mit abgeschwächter Normalteilertransitivität**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*,  
tome 36, n° 1 (1966), p. 185-215

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1966\\_\\_36\\_1\\_185\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_185_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## GRUPPEN MIT ABGESCHWÄCHTER NORMALTEILERTRANSITIVITÄT

di INGO WEIDIG (*Frankfurt a. M.*) \*)

Eine Gruppe  $G$  heißt  $t$ -Gruppe, wenn in ihr die Normalteilerbeziehung transitiv ist, d. h. *jeder* Subnormalteiler von  $G$  (im Sinne von H. Wielandt) ist Normalteiler von  $G$ . Diese Gruppenklasse wurde im Endlichen von Gaschütz [2] und Zacher [1] und im Unendlichen von Robinson [1] untersucht. Bezeichnet man mit Robinson als  $\bar{t}$ -Gruppen Gruppen, deren sämtliche Untergruppen  $t$ -Gruppen sind, so hat Gaschütz [2, Satz 4] gezeigt, daß jede endliche, auflösbare  $t$ -Gruppe sogar eine  $\bar{t}$ -Gruppe ist.

Zacher [2] hat den Begriff der  $t$ -Gruppen dadurch verallgemeinert, daß er Gruppen untersucht, in denen die Quasinormalteilerbeziehung transitiv ist, d. h. *jeder* Quasinormalteiler eines Quasinormalteilers der Gruppe  $G$  ist selbst quasinormal in  $G$ .

Hier soll eine andere Verallgemeinerung des Begriffs  $t$ -Gruppe untersucht werden:

Die Gruppe  $G$  heiße  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, wenn sie der folgenden Bedingung genügt:

( $\mathfrak{X}$ ) *Alle Normalteiler einer jeden Ableitung  $G^{(i)}$  der Gruppe  $G$  sind Normalteiler von  $G$ .*

Angeregt wurde diese Definition durch eine Untersuchung von Ph. Hall [2], in der  $\mathfrak{X}$ -Gruppen gebraucht werden.

---

\*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt (Main), 6 Frankfurt, Robert-Mayer-Strasse 6-8 (Germania).

Natürlich ist nicht jede  $\mathfrak{X}$ -Gruppe eine  $t$ -Gruppe, wie die Beispiele 1, 3, 4 und 5 zeigen.

Auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppen, wie übrigens auch auflösbare  $t$ -Gruppen, sind überauflösbar (Für  $\mathfrak{X}$ -Gruppen: Lemma 1.1, für  $t$ -Gruppen: Robinson [1, Theorem 2.3.1]).

Endliche, nilpotente  $\mathfrak{X}$ -Gruppen sind metabelsch (Satz 2.1). Ist  $\mathfrak{F}G$  die Fittingsche Untergruppe von  $G$  und  $G$  eine endliche, auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, so ist  $G/\mathfrak{F}G$  das direkte Produkt von zyklischen Gruppen  $A(p)$  mit  $A(p)^{p-1} = 1$ , wobei  $p$  die Primteiler der Ordnung der Kommutatorgruppe  $G'$  durchläuft (Satz 3.1).

Eine endliche, auflösbare Gruppe  $G$  ist genau dann eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, wenn *a*) die Kommutatorgruppe  $G'$  nilpotent ist, *b*) die Kommutatorgruppe  $H'$  gleich dem Zentrum  $\mathfrak{Z}H$  von  $H$  für jedes nicht-abelsche epimorphe Bild  $H$  einer jeden Sylowgruppe von  $G'$  ist und *c*) die Elemente aus  $G$  in  $G'/G''$  Potenzautomorphismen induzieren, d. h. für alle  $g$  aus  $G$  gibt es eine nur von  $g$  abhängige Zahl  $i = i(g)$  mit  $x^g \equiv x^i \pmod{G''}$  für alle  $x$  aus  $G'$  (Satz 3.4).

Es ist klar, daß epimorphe Bilder von  $\mathfrak{X}$ -Gruppen wieder  $\mathfrak{X}$ -Gruppen sind, aber Untergruppen von  $\mathfrak{X}$ -Gruppen sind im allgemeinen keine  $\mathfrak{X}$ -Gruppen (Beispiel 3).

Ist die endliche  $\mathfrak{X}$ -Gruppe jedoch metabelsch, so sind auch alle Untergruppen  $\mathfrak{X}$ -Gruppen (Satz 1.4).

Eine Gruppe heiße  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe, wenn jede Untergruppe eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, d. h. jeder Normalteiler der Kommutatorgruppe einer Untergruppe ist Normalteiler der Untergruppe.

Endliche  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppen sind stets überauflösbar (Lemma 1.1), sie sind die Erweiterung einer  $\mathfrak{F}G$  umfassendem metabelschen Gruppe durch eine elementar abelsche 2-Gruppe beschränkter Ordnung (Satz 4.2). Die endlichen  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppen werden im Satz 4.4 charakterisiert. Dabei zeigt es sich u. a., daß die Sylowgruppen der Kommutatorgruppe  $G'$  abelsch sind oder die Ordnung  $p^3$  und den Exponenten  $p$  haben.

Alle betrachteten Gruppen sind endlich.

**Bezeichnungen.**

$\{a, b, \dots\}$  Erzeugnis von  $a, b, \dots$

$$x \circ g = x^{-1}g^{-1}xg = x^{-1}x^g$$

$A \circ B$  Erzeugnis aller  $a \circ b$  mit  $a$  aus  $A$  und  $b$  aus  $B$ .

Die  $i$ -te Ableitung  $G^{(i)}$  der Gruppe  $G$  sei definiert durch:

$$G^{(0)} = G, \quad G^{(i+1)} = G^{(i)} \circ G^{(i)},$$

die absteigende Zentralreihe  ${}_iG$  durch:

$${}_1G = G, \quad {}_{i+1}G = {}_iG \circ G.$$

$\mathfrak{F}G$  sei die Fittingsche Untergruppe von  $G$  (Produkt der nilpotenten Normalteiler).

$\Phi G$  die Frattiniuntergruppe von  $G$  (Durchschnitt der maximalen Untergruppen von  $G$ ).

$\mathfrak{Z}G$  das Zentrum von  $G$ .

$\mathfrak{N}U$  der Normalisator der Untergruppe  $U$ .

$\mathfrak{C}x$  der Zentralisator von  $x$ .

$G^p$  die Menge der  $p$ -ten Potenzen von  $G$ .

$G_p$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G$ .

$G'_p$  eine  $p$ -Sylowgruppe von  $G'$ .

$G_\pi$  Produkt der  $G_p$  mit  $p$  aus  $\pi$ .

$o(G)$  die Nilpotenzklasse von  $G$ .

$o(g)$  bzw.  $o(g)$  die Ordnung der Gruppe  $G$  bzw. des Gruppenelements  $g$ .

$(n, m)$  der größte gemeinsame Teiler von  $n$  und  $m$ .

$n/m$  besage  $n$  teilt  $m$ .

Ist  $\pi$  eine Primzahlmenge, so sei  $\pi'$  die Menge aller Primzahlen, die nicht in  $\pi$  liegen.

### I. Vorbemerkungen.

Eine Gruppe  $G$  heiße  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, wenn  $G$  erfüllt:

( $\mathfrak{X}$ ) Alle Normalteiler einer jeden  $i$ -ten Kommutatorgruppe  $G^{(i)}$  der Gruppe  $G$  sind Normalteiler von  $G$ .

Eine Gruppe  $G$  heiße  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe, wenn jede Untergruppe  $U$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, bzw.

Jeder Normalteiler von  $U'$  ist Normalteiler von  $U$ .

erfüllt. Diese Bedingung ist quivalent mit:

$$\text{Aus } \mathfrak{N}V \supseteq U' \supseteq V \text{ folgt } \mathfrak{N}V \supseteq U.$$

und auch quivalent mit:

$$\{x^{v'}\} = \{x^v\} \quad \text{für alle } x \text{ aus } U'.$$

Denn eine Untergruppe  $V$  von  $W$  ist genau dann ein Normalteiler von  $W$ , wenn  $W$  in  $\mathfrak{N}V$  liegt; bzw. jeder Normalteiler  $V$  von  $W$  ist das Produkt von  $\{x^w\}$ , wobei  $x$  die Elemente von  $V$  durchläuft.

LEMMA 1.1.: Ist  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe oder eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe, so ist  $G$  berauflsbar und die Kommutatorgruppe von  $G$  ist nilpotent der Klasse höchstens zwei.

ANMERKUNG: In Fall einer auflösbaren  $\mathfrak{X}$ -Gruppe wird im Beweis die Endlichkeit von  $G$  nicht benutzt.

Beweis. Sei  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe. Sei  $x$  ein beliebiges Element aus  $G^{(i-1)} - G^{(i)}$  und  $U = \{G^{(i)}, x\}$ . Da  $U$  die Kommutatorgruppe  $G^{(i)}$  von  $G^{(i-1)}$  enthält, ist  $U$  ein Normalteiler von  $G^{(i-1)}$ . Wegen ( $\mathfrak{X}$ ) ist dann  $U$  normal in  $G$ , insbesondere  $U/G^{(i)}$  normal in  $G/G^{(i)}$ . Hieraus folgt bereits die berauflsbarkeit von  $G$ .

Die nun von  $G$  in  $U/G^{(i)}$  induzierte Automorphismengruppe ist, da  $U/G^{(i)}$  zyklisch ist, abelsch; folglich muß  $U/G^{(i)}$  im Zentrum von  $G'/G^{(i)}$  liegen. Dieses gilt für alle  $x$  aus  $G^{(i-1)} - G^{(i)}$ , also muß auch  $G^{(i)-1}/G^{(i)}$  im Zentrum von  $G'/G^{(i)}$  liegen. Das be-

deutet aber, daß die  $G^{(i)}$  eine Zentralreihe von  $G'$  bilden und somit  $G^{(i)} \supseteq {}_i(G')$  erfüllen.

Andererseits gilt  $G^{(i)} \subseteq {}_i(G')$ , woraus

$$(*) \quad G^{(i)} = {}_i(G')$$

folgt. Mit Hilfe von  ${}_iK \circ {}_iK \subseteq {}_{2i}K$  (siehe z. B. M. Hall [1, Cor. 10.3.5]) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} G^{(i+1)} &= G^{(i)} \circ G^{(i)} = {}_i(G') \circ {}_i(G') \subseteq {}_{2i}(G') = \\ &= G^{(2i)} \subseteq G^{(i+1)} \end{aligned}$$

für alle  $i \geq 1$ , das heißt  $G^{(i+1)} = G^{(2i)}$ . Für  $i = 2$  folgt daraus  $G^{(3)} = G^{(4)}$ . Da  $G$  auflösbar ist, muß dann  $G^{(3)} = 1$  sein. Wegen (\*) ist  ${}_3(G') = 1$ , das heißt  $G'$  ist nilpotent der Klasse (höchstens) zwei. Auf Grund von (X) sind alle Normalteiler von  $G'$  auch Normalteiler von  $G$ , aus der Nilpotenz von  $G'$  folgt somit die überauflösbarkeit von  $G$ .

Sei  $G$  eine  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe: Sei  $G$  ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung zum Lemma 1.1. Da nach Definition Untergruppen von  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppen wieder  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppen sind, gilt für alle echten Untergruppen Lemma 1.1, sie sind also überauflösbar. Nach Huppert [1, Satz 22] folgt daraus die Auflösbarkeit der Gruppe  $G$ . Dann erfüllt aber auf Grund des schon bewiesenen ersten Teiles des Satzes  $G$  doch Lemma 1.1, also ist  $G$  kein Gegenbeispiel, womit auch in diesem Fall Lemma 1.1 bewiesen ist.

**FOLGERUNG 1.2:** *Eine Gruppe  $G$  ist genau dann eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, wenn gilt:*

- (1) *Jeder Normalteiler von  $G'$  ist normal in  $G$ , und*
- (2)  *$G'$  ist nilpotent der Klasse (höchstens) zwei.*

**Beweis.** Aus der Nilpotenz von  $G'$  folgt die Auflösbarkeit von  $G$ . Wegen  $e(G') \leq 2$ , das heißt  $G'' \subseteq \mathfrak{B}G'$ , ist jeder Normalteiler von  $G''$  normal in  $G'$  und nach Voraussetzung normal in  $G$ , also ist  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe. Die Umkehrung folgt aus Lemma 1.1.

**LEMMA 1.3.:** *Ist  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, so gilt:*

(a) Für jedes Element  $g$  aus  $G$  gibt es eine nur von  $g$  abhängige Zahl  $i = i(g)$  mit

$$x^g \equiv x^i \pmod{G''} \quad \text{für alle } x \text{ aus } G'.$$

Aus (a) und  $c(G') \leq 2$  folgt:

(b)  $z^g = z^{i^2}$  für alle  $z$  aus  $G''$ .

ANMERKUNG: Nach Lemma 1.1 erfüllen auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppen  $c(G') \leq 2$ , also gilt (b) in jeder auflösbaren  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$ .

Aus (a) folgt, daß alle Untergruppen von  $G'/G''$  Normalteiler von  $G/G''$  sind. Unter welchen zusätzlichen Bedingungen sogar folgt, daß  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ - (bzw.  $\overline{\mathfrak{X}}$ -)Gruppe ist, zeigen Satz 3.4 (bzw. Satz 4.4).

Beweis von Lemma 1.3, (a): Modulo  $G''$  sind alle zyklischen Untergruppen  $\{x\}$  von  $G'$  Normalteiler von  $G'$ , wegen ( $\mathfrak{X}$ ) also Normalteiler von  $G$ , das heißt  $x^g$  liegt in  $\{x\}G''$  für alle  $x$  aus  $G'$  und alle  $g$  aus  $G$ . Dann induzieren aber die Elemente aus  $G$  Potenzautomorphismen in  $G'/G''$  (Baer [1], siehe auch Fuchs [1, p. 230; 31]). Damit ist (a) gezeigt.

Beweis von Lemma 1.3, (b): Wegen  $c(G') \leq 2$ , das heißt  $G'' \subseteq \mathfrak{B}G'$ , ist jedes Element aus  $G''$  Produkt von Kommutatoren  $x \circ y$  mit  $x$  und  $y$  aus  $G'$ . Also braucht (b) nur für jedes  $x \circ y$  gezeigt zu werden. Aus (a) folgt  $x^g = x^i h$  und  $y^g = y^i k$  mit  $h$  und  $k$  aus  $G''$ . Daraus folgt wegen  $a \circ bc = (a \circ c)(a \circ b)^c$  und  $ab \circ c = (a \circ c)^b(b \circ c)$  (vergl. etwa M. Hall [1, p. 150]) und  $G'' \subseteq \mathfrak{B}G'$ :

$$(x \circ y)^g = x^g \circ y^g = x^i h \circ y^i k = x^i \circ y^i = (x \circ y)^{i^2},$$

womit (b) nachgewiesen ist.

SATZ 1.4.: Für metabelsche Gruppen  $G$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (1)  $G$  ist eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe
- (2)  $G$  ist eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe
- (3) Jeder Normalteiler von  $G'$  ist normal in  $G$
- (4) Die Elemente aus  $G$  induzieren Potenzautomorphismen in  $G'$ .

Beweis.

Aus (1) folgt (2), da (2) eine schwächere Aussage ist.

(3) ist mit (2) äquivalent, da  $G$  metabelsch ist.

Aus (2) folgt (4) nach Lemma 1.3.

Aus (4) folgt (1): Wegen (4) und  $G'' = 1$  ist jede zyklische Untergruppe von  $G'$  und somit jede Untergruppe von  $G'$  Normalteiler von  $G$ , also wird  $(\mathfrak{X})$  von  $G$  erfüllt. Da die Kommutatorgruppe einer jeden Untergruppe stets Untergruppe von  $G'$  ist, erfüllen auch alle Untergruppen  $(\mathfrak{X})$ . Folglich ist  $G$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe.

Nach Satz 1.4 ist jede metabelsche Gruppe, die (4) erfüllt, eine sowie- $\mathfrak{X}$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe. Nach Gaschütz [2] erfüllen die auflösbaren  $t$ -Gruppen ebenfalls (4) und sind metabelsch, müssen aber noch zusätzlichen Bedingungen genügen. Ist so zum Beispiel  $G/L$  die maximale nilpotente Faktorgruppe einer  $t$ -Gruppe, so muß  $G/L$  dedekindsch sein, was bei  $\mathfrak{X}$ -Gruppen nicht der Fall zu sein braucht:

BEISPIEL 1: Sei  $G$  eine nilpotente Gruppe mit einem zyklischen Normalteiler von Primzahlindex. Da  $N$  Primzahlindex hat, also  $o(G/N) = p$  und  $G/N$  abelsch ist, enthält  $N$  die Kommutatorgruppe  $G'$ . Mit  $N$  ist auch  $G'$  zyklisch und somit jede Untergruppe von  $G'$  charakteristisch in  $G'$  und also auch normal in  $G$ , das heißt  $G$  ist eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, bzw. eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe nach Satz 1.4. Nur als abelsche Gruppe oder direktes Produkt einer zyklischen Gruppe ungerader Ordnung mit einer Quaternionengruppe ist hier  $G$  dedekindsch und damit eine  $t$ -Gruppe.

Sei speziell  $G$  eine Diedergruppe, das heißt  $G = \{a, b\}$  mit  $a^p = a^{-1}$  und  $b^2 = 1$ . In diesem Fall ist  $\mathfrak{N}\{b\} = \{b\} \mathfrak{Z}G$ , also so « klein » wie überhaupt nur möglich, andererseits ist  $\{b\}$  subnormal in  $G$ . Trotz der zu «  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe » äquivalenten Bedingung, daß

aus  $\mathfrak{N}V \supseteq U'$  folgt  $\mathfrak{N}V \supseteq U$  für alle  $U \subseteq G$

und alle  $V \subseteq U'$ ,

sind also die Normalisatoren von Subnormalteilern in  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppen nicht unbedingt « groß ». Aber aus Satz 4.4 (siehe unten), folgt, daß alle Subnormalteiler der Kommutatorgruppe  $G'$  einer  $\overline{\mathfrak{X}}$ -

Gruppe  $G$ , bis auf einen Ausnahmefall, sogar Normalteiler von  $G$  sind.

## II. Nilpotente $\mathfrak{L}$ -Gruppen.

**SATZ 2.1.:** *Für nilpotente Gruppen  $G$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- (1)  $G$  ist eine  $\overline{\mathfrak{L}}$ -Gruppe
- (2)  $G$  ist eine  $\mathfrak{L}$ -Gruppe
- (3) Jeder Normalteiler von  $G'$  ist normal in  $G$
- (4)  $G$  ist metabelsch und die Elemente aus  $G$  induzieren Potenzautomorphismen in  $G'$ .

Beweis. Wegen Satz 1.4 ist nur zu zeigen:

*Ist jeder Normalteiler von  $G'$  der nilpotenten Gruppe  $G$  normal in  $G$ , so ist  $G'' = 1$ .*

Wäre dies falsch, so gäbe es ein Gegenbeispiel  $G$  kleinster Ordnung. Da sich die Voraussetzung dieser Behauptung auf epimorphe Bilder überträgt, ist, wenn  $N \neq 1$  ein Normalteiler von  $G$  ist,  $G/N$  kein Gegenbeispiel, das heißt  $NG''/N = (G/N)'' = 1$ . Also gilt:

- (1) Jeder Normalteiler  $N \neq 1$  von  $G$  enthält  $G''$ .

Wegen der Nilpotenz von  $G$  ist jede Sylowgruppe Normalteiler von  $G$ , enthält also  $G''$  nach (1). Wäre  $G$  keine  $p$ -Gruppe, so läge  $G''$  im Durchschnitt von zwei verschiedenen Sylowgruppen von  $G$  und wäre somit 1. Also ist

- (2)  $G$  eine  $p$ -Gruppe.

Wegen der Nilpotenz von  $G$  und  $G'' \neq 1$  ist der Durchschnitt des Normalteilers  $G''$  mit dem Zentrum von  $G$  nicht leer. Sei  $Z \neq 1$  eine zyklische Gruppe aus diesem Durchschnitt. Wegen  $Z \subseteq \mathfrak{B}G$  ist  $Z$  normal in  $G$ , nach (1) liegt also  $G''$  in  $Z$ , also ist **speziell**

(3)  $G''$  zyklisch und  $G'' \subseteq \mathfrak{Z}G$ .

Nach Burnside [2, p. 241] ist im Fall  $G'' \neq 1$  das Zentrum der Kommutatorgruppe einer  $p$ -Gruppe nicht zyklisch, also gibt es wegen (3) eine Untergruppe  $Y \neq 1$  aus  $\mathfrak{Z}G'$  mit  $Y \cap G'' = 1$ . Wegen  $Y \subseteq \mathfrak{Z}G'$  ist  $Y$  normal in  $G'$  und somit nach Voraussetzung normal in  $G$ . Nach (1) liegt dann aber  $G''$  in  $Y$ . Auf Grund dieses Widerspruchs ist  $G$  kein Gegenbeispiel und somit Satz 2.1 bewiesen.

Zum Beweis des nächsten Lemmas sind einige Hilfssätze erforderlich, die aber — im Hinblick auf spätere Anwendungen — wesentlich allgemeiner und schärfer als für das Lemma nötig bewiesen werden.

**HILFSSATZ 2.2.:** *Ist  $P$  ein Normalteiler von  $p$ -Potenzordnung und  $g$  ein  $p'$ -Element der Gruppe  $G$  mit  $x^g \equiv x^i \pmod{P}$ ,  $i$  unabhängig von  $x$  und  $i \equiv 1 \pmod{p}$ , für alle  $x$  aus  $P$ , so ist  $P \circ g = 1$ .*

**Beweis.** Wegen  $P'P^p = \Phi P$  (z. B. M. Hall [1, p. 177]) und  $i \equiv 1 \pmod{p}$  ist  $x^g \equiv x \pmod{\Phi P}$  für alle  $x$  aus  $P$ , das heißt der von  $g$  in  $P/\Phi P$  induzierte Automorphismus läßt  $P/\Phi P$  elementweise fest. Da aber  $g$  ein  $p'$ -Element ist, kann  $g$  nach M. Hall [1, Th. 12.2.2] nur als der identische Automorphismus auf  $P$  operieren, womit  $x^g = x$  bzw.  $x \circ g = 1$  für alle  $x$  aus  $P$  gezeigt ist.

**HILFSSATZ 2.3.:** *Ist  $G$  eine überauflösbare Gruppe,  $\pi$  die Menge der Primteiler von  $o(G')$ , sowie  $g$  ein  $\pi'$ -Element von  $G$  mit  $x^g \equiv x^i \pmod{G'}$ ,  $i$  unabhängig von  $x$ , für alle  $x$  aus  $G'$  und  $i \equiv 1 \pmod{p}$  für alle  $p$  aus  $\pi$ ; dann liegt  $g$  in  $\mathfrak{F}G$ .*

**Beweis.** Wendet man Hilfssatz 2.2. auf  $g$  und  $G'_p$  an, erhält man  $G'_p \circ g = 1$ . Dieses gilt für alle  $p$  aus  $\pi$ , also ist  $G' \circ g = 1$ . Dann ist mit  $G'$  auch  $N = \{G', g\}$  nilpotent und wegen  $N \supseteq G'$  ein Normalteiler von  $G$ . Also liegt  $N$  und somit  $g$  in  $\mathfrak{F}G$ .

**HILFSSATZ 2.4.:** *Ist die Kommutatorgruppe  $G'$  der Gruppe  $G$  nilpotent, so ist  $G/\mathfrak{F}G$  isomorph zu einem epimorphen Bild einer Untergruppe des direkten Produktes*

$$\prod_{p|o(G')} (G/G'_p)/\mathfrak{F}(G/G'_p).$$

**Beweis.** Seien  $p_1, \dots, p_n$  die Primteiler von  $G'$ . Sei

$H_i = G/G'_{\mathfrak{p}_i}$ , für  $i = 1, \dots, n$  und  $H = \prod_i H_i$ . Wegen  $(A \otimes B)/C = (AC/C) \otimes (BC/C)$  und  $\mathfrak{F}(A \otimes B) = \mathfrak{F}(A) \otimes \mathfrak{F}(B)$  gilt

$$\begin{aligned} H/\mathfrak{F}H &= (\prod_i H_i)/\mathfrak{F}H = \prod_i (H_i/\mathfrak{F}H/\mathfrak{F}H) = \\ &= \prod_i (H_i \prod_j \mathfrak{F}H_j / \prod_j \mathfrak{F}H_j) \simeq \prod_i (H_i/\mathfrak{F}H_i), \end{aligned}$$

also

$$(*) \quad H/\mathfrak{F}H \simeq \prod_i (G/G'_{\mathfrak{p}_i})/\mathfrak{F}(G/G'_{\mathfrak{p}_i}).$$

In  $H = \prod_i H_i = \prod_i G/G'_{\mathfrak{p}_i}$ , gibt es eine zu  $G/\bigcap_i G'_{\mathfrak{p}_i} = G$  isomorphe Untergruppe  $N$ . Dabei ist  $\mathfrak{F}H \cap N$  normal in  $N$ , also  $\mathfrak{F}H \cap N \subseteq \mathfrak{F}N$ . Folglich ist

$$G/\mathfrak{F}G \simeq N/\mathfrak{F}N \simeq (N/\mathfrak{F}H \cap N)/(\mathfrak{F}N/\mathfrak{F}H \cap N)$$

ein epimorphes Bild von  $N/\mathfrak{F}H \cap N \simeq N\mathfrak{F}H/\mathfrak{F}H$ , einer Untergruppe von  $H/\mathfrak{F}H$ . Also ist  $G/\mathfrak{F}G$  nach (\*) isomorph zu einem epimorphen Bild einer Untergruppe von  $\prod_i (G/G'_{\mathfrak{p}_i})/\mathfrak{F}(G/G'_{\mathfrak{p}_i})$ , womit Hilfssatz 2.4 bewiesen ist.

Aus diesen Hilfssätzen ergibt sich u. a. eine Charakterisierung der nilpotenten unter den auflösbaren  $\mathfrak{F}$ -Gruppen:

LEMMA 2.5.: *Für auflösbare  $\mathfrak{F}$ -Gruppen  $G$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:*

- (1)  $G$  ist nilpotent
- (2)  $x^g \equiv x^i \pmod{G'}$  für alle  $x$  aus  $G'$  und alle  $g$  aus  $G$  mit  $i \equiv 1 \pmod{p}$  für alle Primteiler  $p$  von  $o(G')$
- (3) Für alle Sylowgruppen  $G'_p$  von  $G'$  gilt:  
Für alle  $x$  aus  $G'_p$  und alle  $p'$ -Elemente  $g$  aus  $G$  ist  $x^g \equiv x^i \pmod{G''}$  mit  $i \equiv 1 \pmod{p}$ .

Beweis.

Aus (1) folgt (2):

Für  $x$  und  $g$  mit teilerfremder Ordnung folgt (2) sofort aus der Nilpotenz von  $G$ . Seien also  $x$  und  $g$   $p$ -Elemente mit  $x$  aus  $G'$ . Nach Lemma 1.3 induziert  $g$  einen Automorphismus auf

$\{x\}$ . Da die einzigen  $p$ -Automorphismen einer zyklischen  $p$ -Gruppe Potenzierungen mit  $i$  sind, wobei  $i \equiv 1 \pmod p$  ist, erfüllen also auch  $x$  und  $g$  die Bedingung (2), womit (2) für alle  $g$  aus  $G$  und  $x$  aus  $G'$  gezeigt ist.

Aus (2) folgt (3), da (3) eine schwächere Aussage ist.

Aus (3) folgt (1):

Sei  $H(p) = G/G'_p$ . Dann ist  $H(p)'$  eine  $p$ -Gruppe und somit  $H(p)_p$  ein nilpotenter Normalteiler von  $H(p)$ , also liegt  $H(p)_p$  in  $\mathfrak{F}H(p)$ . Sei  $h$  aus  $H(p)$  mit zu  $p$  teilerfremder Ordnung. Da sich (3) von  $G$  auf  $H(p)$  überträgt, folgt aus Hilfssatz 2.3, daß  $h$  in  $\mathfrak{F}H(p)$  liegt. Da  $h$  beliebig gewählt war, liegen alle  $p'$ -Elemente in  $\mathfrak{F}H(p)$ ; wegen  $H(p)_p \subseteq \mathfrak{F}H(p)$  ist somit  $H(p) = \mathfrak{F}H(p)$ , bzw.  $H(p)/\mathfrak{F}H(p) = 1$ , das heißt  $G/G'_p/\mathfrak{F}(G/G'_p) = 1$ . Dieses gilt für alle  $p$ , die  $o(G')$  teilen.

Da  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{F}$ -Gruppe ist, muß  $G'$  nach Lemma 1.1 nilpotent sein. Damit folgt aus Hilfssatz 2.4, daß  $G/\mathfrak{F}G = 1$ , also  $G = \mathfrak{F}G$  und somit  $G$  nilpotent ist.

**FOLGERUNG 2.6.:** *Ist  $G$  eine primäre  $\mathfrak{F}$ -Gruppe, so liegt  ${}_sG$  in  $G^p$ .*

**Beweis.** Folgerung 2.6 ist damit äquivalent, daß  $p$ -Gruppen mit  $G^p = 1$  die Bedingung  ${}_sG = 1$ , das heißt  $G' \subseteq \mathfrak{F}G$ , erfüllen. Das folgt aber aus Satz 2.1 und Lemma 2.5 (2).

### III. $\mathfrak{F}$ -Gruppen

**SATZ 3.1.:** *Ist  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{F}$ -Gruppe, so ist*

$$G/\mathfrak{F}G = \prod_{p|o(G')} A(p)$$

*mit zyklischen Gruppen  $A(p)$ , die  $A(p)^{p-1} = 1$  erfüllen.*

**Beweis.** Nach Lemma 1.1 ist  $G'$  nilpotent. Ist  $G/G'_p/\mathfrak{F}(G/G'_p)$  zyklisch vom Exponenten  $p - 1$  für alle  $o(G')$  teilenden Primzahlen  $p$ , so folgt Satz 3.1 aus Hilfssatz 2.4, da epimorphe Bilder von Untergruppen einer Gruppe, die das direkte Produkt von

zyklischen Gruppen von bestimmten Exponenten ist, ebenfalls das direkte Produkt von zyklischen Gruppen mit den gleichen Exponenten sind.

Also braucht man Satz 3.1 nur für  $G/G_p'$ , zeigen, bzw.: Ist  $G$  eine  $\mathfrak{L}$ -Gruppe,  $G'$  eine  $p$ -Gruppe, so ist  $G/\mathfrak{F}G$  zyklisch mit  $(G/\mathfrak{F}G)^{p-1} = 1$ .

Sei  $G$  ein Gegenbeispiel kleinster Ordnung zum ersten Teil dieser Behauptung, also

$$(1) \quad G/\mathfrak{F}G \text{ ist nicht zyklisch,}$$

aber für alle echten epimorphen Bilder  $H$  von  $G$  ist  $H/\mathfrak{F}H$  zyklisch.

Angenommen:  $\Phi G \neq 1$ . Dann ist wegen  $\mathfrak{F}(G/\Phi G) = \mathfrak{F}G/\Phi G$  (vergl. Gaschütz [1, Satz 10])

$$G/\mathfrak{F}G \simeq (G/\Phi G)/\mathfrak{F}G/\Phi G = (G/\Phi G)/\mathfrak{F}(G/\Phi G)$$

zyklisch, im Widerspruch zu (1). Folglich ist

$$(2) \quad \Phi G = 1$$

und somit  $\mathfrak{F}G = \mathfrak{F}G/\Phi G$  elementar abelsch (Baer [2, § 3, Th. 1]). Daraus folgt einerseits, da  $G'$  in  $\mathfrak{F}G$  liegt,

$$(3) \quad G' \text{ ist eine elementar abelsche } p\text{-Gruppe,}$$

andererseits gibt es nach Gaschütz [1, Satz 7] eine Untergruppe  $U$  von  $G$  mit

$$(4) \quad G = U\mathfrak{F}G \text{ und } U \cap \mathfrak{F}G = 1.$$

Aus  $G' \subseteq \mathfrak{F}G$  folgt:

$$(5) \quad U \text{ ist abelsch.}$$

Angenommen, es gibt zwei verschiedene zyklische Untergruppen  $\{a\}$  und  $\{b\}$  der Primzahlordnung  $q$  in  $U$ . Dabei ist  $q \neq p$ , da  $G_p \supseteq G'$  und somit  $G_p$  als nilpotenter Normalteiler in  $\mathfrak{F}G$  liegt. Für jedes  $x$  aus  $G'$  ist dann  $x^a = x^i$  und  $x^b = x^j$  nach (3) und Lemma 1.3. Wegen (3) gilt dann außerdem  $x^p = 1$ . Falls  $i$  oder  $j \equiv 1 \pmod p$  ist, sei die Bezeichnung von  $a$  und  $b$  so gewählt, daß  $i \equiv 1 \pmod p$  ist. Da die Automorphismengruppe einer zyklischen Gruppe von Primzahlordnung zyklisch ist und  $a$  und  $b$  Automorphismen gleicher Primzahlordnung von  $\{x\}$  sind, exi-

stiert unabhängig von  $x$  eine natürliche Zahl  $k = k(i, j)$  mit  $(x^i)^{b^k} = x^n$  und  $n \equiv 1 \pmod p$ . Damit ist  $x^{ab^k} = x^n = x^{1+r^p}$  für alle  $x$  aus  $G'$ . Nach Hilfssatz 2.3 liegt dann aber  $ab^k$  in  $\mathfrak{F}G$ , was jedoch (4) widerspricht. Folglich gibt es in  $U$  zu jeder Primzahl  $q$ , die  $o(U)$  teilt, nur eine zyklische Untergruppe der Ordnung  $q$ . Da nach (5) aber  $U$  abelsch ist, müssen nach (z. B.) Fuchs [1, p. 53; 18(c)] alle Sylowgruppen von  $U$  und somit  $U$  selbst zyklisch sein.

Mit diesem Widerspruch zu (1) ist bewiesen, daß  $G/\mathfrak{F}G$  zyklisch ist.

Da  $G_p$  wegen  $G_p \supseteq G'$  normal ist, gibt es ein  $p'$ -Element  $g$  von  $G$  mit  $\{g\mathfrak{F}G\} = G/\mathfrak{F}G$ . Nach Lemma 1.3 ist  $x^p \equiv x^i \pmod{G''}$  für alle  $x$  aus  $G'$ . Daraus folgt  $x^{p^{p-1}} \equiv x^{i^{p-1}} \pmod{G''}$ . Ein Satz von Fermat besagt:  $i^{p-1} \equiv 1 \pmod p$ . Auf Grund von Hilfssatz 2.3 liegt dann  $g^{p-1}$  in  $\mathfrak{F}G$ , womit  $(G/\mathfrak{F}G)^{p-1} = 1$  gezeigt ist.

LEMMA 3.2.: Ist  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe und  $p$  eine  $o(G'')$  teilende Primzahl, so gilt:

- (a) Jeder Normalteiler von  $G'_p$  liegt in  $G''_p$  oder enthält  $G''_p$
- (b)  $G'_p/\mathfrak{C}x \simeq G''_p$  für alle  $x$  aus  $G'_p$ , die nicht in  $G''_p$  liegen
- (c)  $p \neq 2$
- (d)  $(G'_p)^p = 1$
- (e)  $G''_p \subseteq \mathfrak{Z}(G_p)$
- (f)  $\mathfrak{Z}(G'_p) = G''_p = (G'_p)' = (G_p)'$ .

Beweis. Wegen der Nilpotenz von  $G'$  (Lemma 1.1) ist  $(G/G'_p)' = G'/G'_p \simeq G''_p$ , es kann also angenommen werden, daß

- (1)  $G'$  eine  $p$ -Gruppe

ist, sowie

- (2)  $G'' \neq 1$ ,

sonst wäre Lemma 3.2 sowieso erfüllt. Wegen Satz 2.1 ist damit

- (3)  $G$  nicht nilpotent.

Speziell ist  $G$  keine  $p$ -Gruppe, es gibt also  $p'$ -Elemente  $\neq 1$  in  $G$ . Aus (3), Lemma 1.3 und Hilfssatz 2.3 folgt:

(4) Es gibt ein  $p'$ -Element  $g$  aus  $G$  mit

$$x^g \equiv x^i \pmod{G''} \quad \text{und} \quad i \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

Angenommen, es gibt einen Normalteiler  $N$  von  $G'$  mit  $N \neq N \cap G'' \neq G''$ . Dann existiert ein Element  $x$  aus  $N - (N \cap G'')$ , sowie ein Element  $y$  aus  $G' - (N \cap G'')$ . Sei  $K = \{xy, N \cap G''\}$  und  $h$  ein beliebiges Element aus  $G'$ . Nach Lemma 1.1 ist  $G'' \subseteq \mathfrak{Z}G'$  und somit  $y^h = y$ . Da  $N$  normal in  $G'$  ist, liegt  $x \circ h$  in  $N \cap G''$ , folglich gehört  $(xy)^h = x^h y^h = x(x \circ h)y = xy(x \circ h)$  der Restklasse  $xy(N \cap G'')$  an. Wegen  $N \cap G'' \subseteq G'' \subseteq \mathfrak{Z}G'$  ist demnach  $K$  normal in  $G'$  und; da  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, normal in  $G$ .

Sei  $g$  nach (4) gewählt. Dann ist  $x^g \equiv x^i \pmod{G''}$  und  $y^g = y^{i^2}$  (nach Lemma 1.3).  $N$  ist normal in  $G'$  und somit, wegen ( $\mathfrak{X}$ ), normal in  $G$ , daher gilt sogar  $x^g \equiv x^i \pmod{N \cap G''}$ , woraus  $(xy)^g \equiv x^g y^g \equiv x^i y^{i^2} \pmod{N \cap G''}$  folgt. Da  $K$  normal in  $G$  ist, muß auch  $K/N \cap G''$  in  $G/N \cap G''$  normal sein und somit

$$(xy)^g(N \cap G'') = x^i y^{i^2}(N \cap G'')$$

in

$$\{xy(N \cap G'')\} = K/N \cap G''$$

liegen. Nach (1) ist  $G'$  eine  $p$ -Gruppe, außerdem liegt  $y$  in  $G'' \subseteq \mathfrak{Z}G'$  und  $x$  in  $G'$ , daraus folgt  $i^2 \equiv i \pmod{p}$ . Dann ist aber, da  $i \not\equiv 0 \pmod{p}$  (sonst wäre  $x^g$  kein Automorphismus),  $i \equiv 1 \pmod{p}$  im Widerspruch zu (4). Also gibt es keinen Normalteiler  $N$  von  $G'$  mit  $N \neq N \cap G'' \neq G''$ , das heißt

(5) Jeder Normalteiler von  $G'$  enthält  $G''$  oder liegt in  $G''$ , womit (a) gezeigt ist.

Sei  $x$  ein beliebiges aus  $G' - G''$ . Dann ist  $\{x^{g^i}\}$  normal in  $G'$  und enthält nach (5) somit  $G''$ . Daraus folgt  $\{x \circ G'\} = G''$ . Diesem  $x$  kann man nun die folgende Abbildung  $x^*$  von  $G'/G''$  in  $G''$  zuordnen:  $(yG'')^{x^*} = x \circ y$  für alle  $yG''$  aus  $G'/G''$ . Wegen

$c(G') = 2$  ist  $x^*$  ein Homomorphismus, wegen  $\{x \circ G'\} = G''$  sogar ein Epimorphismus. Der Kern dieses Epimorphismus ist  $\mathfrak{C}x$ , woraus

$$(6) \quad G'/\mathfrak{C}x \simeq G''$$

(Bedingung (b)) folgt.

Nach Lemma 1.1 ist  $G$  überauflösbar, also ist  $G_2$  ein Normalteiler von  $G$  (Huppert [1] oder M. Hall [1, Cor. 10.5.2]) und natürlich  $G/G_2 \simeq G_2$ . Als epimorphes Bild einer  $\mathfrak{L}$ -Gruppe ist  $G_2$  ebenfalls eine  $\mathfrak{L}$ -Gruppe und somit nach Satz 2.1 metabelsch. Also liegt  $G''$  in  $G_2$ . Damit erfüllt die Primzahl 2 nicht die Voraussetzung von Lemma 3.2, die Ordnung von  $G''$  zu teilen, also ist

$$(7) \quad p \neq 2 \text{ (Eigenschaft (c))}.$$

Wegen (7) ist  $G'$  auf Grund von  $c(G') = 2$  (Lemma 1.1) regulär im Sinne von Ph. Hall [1]. Dann bildet die Menge  $(G')^p$  der  $x^p$  mit  $x$  aus  $G'$  eine Untergruppe, die dann sogar charakteristisch ist. Speziell ist  $(G')^p$  ein Normalteiler von  $G'$ , somit gilt nach (5):

$$(8) \quad G'' \subseteq (G')^p \quad \text{oder} \quad G'' \supseteq (G')^p.$$

Angenommen, es gilt  $(G'')^p = (G')^p$ . Wegen  $G'' \subseteq \mathfrak{Z}G'$  läge dann auch  $(G')^p$  in  $\mathfrak{Z}G'$ . Dann ist aber nach M. Hall [1, p. 150]  $(x \circ y)^p = x^p \circ y^p = 1$  für alle  $x$  und  $y$  aus  $G'$ , das heißt  $(G'')^p = 1$  und somit  $(G')^p = 1$ . Also

$$(9) \quad \text{Aus} \quad (G'')^p = (G')^p \quad \text{folgt} \quad (G')^p = 1.$$

Angenommen:  $(G')^p \neq 1$ . Nach (8) ist  $G'' \subseteq (G')^p$  oder  $G'' \supseteq (G')^p$ .

Fall 1.  $G'' \subseteq (G')^p$ . Wegen  $A^p \not\subseteq A$  für endliche  $p$ -Gruppen  $A$  ist  $(G'')^p \not\subseteq G'' \subseteq (G')^p \not\subseteq G'$ . Insbesondere gibt es ein Element  $a$  aus  $G' - G''$ , so daß  $a^p$  in  $G''$  liegt. Dann liegt  $a^p$  nicht in  $(G'')^p$ .

Fall 2.  $(G')^p \subseteq G''$ . Aus (9) folgt  $(G'')^p \not\subseteq (G')^p$ , also gilt  $(G'')^p \not\subseteq (G')^p \subseteq G'' \not\subseteq G'$ . Es gibt daher ein Element  $a$  aus  $G'$ , so daß  $a^p$  nicht in  $(G'')^p$  liegt, wegen  $(G')^p \subseteq G''$  liegt aber  $a^p$  in  $G''$ .

In beiden Fällen gibt es also ein  $a$  aus  $G' - G''$  mit  $a^p$  in  $G'' - (G'')^p$ .

Sei  $g$  nach (4) ausgewählt. Nach Lemma 1.3 ist also  $a^{pi^2} = (a^p)^p = (a^p)^p = a^{i^2 p}$  mit geeignetem  $z$  aus  $G''$ .

Daraus folgt:

$$a^{pi^2 - ip} = a^{pi(i-1)} = z^p \quad \text{liegt in } (G'')^p.$$

Nach (4) ist  $i \not\equiv 1 \pmod p$ , also liegt auch  $a^p$  in  $(G'')^p$  im Widerspruch zur Auswahl von  $a$ . Demnach ist

$$(10) \quad (G')^p = 1 \quad (\text{Eigenschaft (d)}).$$

Wegen  $e(G') = 2$  (Lemma 1.2) gilt  $G'' \subseteq \mathfrak{Z}G'$ . Angenommen:  $G'' \neq \mathfrak{Z}G'$ . Dann gibt es auf Grund von (10) eine Untergruppe  $Z \neq 1$  der Ordnung  $p$  aus  $\mathfrak{Z}G'$  mit  $G'' \cap Z = 1$ . Da  $Z \subseteq \mathfrak{Z}G'$ , ist  $Z$  normal in  $G'$ , was (5) widerspricht, woraus

$$(11) \quad G'' = \mathfrak{Z}G'$$

folgt.

Sei  $h$  ein  $p$ -Element aus  $G$  und  $a$  aus  $G'$ . Nach Lemma 1.3 ist  $a^h \equiv a^j \pmod{G''}$ . Da  $h$  einen  $p$ -Automorphismus induziert, ist  $j \equiv 1 \pmod p$ , wegen (10) also  $a^h \equiv a \pmod{G''}$ .

Nach Lemma 1.3 gilt dann  $z^h = z$  für alle  $z$  aus  $G''$ , also ist

$$(12) \quad G'' \subseteq \mathfrak{Z}(G_p) \quad \text{für jede Sylowgruppe } G_p$$

(Bedingung (e)).

Seien  $h$  und  $k$  aus  $G_p$  und  $a$  aus  $G'$ . Dann bestehen die Beziehungen  $a^h = ay$  und  $a^k = az$  mit  $y$  und  $z$  aus  $G''$ . Mit Hilfe von (12) folgt daraus

$$a = (a^k)^{k^{-1}} = (az)^{k^{-1}} = a^{k^{-1}}z, \quad \text{das heißt } a^{k^{-1}} = az^{-1},$$

sowie  $a^{h^{-1}} = ay^{-1}$ . Zusammen mit (11) und (12) ergibt sich

$$\begin{aligned} a^{k \circ h} &= (az^{-1})^{h^{-1}kh} = a^{h^{-1}kh}z^{-1} = (ay^{-1})^{kh}z^{-1} = \\ &= (az)^{hy^{-1}z^{-1}} = azy^{-1}z^{-1} = a(y \circ z) = a, \end{aligned}$$

das heißt  $a \circ (k \circ h) = 1$  für alle  $h$  und  $k$  aus  $G_p$  und alle  $a$  aus

$G'$ . Damit ist  $G' \circ (G_p)' = 1$  bzw.  $(G_p)' \subseteq \mathfrak{Z}G'$  (denn  $(G_p)' \subseteq G'$ )  
bewiesen. Andererseits gilt  $G'' = (G_p')' \subseteq (G_p)'$ , woraus mit (11)

$$(13) \mathfrak{Z}G' = G'' = (G_p')' = (G_p)',$$

also Eigenschaft (f), folgt.

Damit ist Lemma 3.2 vollständig bewiesen.

Lemma 3.2 ergibt eine Aussage über die Untergruppenvererblichkeit der Eigenschaft «  $\mathfrak{X}$ -Gruppe »:

**FOLGERUNG 3.3.:** *Jede primäre Untergruppe einer auflösbaren  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist ebenfalls eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe.*

**ANMERKUNG:** Untergruppen der Ordnung  $pq$  (mit  $p$  und  $q$  Primzahlen) sind auf Grund ihrer speziellen Struktur natürlich stets  $\mathfrak{X}$ -Gruppen, aber Untergruppen der Ordnung  $p^2q$  von  $\mathfrak{X}$ -Gruppen brauchen bereits keine  $\mathfrak{X}$ -Gruppen mehr zu sein, wie am Ende dieses Abschnittes gezeigt werden wird.

**Beweis.** Folgerung 3.3 ist äquivalent mit der Aussage, daß jede Sylowgruppe der  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist. Ist  $p$  ein Primteiler von  $o(G'')$ , so ist nach Lemma 3.2 einerseits  $(G_p)' = G_p''$ , andererseits liegt  $G_p''$  im Zentrum von  $G_p$ , das heißt  $(G_p)'$  liegt im Zentrum von  $G_p$ . Damit ist  $G_p$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe und nach Satz 2.1 sogar eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe.

Ist  $q$  kein Primteiler von  $o(G'')$ , so gilt  $G_q \simeq (G/G'')_q$ . Mit  $G$  ist  $G/G''$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, nach Satz 1.4 ist dann  $G/G''$  sogar eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe und somit  $G_q$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe.

**SATZ 3.4.:** *Folgende Eigenschaften einer Gruppe  $G$  sind äquivalent:*

- I  $G$  ist eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe.
- II
  - a)  $G'$  ist nilpotent.
  - b) Jeder Normalteiler jeder Sylowgruppe  $G_p'$  liegt in  $G_p''$  oder enthält  $G_p''$ .
  - c) Die Elemente aus  $G$  induzieren Potenzautomorphismen in  $G'/G''$ .
  - d) Die Elemente aus  $G$  induzieren Potenzautomorphismen in  $G''$ .

- III  $\left\{ \begin{array}{l} a) G' \text{ ist nilpotent.} \\ b) \text{ Alle nicht abelschen epimorphen Bilder } H \text{ aller } G'_p \\ \text{erfüllen } \mathfrak{Z}H = H'. \\ c) \text{ Die Elemente aus } G \text{ induzieren Potenzautomorphismen} \\ \text{in } G'/G''. \end{array} \right.$

ZUSATZ 3.5.: II b) des Satzes 3.4 kann ersetzt werden durch:

II b\*) Für alle Sylowgruppen  $G'_p$  von  $G'$  gilt  $[G'_p : G''_p] \geq o(\mathfrak{C}x)$  für alle  $x$  aus  $G'_p$ , die nicht in  $G''_p$  liegen.

Beweis von Satz 3.4.

Aus I folgt III:

III a) folgt aus Lemma 1.1 und III c) aus Lemma 1.3.

Zu jedem epimorphen Bild  $H$  von  $G'_p$  gibt es einen Normalteiler  $N$  von  $G'_p$  mit  $G'_p/N \simeq H$ . Wegen der Nilpotenz von  $G'$  ist  $N$  auch normal in  $G'$  und, da  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, sogar normal in  $G$ . Als epimorphes Bild einer  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist  $G/N$  ebenfalls eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe. Ist  $H \simeq G'_p/N = (G'/N)_p = (G/N)'_p$  nicht abelsch, so folgt  $\mathfrak{Z}((G/N)'_p) = (G/N)''_p$  aus Lemma 3.2 (f), also gilt  $\mathfrak{Z}H = H'$  wegen der Nilpotenz von  $G'$  bzw.  $(G/N)'$ , womit auch III b) gezeigt ist.

Aus III folgt II:

II a) und III a) sowie II c) und III c) sind identisch. Es brauchen also nur II b) und II d) verifiziert zu werden.

Wegen III b) ist speziell  $G'_p$  abelsch oder  $G''_p = (G'_p)' = \mathfrak{Z}(G'_p)$ , demnach gilt für alle  $p$  stets  $c(G'_p) \leq 2$  und somit  $c(G') \leq 2$ . Dann folgt aber aus c) nach Lemma 1.3 auch II d).

Sei  $x$  aus  $G'_p - G''_p$ . Angenommen:  $\{x \circ G'_p\} \not\subseteq G''_p$ . Dann ist  $\{x \circ G'_p\}$  als Untergruppe von  $G''_p$  wegen  $\mathfrak{Z}(G'_p) = G''_p$  normal in  $G'_p$  und somit  $G'_p/\{x \circ G'_p\}$  ein nicht abelsches epimorphes Bild von  $G'_p$ . Nach III b) ist

$$\mathfrak{Z}(G'_p/\{x \circ G'_p\}) = (G'_p/\{x \circ G'_p\})' = G''_p/\{x \circ G'_p\}.$$

Wegen  $x \circ G'_p \equiv 1 \pmod{\{x \circ G'_p\}}$  liegt die Restklasse  $x \{x \circ G'_p\}$

in  $\mathfrak{B}(G'_p / \{x \circ G'_p\})$ , aber nach Auswahl von  $x$  nicht in  $G''_p / \{x \circ G'_p\}$ . Auf Grund dieses Widerspruches ist  $\{x \circ G'_p\} = G''_p$  und damit  $\{x^{G'_p}\} \supseteq G''_p$  für alle  $x$  aus  $G'_p - G''_p$ .

Sei  $N$  ein nicht in  $G''_p$  liegender Normalteiler von  $G'_p$ . Dann enthält  $N$  ein  $x$  aus  $G'_p - G''_p$ . Aus  $N = N^{G'_p} \supseteq \{x^{G'_p}\}$  folgt wegen  $\{x^{G'_p}\} \supseteq G''_p$  sofort  $N \supseteq G''_p$ , womit II b) bewiesen ist.

Aus II folgt I:

Aus II a) folgt die Auflösbarkeit von  $G$ .

Sei  $N$  ein Normalteiler von  $G'$ . Nach II a) ist auch  $N$  nilpotent. Damit ist jede Sylowgruppe von  $N$  normal in  $G'$ . Nach II b) liegt dann  $N_p$  in  $G''_p$  oder enthält  $G''_p$ . Auf Grund von II d) sind die in  $G''_p$  liegenden Untergruppen normal in  $G$ , wegen II c) die  $G''_p$  enthaltenden Untergruppen von  $G'_p$  normal in  $G$ . Also sind alle  $N_p$  und somit  $N$  normal in  $G$ , das heißt  $G$  ist eine  $\mathfrak{T}$ -Gruppe.

Beweis von Zusatz 3.5.

Unter II\* soll im folgenden die Bedingung II verstanden werden, in der II b) durch II b\*) ersetzt ist.

Aus II folgt II\*:

Aus II folgt nach Satz 3.4, daß  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{T}$ -Gruppe ist. Aus Lemma 3.2 ergibt sich daraus  $G'_p / \mathbb{C}x \simeq G''_p$  für alle  $x$  aus  $G'_p - G''_p$ , also speziell

$$o(G'_p) = o(G''_p)o(\mathbb{C}x) \quad \text{bzw.} \quad [G'_p : G''_p] = o(\mathbb{C}x),$$

woraus b\*) folgt.

Aus II\* folgt II:

Es ist nur  $\{x \circ G'_p\} = G''_p$  für alle  $x$  aus  $G'_p - G''_p$  zu zeigen, wie beim Beweis von Satz 3.4 folgt dann daraus II b).

Angenommen:  $\{x \circ G'_p\} \subsetneq G''_p$ . Dann ist die  $x$  zugeordnete Abbildung  $x^*$ :  $y^{x^*} = x \circ y$  für alle  $y$  aus  $G'_p$  von  $G'_p$  in  $G''_p$  ein echter Endomorphismus. Sein Kern ist  $\mathbb{C}x$ , also  $G'_p / \mathbb{C}x \simeq (G'_p)^{x^*} \subsetneq G''_p$ . Daraus folgt  $o(G'_p) < o(G''_p)o(\mathbb{C}x)$  bzw.  $[G'_p : G''_p] < o(\mathbb{C}x)$ , im Widerspruch zu II b\*). Also ist  $\{x \circ G'_p\} = G''_p$ , woraus nach dem Beweis von Satz 3.4 dann II b) folgt.

*Konstruktion der nicht-abelschen Sylowgruppen  $P$  der Kommutatorgruppe  $G'$  der  $\mathfrak{T}$ -Gruppe  $G$ :*

Sei  $P$  die Erweiterung einer elementar abelschen  $p$ -Gruppe  $Z$  der Ordnung  $p^n$  durch eine elementar abelsche  $p$ -Gruppe  $H$  der Ordnung  $p^{2m}$  mit  $2m - 2 \geq n$ , derart daß  $Z$  im Zentrum von  $P$  liege. Weiterhin seien  $f_1, \dots, f_n$   $n$  symplektische Bilinearformen des Vektorraumes  $\mathfrak{B}$  der Dimension  $2m$  über  $GF(p)$ , die « linear unabhängig » sind (d. h. die ihnen zugeordneten Matrizen sind linear unabhängig im üblichen Sinne).

Mit Hilfe dieser  $f_i$  werde jetzt definiert:

Für eine fest vorgegebene Basis  $z_1, \dots, z_n$  von  $Z$  und Elemente  $a, b$  aus  $H$  (als Vektoren  $a, b$  aus  $\mathfrak{A}$  aufgefaßt) gelte:

$$aZ \circ bZ = z_1^{f_1(a,b)} \dots z_n^{f_n(a,b)} .$$

Damit bestimmen  $m, n$  und die  $f_i$  die Erweiterung  $P$  im wesentlichen eindeutig, und jede nicht abelsche Sylowgruppe von  $G'$  einer  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  läßt sich auf diese Weise finden.

Beweis. Sei  $P$  eine derart konstruierte Gruppe, und sei  $x$  aus  $P - P'$ . Ein  $a$  aus  $P - P'$  liegt genau dann in  $\mathfrak{C}x$ , wenn  $f_i(a, x) = 0$  ist für alle  $i$ . Die Gleichungen  $f_i(a, x) = 0$  definieren für ein festes  $x$  einen Unterraum von  $\mathfrak{A}$ , und zwar den Durchschnitt der  $n$  Hyperebenen  $f_i(a, x) = 0$ . Da die Bilinearformen linear unabhängig sein sollen (d. h. es ist  $Rg(\mathfrak{F}_1 x, \dots, F_n x) = n$ , wenn man  $f_i(a, x) = a^x \mathfrak{F}_i x$  setzt), so hat der Durchschnitt der Hyperebenen die Dimension  $2m - n$ . In der Gruppe gesehen bedeutet das:  $o(\mathfrak{C}x) = p^{2m-n} p^n = p^{2m} = [P : P']$ . Dieses gilt für alle  $x$  aus  $P - P'$ . Definiert man jetzt eine Gruppe  $G$  durch  $G = \{g, P\}$  mit  $g^2 = 1$  und  $a_g = a_g^{-1}$  für ein Erzeugendensystem  $a_1, \dots, a_{2m}$  von  $P$ , so ist  $G$  nach Zusatz 3.5 eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe mit  $P = G'$ .

Sei jetzt umgekehrt  $P$  eine nicht abelsche Sylowgruppe von  $G'$  einer auflösbaren  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$ . Nach Lemma 1.1 ist  $c(P) = 2$ , nach Lemma 3.2  $P^p = 1$ . Insbesondere ist  $P'$  elementar abelsch. Sei  $P' = Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ . Seien  $aP'$  und  $bP'$  zwei Restklassen von  $P/P'$ . Mit Hilfe der Beziehung  $aP' \circ bP' = z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n}$  definiere man  $n$  Funktionen  $f_i(aP', bP') = k_i$  von  $P/P'$  in  $GF(p)$ . Faßt man  $P/P'$  als einen Vektorraum  $\mathfrak{A}$  über  $GF(p)$  auf, so stellen die  $f_i$  wegen  $c(P) = 2$  Bilinearformen dar, wegen

$f_i(aP', aP') = 0$  symplektische Bilinearformen. Damit ist  $[P : P'] = p^{2m}$ , vergl. etwa Artin [1, Th. 3.11].

Genau dann ist  $a \circ b = 1$ , wenn  $f_i(aP', bP') = 0$  für alle  $i$  ist. Damit ist  $a$  ein Element aus  $\mathbb{C}x$  genau dann, wenn  $f_i(aP', xP') = 0$  für alle  $i$  ist. Nach Lemma 3.2 (b) ist  $o(\mathbb{C}x) = p^{2m}$ , also muß der Unterraum von  $\mathfrak{A}$ , der  $f_i(aP', xP') = 0, i=1, \dots, n$ , erfüllt, die Dimension  $2m - n$  haben, bzw. der Rang des Gleichungssystems muß  $2m - (2m - n) = n$  sein. Benutzt man die Matrixschreibweise  $f_i(aP', xP') = a^i \mathfrak{F}_i x$ , so bedeutet dies die lineare Unabhängigkeit der Vektoren  $\mathfrak{F}_i x$ . Diese gilt für alle  $x$ , also sind die  $\mathfrak{F}_i$  linear unabhängig.

Mit diesem Konstruktionsverfahren findet man folgendes

*Beispiel 2:* Sei  $m = 2 = n$  und

$$\mathfrak{F}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{F}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist  $P = \{a, b, c, d\}$  eine  $p$ -Gruppe mit  $P^o = 1$  und  $a \circ b = y = c \circ d, a \circ c = z = b \circ d$  und  $a \circ d = 1 = b \circ c$  mit  $\mathfrak{P}P = P' = \{y, z\}$ .

Aus Beispiel 2 konstruiert man nach Satz 3.4 leicht eine nicht metabelsche  $\mathfrak{X}$ -Gruppe:

*Beispiel 3:* Sei  $P$  wie im Beispiel 2. Sei  $G = \{g, P\}$  mit  $a^o = a^i, b^o = b^i, c^o = c^i$  und  $d^o = d^i$  und  $i \not\equiv 0 \pmod p$ .

Nach Satz 3.4 ist  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe. Im Fall  $i \not\equiv 1 \pmod p$  ist  $G' = P$  und  $G'' \neq 1$ .

Sei speziell  $g^o = 1$  mit  $p - 1$  teilender Primzahl  $q$ , aber  $q \neq 2$ ; und  $U = \{g, a, y\}$ . Insbesondere ist dann  $a^o = a^i$  und  $y^o = y^{i^2}$  mit  $i^2 \not\equiv 1 \pmod p$  (auf Grund der speziellen Wahl von  $q$ ). Daraus folgt

$$U' = \{a \circ g, y \circ g\} = \{a^{i-1}, y^{i^2-1}\} = \{a, y\},$$

sowie  $U'' = 1$  und  $o(U) = p^2q$ . Wäre  $U$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe, so müßte der Normalteiler  $\{ay\}$  von  $U'$  normal in  $U$  sein, was wegen

$(ay)^o = a^o y^o = a^i y^{i^2}$  nicht der Fall ist. Also ist diese Untergruppe  $U$  der Ordnung  $p^2q$  der  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  selbst keine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe (vergl. Folgerung 3.3).

#### IV. $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppen

LEMMA 4.1.: Sei  $G$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe und  $G'$  eine  $p$ -Gruppe. Dann ist  $G'' = 1$  oder  $[G : \mathfrak{F}G] = 2$ .

Beweis. Sei  $G'' \neq 1$ . Nach Satz 2.1 ist dann  $G$  nicht nilpotent, aber  $G/\mathfrak{F}G$  nach Satz 3.1 zyklisch. Also gibt es ein Element  $g$  aus  $G$  mit  $\{g\mathfrak{F}G\} = G/\mathfrak{F}G$ , das nicht in  $\mathfrak{F}G$  liegt.

Sei  $x$  beliebig aus  $G'$  gewählt. Nach Lemma 1.3 gilt  $x^o = x^i z^k$  mit  $z \neq 1$  aus  $G''$ , wobei  $k = 0$  zugelassen ist, und  $z^o = z^{i^2}$ .

Angenommen:  $i^2 \not\equiv 1 \pmod p$ . Dann sei  $U = \{g, x, z\}$ .

Nach Lemma 3.2 ist  $p \neq 2$ . Aus

$$x \circ g = x^{-1}x^o = x^{i-1}z^k$$

und

$$z \circ g = z^{-1}z^o = z^{i^2-1}$$

folgt  $U' = \{x, z\}$  und somit  $U'' = 1$ .

Im Fall  $k \not\equiv 0 \pmod{o(z)}$  ist der Normalteiler  $\{x\}$  von  $U'$  wegen  $x^o = x^i z^k$  nicht normal in  $U$ , im Fall  $k \equiv 0 \pmod{o(z)}$  der Normalteiler  $\{xz\}$  von  $U'$  wegen  $x^o = x^i$  und  $i^2 \not\equiv 1 \pmod p$  und somit  $i \not\equiv 1 \pmod p$  nicht normal in  $U$ . Also ist  $U$  keine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe und somit  $G$  keine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe im Widerspruch zur Voraussetzung.

Daraus folgt  $x^o \equiv x^i \pmod{G''}$  mit  $i^2 \equiv 1 \pmod p$  für alle  $x$  aus  $G'$ , insbesondere gilt  $x^{o^2} \equiv (x^i)^o \equiv x^{i^2} \pmod{G''}$ . Nach Hilfssatz 2.3 liegt daher  $g^2$  in  $\mathfrak{F}G$ , woraus sich  $[G : \mathfrak{F}G] = 2$  ergibt.

Damit ist Lemma 4.1 bewiesen.

SATZ 4.2: Ist  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe und die 2-Sylowgruppe von  $G/\mathfrak{F}G$  von  $n$  Elementen erzeugbar, so ist  $G$  eine Erweiterung einer  $\mathfrak{F}G$  umfassenden metabelschen  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe durch eine elementar abelsche 2-Gruppe der Ordnung höchstens  $2^n$ .

ANMERKUNG: Die Erzeugendenzahl  $n$  der 2-Sylowgruppe von  $G/\mathfrak{F}G$  ist durch die Zahl  $m$  der Sylowgruppen von  $G'$  beschränkt:  $n \leq m$  (vergl. Satz 3.1).

Beweis. Sei  $G$  nicht metabelsch. Nach Satz 2.1 ist  $\mathfrak{F}G$  metabelsch. Ist  $G'$  eine  $p$ -Gruppe, dann folgt aus Lemma 4.1, daß in diesem Fall  $\mathfrak{F}G$  die gesuchte metabelsche  $\mathfrak{L}$ -Gruppe ist. Es braucht also nur der Fall betrachtet zu werden, daß  $G'$  keine  $p$ -Gruppe ist.

Sei  $M = G^2\mathfrak{F}G$ . Dann ist  $G/M$  elementar abelsch der Ordnung  $2^n$ . Da die Kommutatorgruppe von  $G/G'_p$ , eine  $p$ -Gruppe ist, muß nach Lemma 4.1 entweder  $G/G'_p$ , metabelsch oder  $[G/G'_p, \mathfrak{F}(G/G'_p)] = 2$  sein. Dabei ist  $\mathfrak{F}(G/G'_p)$  nach Satz 2.1 metabelsch. Als Untergruppe von  $G/G'_p$ , bzw.  $\mathfrak{F}(G/G'_p)$  im zweiten Fall, ist somit auch  $M/G'_p$ , metabelsch, das heißt  $M''$  liegt in  $G'_p$ . Dieses gilt für alle Primteiler  $p$  von  $o(G')$ . Also liegt  $M''$  im Durchschnitt aller  $G'_p$ , womit  $M'' = 1$  bewiesen ist.

FOLGERUNG 4.3.: Für eine Gruppe  $G$  mit ungeradem  $[G : \mathfrak{F}G]$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- (1)  $G$  ist eine  $\overline{\mathfrak{L}}$ -Gruppe
- (2)  $G$  ist eine metabelsche  $\mathfrak{L}$ -Gruppe
- (3)  $G$  ist metabelsch und die Elemente aus  $G$  induzieren Potenzautomorphismen in  $G'$ .

Beweis. Nach Satz 4.2 ist  $G = G^2\mathfrak{F}G$  metabelsch, woraus sich die Folgerung nach Satz 1.4 ergibt.

SATZ 4.4.: Für eine Gruppe  $G$  sind die folgenden Eigenschaften äquivalent:

- I  $G$  ist eine  $\overline{\mathfrak{L}}$ -Gruppe.
  - (a)  $G$  ist eine auflösbare  $\mathfrak{L}$ -Gruppe.
- II  $\left\{ \begin{array}{l} \text{(b) Für alle Primteiler } p \text{ von } o(G'') \text{ ist} \\ \text{(b, 1) } G'_p \text{ von zwei Elementen erzeugbar,} \\ \text{(b, 2) } G_p = G'_p A \text{ mit } AG'_p/G'_p \subseteq \mathfrak{B}(G/G'_p), \\ \text{(b, 3) } [G/G'_p, \mathfrak{F}(G/G'_p)] = 2. \end{array} \right.$

- III } (a)  $G'$  ist nilpotent.  
 (b) Für alle Primteiler  $p$  von  $o(G'')$  ist  
 (b, 1)  $o(G'_p) = p^3$  und  $(G'_p)^p = 1$ ,  
 (b, 2)  $G_p = G'_p A$  mit  $AG'_p/G'_p \subseteq \mathfrak{Z}(G/G'_p)$ ,  
 (b, 3)  $[G/G'_p : \mathfrak{F}(G/G'_p)] = 2$ .  
 (c) Die Elemente aus  $G$  induzieren Potenzautomorphismen  
 in  $G'/G''$ .

**Beweis.**

Aus I folgt II:

Nach Lemma 1.1 gilt II (a).

Sei  $p$  ein Teiler von  $o(G'')$ . Wegen der Nilpotenz von  $G'$  (Lemma 1.1) ist  $G'_p$  normal in  $G'$  und somit in  $G$ . Dann ist  $(G/G'_p)' = G'/G'_p \simeq G'_p$  eine  $p$ -Gruppe. Da epimorphe Bilder von  $\mathfrak{X}$ -Gruppen wieder  $\mathfrak{X}$ -Gruppen sind, folgt  $[G/G'_p : \mathfrak{F}(G/G'_p)] = 2$  aus Lemma 4.1. Damit ist II (b, 3) bewiesen.

Als nächstes soll die Aussage II (b, 1) gezeigt werden. Nach Lemma 3.2 ist

$$(1) \quad (G'_p)^p = 1 \quad \text{und} \quad p \neq 2.$$

Sei  $N$  das direkte Produkt von  $G'_p$  und einer maximalen Untergruppe von  $(G'_p)' = G''_p$ . Da  $G$  eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist, ist  $N$  normal in  $G$  und  $G/N$  ebenfalls eine  $\mathfrak{X}$ -Gruppe.

Sei  $gN$  aus  $G/N$  mit  $\{g\mathfrak{F}(G/N)\} = G/N/\mathfrak{F}(G/N)$ . Nach Lemma 4.1 ist  $[G/N : \mathfrak{F}(G/N)] = 2$ , außerdem induziert  $gN$  in  $G'/G''N$  nach Lemma 1.3 Potenzautomorphismen:  $x^g \equiv x^i \pmod{G''N}$ . Nach Hilfssatz 2.3 ist  $i \not\equiv 1 \pmod{p}$ , wegen  $x^{g^2} \equiv (x^i)^g \equiv x^{i^2} \pmod{G''N}$  aber  $i^2 \equiv 1 \pmod{p}$ , woraus  $i \equiv -1 \pmod{p}$  und unter Benutzung von (1)

$$(2) \quad \text{für alle } x \text{ aus } G'x^g \equiv x^{-1} \pmod{G''N}$$

folgt.

Angenommen:  $G'_p$  ist nicht von zwei Elementen erzeugbar.

Dann gibt es eine nicht-abelsche Untergruppe  $U/N$  von  $G'/N$  mit  $[U/N : G''N/N] = p^3$ , also  $o(U/N) = p^4$ . Nach Burnside [1, p. 146] ist dann

$$(3) \quad U/N = \{uN, vN\} \otimes \{wN\} \quad \text{mit} \quad o(\{uN, vN\}) = p^3.$$

Als Untergruppe der  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe  $G/N$  ist  $V/N = \{gN, U/N\}$  ebenfalls eine  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe. Aus (2) folgt  $(V/N)' = U/N$  und  $w^\sigma \equiv w^{-1}z \pmod{N}$  mit  $z$  aus  $G_p''$ .

Nach (3) ist  $\{wN\}$  normal in  $U/N = (V/N)'$ , da  $V/N$  eine  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe ist, muß  $\{wN\}$  auch normal in  $V/N$  sein, also ist  $z \equiv 1 \pmod{N}$ . Dann ist aber der Normalteiler  $\{w(u \circ v)N\}$  von  $U/N = (V/N)'$  wegen  $(u \circ v)^\sigma = u \circ v$  (nach (2) und Lemma 1.3) kein Normalteiler der  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe  $V/N$ .

Aus diesem Widerspruch folgt, daß  $G_p'$  von zwei Elementen erzeugbar ist, womit II (b, 1) bewiesen ist.

Jetzt ist noch II (b, 2) zu zeigen. Aus II (b, 1) und Lemma 3.2 ergibt sich  $G_p' = \{x, y\}$  mit  $x \circ y = z$  und  $\mathfrak{Z}G_p' \supseteq (G_p')' = (G_p)'' = \{z\}$  und damit auch  $o(G_p) = 2$ .

Sei  $a$  ein Element aus  $G_p - G_p'$ . Ist  $a \circ x = z^n$  und  $a \circ y = z^m$ , so betrachte man  $ax^{-m}y^n$ . Für dieses Element aus  $G_p - G_p'$  gilt

$$ax^{-m}y^n \circ x = (a \circ x)(x^{-m} \circ x)(y^n \circ x) = z^n z^{-n} = 1$$

und

$$ax^{-m}y^n \circ y = (a \circ y)(x^{-m} \circ y)(y^n \circ y) = z^m z^{-m} = 1$$

(vergl. M. Hall [1, p. 150]), also  $G_p' \circ ax^{-m}y^n = 1$ . Außerdem ist  $\{G_p', a\} = \{G_p', ax^{-m}y^n\}$ . Jetzt ersetze man das Element  $a$  durch  $a_0 = ax^{-m}y^n$ . Dieses Verfahren ist für alle  $a$  aus  $G_p - G_p'$  möglich. Damit findet man Elemente  $a_0, b_0, \dots$  aus  $G_p - G_p'$ , so daß  $\{a_0, b_0, \dots\} = A$  mit

$$(4) \quad G_p' \circ A = 1 \quad \text{sowie} \quad G_p = G_p' A$$

ist.

Wegen  $G_p \simeq (G/G_p')'$  werde im folgenden modulo  $G_p'$  gerechnet, das heißt  $G_p' = 1$  gesetzt. Nach Lemma 3.2 ist außerdem  $p \neq 2$  und  $(G')^p = 1$ .

Sei  $g$  ein  $p'$ -Element mit  $\{g\mathfrak{F}G\} = G/\mathfrak{F}G$ . Nach II (b, 3) liegt  $g^2$  in  $\mathfrak{F}G$ , also ist  $g^2$  mit  $G_p$  elementweise vertauschbar. Andererseits ist  $g \circ G_p \neq 1$ . Wegen Lemma 1.3 gilt somit, da aus  $i^2 \equiv 1 \pmod p$  und  $i \not\equiv 1 \pmod p$  die Bedingung  $i \equiv -1 \pmod p$  folgt,

$$(5) \quad \text{für alle } w \text{ aus } G', w^g \equiv w^{-1} \pmod{G''}$$

sowie

$$(6) \quad \text{für } z = x \circ y \text{ (siehe oben) } z^g = z.$$

Ist  $U$  eine  $g$  enthaltende Untergruppe von  $G$  mit  $U' = \{w, z\}$  und  $w$  nicht aus  $G''$ , so ist  $w^g = w^{-1}z^k$  nach (5). Als Untergruppe einer  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe ist jedoch  $U$  ebenfalls eine  $\bar{\mathfrak{X}}$ -Gruppe. Wegen  $U'' = 1$  ist  $\{w\}$  normal in  $U'$ , also auch normal in  $U$ . Folglich muß, da ja nach Auswahl von  $w$  das Element  $z$  nicht in  $\{w\}$  liegt,  $k=0$ , bzw.  $w^g = w^{-1}$  sein. Dann liegt aber  $(wz)^g = w^g z^g = w^{-1}z$  wegen  $p \neq 2$  und  $o(w) = p$  nicht in  $\{wz\}$ , obwohl  $\{wz\}$  normal in  $U'$  und somit auch in  $U$  ist. Aus diesem Widerspruch folgt:

$$(7) \quad \text{Es gibt keine } g \text{ enthaltende Untergruppe } U \text{ von } G \text{ mit } U' = \{w, z\} \text{ und } w \text{ nicht aus } G''.$$

Angenommen:  $A' \neq 1$ , das heißt es gibt zwei Elemente  $a$  und  $b$  aus  $A$  mit  $a \circ b \neq 1$ .

Sei  $a \circ g = u$  und  $b \circ g = v$ .

Fall 1: Es ist  $u \equiv 1 \equiv v \pmod{G''}$ . Dann ersetze man  $a$  durch  $aw$  mit einem  $w$  aus  $G' - G''$ . Man erhält

$$aw \circ g \equiv (a \circ g)^w (w \circ g) \equiv w \circ g \equiv w^{-2} \pmod{G''}$$

nach (5), sowie

$$aw \circ b = (a \circ b)^w (w \circ b) = (a \circ b)^w \neq 1$$

wegen (4).

Damit ist  $\{aw \circ g, b \circ g\} \equiv \{w\} \not\equiv 1 \pmod{G''}$  und  $aw \circ b \neq 1$  gezeigt.

Fall 2: Es ist  $\{u\} \not\equiv \{v\} \pmod{G''}$ . Sei o.B.d.A. die Untergruppe  $\{u\} \not\equiv 1 \pmod{G''}$ . Dann ersetze man  $b$  durch  $bv^r$  mit  $2r \equiv 1 \pmod{p}$  (wegen  $p \neq 2$  möglich). So ergibt sich

$$bv^r \circ g \equiv (b \circ g)^{v^r}(v^r \circ g) \equiv v^{v^r}v^{-2r} \equiv v^{1-2r} \equiv 1 \pmod{G''},$$

sowie

$$bv^r \circ a = (b \circ a)^{v^r}(v^r \circ a) = (b \circ a)^{v^r} \neq 1$$

wegen (4).

Damit ist  $\{a \circ g, bv^r \circ a\} \equiv \{u\} \not\equiv 1 \pmod{G''}$  und  $bv^r \circ a \neq 1$  gezeigt.

In beiden Fällen kann man also durch geeignetes Ersetzen und Umbezeichnen zwei Elemente  $a$  und  $b$  finden, so daß gilt:

Fall 3:  $a \circ g = u$  und  $b \circ g = v$  mit  $\{u, v\} \equiv \{w\} \not\equiv 1 \pmod{G''}$  und  $a \circ b \neq 1$ .

Sei  $U = \{g, a, b\}$ . Nach Lemma 3.2 und II (b, 1) ist  $a \circ b = z^k$  mit  $\{z\} = G'' \subseteq \mathfrak{Z}G_p$ . Folglich ist  $U' = \{u, v, z\} = \{w, z\}$ , was nach (7) nicht möglich ist. Auf Grund dieses Widerspruchs zur Annahme  $A' \neq 1$  ergibt sich

(8)  $A$  ist abelsch.

Angenommen, es gibt ein Element  $a$  aus  $A$ , so daß  $a \circ g$  nicht in  $G''$  liegt. Wegen  $a \circ g$  in  $G'$  ist  $(a \circ g)^g = (a \circ g)^{-1}z^k$  mit geeignetem  $k$  (nach (5)).

Fall 1:  $k \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Sei  $U = \{g, a\}$ . Dann liegt  $a \circ g$  und wegen

$$(a \circ g) \circ g = (a \circ g)^{-1}(a \circ g)^g = (a \circ g)^{-2}z^k$$

auch  $z$  in  $U'$ . Nach (4) ist  $(a \circ g) \circ a = 1$ , also  $U' = \{a \circ g, z\}$ , was nach (7) nicht möglich ist.

Fall 2:  $k \equiv 0 \pmod{p}$ , das heißt  $(a \circ g)^g = (a \circ g)^{-1}$ . Sei  $s$  ein Element aus  $G'$ , das nicht in  $\{a \circ g, G''\}$  liegt. Dann ist  $(a \circ g) \circ s = z^i$  mit  $i \not\equiv 0 \pmod{p}$ . Sei nun  $U = \{a, sg\}$ . Wegen

$$a \circ sg = (a \circ g)(a \circ s)^g = (a \circ g)1^g = a \circ g$$

nach (4) und  $(a \circ g) \circ a = 1$  ebenfalls nach (4), sowie

$$\begin{aligned}(a \circ g) \circ sg &= ((a \circ g) \circ g)((a \circ g) \circ s)^g \\ &= (a \circ g)^{-2}(z^i)^g = (a \circ g)^{-2}z^i\end{aligned}$$

nach (5) und (6) ist  $U' = \{a \circ g, z\}$ , was nach (7) nicht möglich ist.

Aus diesen beiden Widersprüchen folgt, daß stets  $a \circ g$  in  $G''$  liegt, das heißt  $a^g \equiv a \pmod{G''}$ . Dieses gilt für alle  $a$  aus  $A$ , also ist  $A \circ g = 1$  nach Hilfssatz 2.2. Andererseits ist  $A$  als  $p$ -Gruppe aus  $\mathfrak{F}G$  mit den Elementen aus  $(\mathfrak{F}G)_p$ , vertauschbar, wegen (4) und (8) liegt  $A$  im Zentrum von  $G_p = (\mathfrak{F}G)_p$ , woraus

$$(9) \quad A \subseteq \mathfrak{Z}G$$

folgt. (4) und (9) ergeben zusammen II (b, 2), womit II vollständig bewiesen ist.

Aus II folgt III:

Nach Lemma 1.1 ist  $c(G') \leq 2$ , sowie  $(G'_p)^p = 1$  für alle  $o(G'')$  teilenden Primzahlen  $p$  nach Lemma 3.2. Damit folgt aus II (b) sofort III (b). Auf Grund von Satz 3.4 folgen III (a) und III (c) aus II (a).

Aus III folgt I:

Da die Bedingung III die Bedingung III von Satz 3.4 nach sich zieht, folgt aus Satz 3.4, daß  $G$  eine auflösbare  $\mathfrak{X}$ -Gruppe ist.

Sei  $U$  eine Untergruppe von  $G$  und  $N$  ein Normalteiler von  $U'$ . Wegen  $N \subseteq U' \subseteq G'$  ist  $N$  nilpotent, also das direkte Produkt seiner Sylowgruppen.

Da Automorphismen  $p$ -Elemente auf  $p$ -Elemente abbilden, liegt  $N_p^g$  stets in  $G'_p$ . Aus  $N_p^g \subseteq N_p G'_p$ , folgt somit stets wegen  $N_p G'_p \cap G'_p = N_p(G'_p \cap G'_p) = N_p$ , daß  $N_p^g = N_p$  ist. Es braucht also nur  $N_p^g \subseteq N_p G'_p$ , das heißt  $(N_p G'_p / G'_p)^g = N_p G'_p / G'_p$ , gezeigt zu werden, bzw. es kann angenommen werden, daß

$$(1) \quad G' \text{ eine } p\text{-Gruppe ist.}$$

Ist  $G'' = 1$ , so folgt aus der Eigenschaft «  $\mathfrak{X}$ -Gruppe » nach Satz 1.4 bereits «  $\mathfrak{X}$ -Gruppe », also ist  $N$  normal in  $U$ . Sei daher

$G'' \neq 1$ . Wegen (b, 1) ist dann

$$(2) \quad G' = \{u, v\} \text{ mit } \{u \circ v\} = \{z\} = \mathfrak{Z}G' = G'' \text{ und } (G')^p = 1.$$

(vergl. z. B. Burnside [1, p. 145]).

Ist  $N \subseteq G''$ , so muß, falls  $N \neq 1$  ist,  $N = G''$  sein. Damit ist  $N$  natürlich normal in  $U$ . Im Fall  $G'' \subseteq N$  ist  $N$  wegen III (c) ebenfalls normal in  $G$  und somit auch in  $U$ . Es verbleibt also nur noch  $N \not\subseteq G''$  und  $N \not\supseteq G''$ . Wegen (2) ist dann  $N$  zyklisch.

Da  $U' \subseteq G'$  und  $N$  normal in  $U'$  ist, muß wegen der Struktur von  $G'$  stets  $U'$  abelsch und somit  $U' \subseteq NG''$  sein. Falls  $U' \subsetneq NG''$ , also  $U' = N$  gilt, so ist  $N$  trivialerweise normal in  $U$ .

Daher bleibt nur noch zu betrachten:

$$(3) \quad U' = NG'' \quad \text{mit} \quad o(U') = p^2.$$

Nach III (b, 2) ist  $G_p = G'A$  mit  $A \subseteq \mathfrak{Z}G$ . Andererseits ist  $(\mathfrak{F}G)_p$ , wegen (1) abelsch, als charakteristische Untergruppe von  $\mathfrak{F}G$  somit normal in  $G$ . Also ist  $K = A \otimes (\mathfrak{F}G)_p$ , ein abelscher Normalteiler von  $G$  mit  $\mathfrak{F}G = G'K$ . Für beliebige Elemente  $h$  aus  $(\mathfrak{F}G)_p$ , und  $g$  aus  $G$  liegt  $h^p$  ebenfalls in  $(\mathfrak{F}G)_p$ , und damit  $h \circ g = h^{-1}h^p$  in  $(\mathfrak{F}G)_p \cap G' = 1$ , also ist  $(\mathfrak{F}G)_p \subseteq \mathfrak{Z}G$  und somit

$$(4) \quad K \subseteq \mathfrak{Z}G.$$

Aus

$$\begin{aligned} (\mathfrak{F}G)' &= ((\mathfrak{F}G)_p \otimes (\mathfrak{F}G)_{p'})' = ((\mathfrak{F}G)_p)' \otimes ((\mathfrak{F}G)_{p'})' = \\ &= ((\mathfrak{F}G)_p)' = (G_p)' \quad \text{(nach (4))} \end{aligned}$$

und  $(G_p)' = G''$  (Lemma 3.2) folgt  $(\mathfrak{F}G)' = G''$ , also muß  $U$  wegen (3) ein erzeugendes  $p'$ -Element  $g$  von  $\{g\mathfrak{F}G\} = G/\mathfrak{F}G$  enthalten. Für alle  $w$  aus  $G'$  ist  $w^p \equiv w^{-1} \pmod{G''}$ , da  $g^2$  nach III (b, 3) in  $\mathfrak{F}G$  liegt.

Angenommen, in  $U$  lägen zwei nicht vertauschbare Elemente  $xa$  und  $yb$  aus  $\mathfrak{F}G$  mit  $x, y$  aus  $G'$  und  $a, b$  aus  $K$ . Wegen (4) ist dann zwar  $xa \circ yb = x \circ y = z^t$ , aber auch

$$xa \circ g \equiv x \circ g \equiv x^{-2} \pmod{G''} \quad \text{und} \quad ya \circ g \equiv y \circ g \equiv y^{-2} \pmod{G''}$$

und somit  $U' = \{x, y, z\} = G'$ , was (3) widerspricht. Also ist  $U \cap \mathfrak{F}G$  abelsch. Dann haben aber alle Elemente aus  $U \cap \mathfrak{F}G$  die Form  $x^m a z^n$  mit festem  $x$  aus  $G'$  und beliebigem  $a$  aus  $K$ . Wegen  $x^m a z^n \circ x^{\bar{m}} \bar{a} z^{\bar{n}} = x^m \circ x^{\bar{m}} = 1$  und

$$x^m a z^n \circ g = x^m \circ g = x^{-m} (x^m)^g = x^{-m} (x^g)^m = (x \circ g)^m$$

(da  $x^g \circ x = 1$  wegen  $x^g \equiv x^{-1} \pmod{G''}$  und  $G'' \subseteq \mathfrak{F}G$ ) ist aber  $U'$  zyklisch, im Widerspruch zu (3). Also kann eine Untergruppe  $U$  mit einer Kommutatorgruppe  $U'$ , wie in (3) gefordert, nicht auftreten.

In den anderen Fällen war jedoch jeder Normalteiler von  $U'$  normal in  $U$ , also ist  $G$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe, womit I gezeigt ist.

Nach Satz 4.4 ist die  $\mathfrak{X}$ -Gruppe  $G$  des Beispiels 3 im Fall  $G'' \neq 1$  keine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe, aber mit Hilfe von Satz 4.4 läßt sich sofort ein Beispiel einer nicht metabelschen  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe angeben:

*Beispiel 4:* Sei  $P = \{x, y\}$  eine  $p$ -Gruppe ( $p \neq 2$ ) mit  $P^p = 1$  und  $x \circ y$  in  $\mathfrak{F}P$ . Sei  $G = \{g, P\}$  mit  $g^2 = 1$  und  $x^g = x^{-1}$  sowie  $y^g = y^{-1}$ .

Nach Satz 4.4 ist  $G$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe mit  $G' = P$  und  $G'' \neq 1$ .

*Beispiel 5:* Sei zu jeder Primzahl  $p \neq 2$  eine dem Beispiel 4 entsprechende Gruppe  $G(p)$  gegeben. Ist  $\pi$  eine endliche Primzahlmenge, die die zwei nicht enthält, so sei  $H$  das direkte Produkt der Gruppen  $G(p)$ , wobei  $p$  die Primzahlmenge  $\pi$  durchlaufe.

Nach Satz 4.4 ist  $H$  eine  $\overline{\mathfrak{X}}$ -Gruppe. Enthält  $\pi$  genau  $n$  Primzahlen, so hat  $o(H')$  genau  $n$  Primteiler und  $H/H'$  ist eine elementar abelsche 2-Gruppe der Ordnung  $2^n$ . Dabei ist  $H' = \mathfrak{F}H$  der maximale metabelsche Normalteiler von  $H$ .

Beispiel 5 zeigt also, daß die Schranken im Satz 3.1 und Satz 4.2 optimal bestimmt sind.

## LITERATUR

- [1] ARTIN, E.: *Geometric algebra*. New York-London, 1957.
- [1] BAER, R.: *Automorphism rings of primary abelian operator groups*. *Annals of Math.*, 44 (1943), 192-227.
- [2] — — : *Nilpotent charakteristic subgroups of finite groups*. *Amer. J. Math.*, 75 (1953), 633-664.
- [1] BURNSIDE, W.: *Theory of groups of finite order*, 2<sup>nd</sup> ed. Cambridge, 1911.
- [2] — — : *On some properties of groups whose orders are powers of primes*. *Proc. London Math. Soc.* (2), 11 (1912), 225-245.
- [1] FUCHS, L.: *Abelian groups*. Oxford, London, New York, Paris, 1960.
- [1] GASCHÜTZ, W.: *Über die  $\Phi$ -Untergruppen endlicher Gruppen*. *Math. Z.*, 58 (1953), 140-170.
- [2] — — : *Gruppen, in denen das Normalteilersein transitiv ist*. *J. f. reine u. angew. Math.*, 198 (1957), 87-92.
- [1] HALL, M. jr.: *The theory of groups*. New York, 1959.
- [1] HALL, PH.: *A contribution to the theory of groups of prime-power order*. *Proc. London Math. Soc.* (2), 36 (1933), 29-95.
- [2] — — : *Wreath products and characteristically simple groups*. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 38 (1962), 170-184.
- [1] HUPPERT, B.: *Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen*. *Math. Z.*, 60 (1954), 409-434.
- [1] ROBINSON, D.: *Groups in which normality is a transitive relation*. *Proc. Cambr. Phil. Soc.*, 60 (1964), 21-38.
- [1] ZACHER, G.: *Caratterizzazione dei  $t$ -gruppi finiti risolubili*. *Ricerche Mat. (Napoli)*, 1 (1952), 287-294.
- [2] — — : *I gruppi risolubili finiti in cui i sottogruppi di composizione coincidono con i sottogruppi quasi-normale*. *Rend. Acad. Lincei, fis. mat. e nat.*, 37 (1964), 150-154.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 agosto 1965.