RENDICONTI
*del*
SEMINARIO MATEMATICO
*della*
UNIVERSITÀ DI PADOVA

KARL HANS MÜLLER

**Schwachnormale Untergruppen : eine gemeinsame Verallgemeinerung der normalen und normalisatorgleichen Untergruppen**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova*, tome 36, nº 1 (1966), p. 129-157

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_129_0>

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (http://rendiconti.math.unipd.it/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

# SCHWACHNORMALE UNTERGRUPPEN: EINE GEMEINSAME VERALLGEMEINERUNG DER NORMALEN UND NORMALISATORGLEICHEN UNTERGRUPPEN

*di* KARL HANS MÜLLER (*Frankfurt a. M.*) *)

Sei $G$ eine endliche Gruppe. Die Untergruppe $U$ von $G$ ist *schwachnormal* in $G$, wenn $\mathfrak{K} = U^G$ die folgende Bedingung erfüllt:

Sind $X$ und $Y$ aus $\mathfrak{K}$, so folgt aus $X \leqslant \mathfrak{N}_G(Y)$ stets $X = Y$.

Ist die Untergruppe $N$ von $G$ normal in $G$ oder gleich ihrem Normalisator in $G$, so ist $N$ schwachnormal in $G$; andererseits sind für jede Primzahl $p$ die $p$-Sylowgruppen von $G$ schwachnormal in $G$. In Vorlesungen hat P. Hall den Begriff der pronormalen Untergruppe eingeführt. Eine Untergruppe $U$ von $G$ ist pronormal in $G$, wenn für jedes $x$ aus $G$ die Untergruppe $U^x$ in $\{U^x, U\}$ zu $U$ konjugiert ist. Lemma 1.6(2) zeigt, daß eine primäre Untergruppe von $G$ genau dann schwachnormal ist, wenn sie pronormal ist. Jede subnormale schwachnormale Untergruppe von $G$ ist normal in $G$ (Lemma 1.3). Das Erzeugnis primärer schwachnormaler Untergruppen von $G$ ist eine schwachnormale Untergruppe von $G$ (Satz 1.8). Die $p$-Untergruppe $A$ von $G$ ist genau dann in $G$ schwachnormal, wenn für jede $p$-Sylowgruppe $S$ von $G$ gilt: Aus $A \leqslant S$ folgt $A \lhd \mathfrak{N}_G(S)$ (Satz 1.14).

Sei $\pi$ eine Menge von Primzahlen. Eine Menge $\mathfrak{K}$ von $\pi$-Untergruppen von $G$ ist ein *$\pi$-Bund* in $G$, wenn $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}^G$ ist und für jedes $p$ aus $\pi$ die Menge derjenigen Untergruppen von $G$, die $p$-Sylowgruppe mindestens einer Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ sind, die

*) Indirizzo dell'A.: Mathematisches Seminar der Universität Frankfurt (Main). 6 Frankfurt. Robert Mayer Strasse 6-8 (Germania).

volle Konjugiertenklasse einer in $G$ schwachnormalen Untergruppe ist. Besitzt $G$ eine $\pi$-Hallgruppe, so bildet die Menge der $\pi$-Hallgruppen von $G$ einen $\pi$-Bund in $G$. Diese Bemerkung zeigt, daß im Fall $|\pi| > 1$ ein $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ nicht aus der vollen Konjugiertenklasse einer Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ zu bestehen braucht. Es wird daher unsere Aufgabe sein, Bedingungen dafür anzugeben, daß ein $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ die volle Konjugiertenklasse einer Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ ist. Enthält der $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ eine nilpotente Untergruppe $H$ und sind alle Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ auflösbar, so ist $\mathfrak{K} = H^G$ (Satz 2.4). Sei $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in $G$, und jede Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ sei $\pi$-verstreut (im Sinne von R. Baer, [2]). Dann sind je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ in $G$ konjugiert (Satz 2.11). Ist $G$ eine $\pi$-separable Gruppe, so besteht jeder $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ in $G$ aus der vollen Konjugiertenklasse einer Untergruppe aus $\mathfrak{K}$; insbesondere ist also in jeder auflösbaren Gruppe ein $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ eine Klasse konjugierter Untergruppen (Folgerung 2.18).

Die endliche Gruppe $G$ ist *$p$-dedekindsch*, wenn jede $p$-Untergruppe von $G$ schwachnormal in $G$ ist; $G$ ist *schwachdedekindsch*, wenn jede primäre Untergruppe von $G$ schwachnormal in $G$ ist. Ist $G$ eine $p$-dedekindsche Gruppe und $p$ die kleinste Primzahl, welche die Ordnung von $G$ teilt, so besitzt die $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ ein normales Komplement in $G$ (Satz 3.7). Sei $P$ eine $p$-Sylowgruppe der $p$-dedekindschen Gruppe $G$ und $N$ der Normalisator von $P$ in $G$. Ist $p \neq 2$, so ist $P \leqslant Z(N)$ oder $P \cap Z(N) = 1$ (Satz 3.6); ferner ist die von $N$ in $P$ induzierte Automorphismengruppe zyklisch (Satz 3.8). Schwachdedekindsche Gruppen sind überauflösbar, und ihre Kommutatorgruppe ist abelsch (Satz 3.15).

Wir haben uns in der Einleitung auf endliche Gruppen beschränkt. Unter jeweils geeigneten Endlichkeitsvoraussetzungen lassen sich viele unserer Ergebnisse auch für unendliche Gruppen beweisen. Dies gilt besonders für die Konjugiertheitskriterien für $\pi$-Bünde; als Nebenresultate ergeben sich bekannte Sätze über die Konjugiertheit von $\pi$-Sylowbasen in unendlichen Gruppen.

Herrn Prof. Dr. R. Baer und Herrn Dr. B. Fischer bin ich für viele wertvolle Ratschläge zu großem Dank verpflichtet.

## Bezeichnungen und Definitionen

$U^G$ Menge aller $U^g = g^{-1}Ug$ mit $g \in G$.
$\mathfrak{N}_V(U)$ Normalisator von $U$ in $V$.
$\mathfrak{C}_V(U)$ Zentralisator von $U$ in $V$.
$Z(U)$ Zentrum von $U$.
$\mathfrak{A}(U)$ Gruppe aller Automorphismen von $U$.
$|G : U|$ Index von $U$ in $G$.
$|\mathfrak{M}|$ Mächtigkeit der Menge $\mathfrak{M}$.
$0(G)$ Ordnung der endlichen Gruppe $G$.
$[X; ...]$ Menge aller $X$ mit der Eigenschaft ... .
Sei $\mathfrak{M} = [A, B, C, ...]$ eine Menge von Teilmengen von $G$.
$\mathfrak{M}^G$ Menge aller $M^g$ mit $M \in \mathfrak{M}$ und $g \in G$.
$\{\mathfrak{M}\} = \{A, B, C, ...\}$ = Erzeugnis aller $A$, $B$, $C$, ... aus $\mathfrak{M}$.
Seien $n$ und $m$ natürliche Zahlen, und sei $\pi$ eine Menge von Primzahlen.
$(n, m)$ größter gemeinsamer Teiler von $n$ und $m$.
$n|m$ bedeutet: $n$ ist ein Teiler von $m$.
$U^n$ $[u^n; u \in U]$.
$\pi'$ ist die zu $\pi$ komplementäre Primzahlmenge.
$\pi$-Element Element, dessen Ordnung endlich ist und nur Primteiler in $\pi$ hat.
$\pi$-Gruppe Gruppe, die nur aus $\pi$-Elementen besteht.
$c(G)$ Menge aller Primzahlen $p$ mit der Eigenschaft, daß es ein Element der Ordnung $p$ in $G$ gibt.
$U$ ist abnormal in $G$, wenn für jedes $g \in G$ die Beziehung $g \in \{U, U^g\}$ gilt.
Sei $\tau$ eine Ordinalzahl. Eine aufsteigende Normalreihe von $G$ ist eine Folge $(U_\mu)$, $0 \leqslant \mu \leqslant \tau$, von Untergruppen $U_\mu$ von $G$ mit

$$1 = U_0, \qquad U_\tau = G,$$
$$U_\mu \lhd U_{\mu+1}, \quad 0 \leqslant \mu < \tau,$$
$$U_\lambda = \bigcup_{\mu<\lambda} U_\mu \text{ für jede Limeszahl } \lambda \leqslant \tau.$$

Die Gruppen $U_{\mu+1}/U_\mu$, $0 \leqslant \mu < \tau$, sind die Faktoren von $(U_\mu)$.

$U$ ist erreichbar, falls $U$ Glied einer aufsteigenden Normalreihe von $G$ ist. Erreichbare Untergruppen endlicher Gruppen bezeichnen wir auch als subnormal.

$G$ ist auflösbar, falls $G$ eine aufsteigende Normalreihe mit abelschen Faktoren besitzt.

$G$ ist hyperzentral, wenn $G$ (möglicherweise transfinites) Schlussglied der aufsteigenden Zentralreihe von $G$ ist. Endliche hyperzentrale Gruppen sind nilpotent.

$G$ ist eine $N$-Gruppe, wenn jede echte Untergruppe von $G$ von ihrem Normalisator verschieden ist. Hyperzentrale Gruppen sind $N$-Gruppen (Specht, [9], p. 361).

$G$ ist eine $S$-Gruppe, wenn $G$ direktes Produkt primärer Gruppen ist.

## 1. Schwachnormale Untergruppen und $p$-Bünde.

Definition 1.1.: Die Untergruppe $X$ der Gruppe $G$ ist schwachnormal in $G$, wenn gilt

(a) $|X^G| < \infty$;
(b) aus $Y \in X^G$ und $X^Y = X$ folgt $X = Y$.

Ist $Z$ eine schwachnormale Untergruppe der Gruppe $G$, so ist jede Untergruppe aus $Z^G$ ebenfalls schwachnormale Untergruppe von $G$; ist $Z \leqslant U \leqslant G$, so ist $Z$ schwachnormale Untergruppe von $U$.

Sei $G$ eine Gruppe und $X$ eine Untergruppe von $G$. Ist $X$ normal in $G$, so ist $X$ schwachnormal in $G$. Ist $X = \mathfrak{N}_G(X)$, so ist $X$ genau dann schwachnormal in $G$, wenn $|X^G| < \infty$ ist. Es folgt, daß eine maximale Untergruppe $M$ von $G$ genau dann in $G$ schwachnormal ist, wenn $|M^G| < \infty$ ist. Ist $\pi$ eine Menge von Primzahlen und $G$ keine $\pi$-Gruppe, so ist eine maximale $\pi$-Untergruppe $H$ von $G$ genau dann schwachnormal in $G$, wenn $|H^G| < \infty$ ist. Allgemeiner gilt:

Sei $\gamma$ eine abstrakte gruppentheoretische Eigenschaft mit den Eigenschaften

(1) Epimorphe Bilder von $\gamma$-Gruppen sind $\gamma$-Gruppen;

(2) Erweiterungen von $\gamma$-Gruppen durch $\gamma$-Gruppen sind $\gamma$-Gruppen.

Ist $B$ Normalteiler der Gruppe $G$ und $B$ keine $\gamma$-Gruppe, so ist eine maximale $\gamma$-Untergruppe $K$ von $B$ genau dann schwachnormal in $G$, wenn $|K^G| < \infty$ ist.

LEMMA 1.2.: *Sei $S$ eine schwachnormale Untergruppe der Gruppe $G$ und sei $A$ ein Normalteiler von $G$ mit $A \leqslant \mathfrak{N}_G(S)$. Dann ist $SA/A$ eine schwachnormale Untergruppe von $G/A$.*

Beweis. Wir setzen $T = SA/A$ und $H = G/A$. Aus $|G : \mathfrak{N}_G(S)| < \infty$ folgt dann $|H : \mathfrak{N}_H(T)| < \infty$. Sei $h = gA$ ein Element aus $H$ mit $T^h \leqslant \mathfrak{N}_H(T)$. Für jedes $t$ aus $S^g$ gilt dann $S^t \leqslant AS \leqslant \mathfrak{N}_G(S)$, also $S^t = S$. Daher haben wir $S^g \leqslant \mathfrak{N}_G(S)$; es folgt $S^g = S$ und damit $T^h = T$.

LEMMA 1.3.: *Jede erreichbare schwachnormale Untergruppe einer Gruppe $G$ ist normal in $G$.*

Beweis. Sei $U$ eine erreichbare schwachnormale Untergruppe der Gruppe $G$ und $(U_\nu)$, $0 \leqslant \nu \leqslant \sigma$, eine $U$ mit $G$ verbindende Untergruppenfolge, wobei $U_0 = U$ und $U_\sigma = G$ ist. Es ist $U = U_0$ normal in $U_0$. Sei $\tau$ eine Ordnungszahl mit $0 < \tau \leqslant \sigma$ und sei für alle $\nu$ mit $0 \leqslant \nu < \tau$ schon bewiesen, daß $U$ normal in $U_\nu$ ist. Ist $\tau$ Limeszahl, so folgt $U \lhd U_\tau$. Ist $\tau$ nicht Limeszahl, so ist $\tau = \alpha + 1$ für eine geeignete Ordnungszahl $\alpha$. Wegen $U \lhd \lhd U_\alpha \lhd U_{\alpha+1}$ ist $U^g \leqslant U_\alpha$, falls $g$ aus $U_{\alpha+1}$ ist. Es folgt $U^g \leqslant \leqslant \mathfrak{N}_G(U)$, also $U^g = U$. Daher gilt $U \lhd U_{\alpha+1} = U_\tau$. Also gilt auch $U \lhd U_\sigma = G$.

DEFINITION 1.4.: Ist $G$ eine Gruppe, $p$ eine Primzahl und $\mathfrak{K}$ eine nicht leere Menge von Untergruppen von $G$, so ist $\mathfrak{K}$ ein $p$-Bund in $G$, wenn gilt

($a$) Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ sind $p$-Gruppen;

($b$) $\mathfrak{K}^G = \mathfrak{K}$;

($c$) sind $X$ und $Y$ in $\mathfrak{K}$ und gilt $X^Y = X$, so ist $Y = X$;

($d$) es gibt ein $E$ in $\mathfrak{K}$ mit $|E^G| < \infty$.

Für jede Primzahl $p$ bildet die Menge der $p$-Sylowgruppen einer endlichen Gruppe $G$ einen $p$-Bund in $G$. Die Menge der

$p$-Sylowgruppen einer unendlichen Gruppe $G$ bildet genau dann einen $p$-Bund in $G$, wenn es eine $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ mit $|G:\mathfrak{N}_G(P)| < \infty$ gibt; gibt es eine $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ mit $|G:\mathfrak{N}_G(P)| < \infty$, so sind alle $p$-Sylowgruppen von $G$ zu $P$ in $G$ konjugiert, ihre Anzahl ist endlich und kongruent 1 (mod $p$), (Specht, [9], p. 383). Entsprechend können wir beweisen:

SATZ 1.5.: *Sei $G$ eine Gruppe, $p$ eine Primzahl und $\mathfrak{K}$ ein $p$-Bund in $G$. Dann sind je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ in $G$ konjugiert, die Anzahl $|\mathfrak{K}|$ der Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ ist endlich und kongruent* 1 (mod $p$).

Beweis. Sei $E$ eine der Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ mit $|E^G| < \infty$, ferner sei $Y$ eine Untergruppe aus $\mathfrak{K}$. Es werde $E^G$ in Klassen unter $Y$ konjugierter Untergruppen aufgeteilt. Wegen ($b$) gilt $E^G \leqslant \mathfrak{K}$. Ist $F \in E^G \leqslant \mathfrak{K}$, so gilt $\infty > |E^G| \geqslant |F^Y| = |Y : \mathfrak{N}_Y(F)|$. Da $Y$ eine $p$-Gruppe ist, ist $|F^Y|$ eine $p$-Potenz (Specht, [9], p. 376). Nun ist $|F^Y|$ genau dann gleich 1, wenn $Y \leqslant \mathfrak{N}_G(F)$ ist, also wegen ($c$) genau dann, wenn $Y = F$ ist. Für $Y = E$ folgt $|E^G| \equiv 1 \pmod p$. Angenommen, es ist $E^G \neq \mathfrak{K}$. Sei $Z$ aus $\mathfrak{K} \setminus E^G$. Dann folgt $|X^Z| \equiv 0 \pmod p$ für alle $X$ aus $E^G$, also $|E^G| \equiv 0 \pmod p$. Dieser Widerspruch zeigt, daß $E^G = \mathfrak{K}$ und $\infty > |\mathfrak{K}| = |E^G| \equiv 1 \pmod p$ ist.

LEMMA 1.6: (1) *Ist $\mathfrak{K}$ ein $p$-Bund in der Gruppe $G$ und $X$ aus $\mathfrak{K}$, so ist $X$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$.*

(2) *Ist $A$ eine schwachnormale $p$-Untergruppe von $G$ und $A \leqslant B \leqslant G$, so ist $A^B$ ein $p$-Bund in $B$, und es ist $A^B = [X; X \in A^G, X \leqslant B]$.*

(3) *Ist $C$ normal in $G$ und $D \leqslant C$ eine schwachnormale $p$-Untergruppe von $C$, so ist $D$ genau dann in $G$ schwachnormal, wenn $D^G = D^C$ ist.*

Beweis. Nach Satz 1.5 ist $\mathfrak{K} = X^G$ und daher $|X^G| = |\mathfrak{K}| < \infty$; ist $Y \in X^G$ und $X^Y = X$, so folgt $Y = X$ wegen der Eigenschaft ($c$) aus Definition 1.4. Daher gilt (1). Die Behauptung (2) folgt unmittelbar aus den Definitionen 1.1 und 1.4 und Satz 1.5.

Ist $D$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$, so ist $D^G$ ein $p$-Bund in $C$ nach (2), also ist $D^G = D^C$ nach Satz 1.5. Ist umgekehrt $D^G = D^C$, so folgt sofort, daß $D$ schwachnormal in $G$ ist. Damit ist auch (3) bewiesen.

LEMMA 1.7.: *Sei $A$ eine Untergruppe der Gruppe $G$. Ist $A$ schwachnormal in $G$, so gilt $\mathfrak{N}_G(A) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{N}_G(A))$, und $\mathfrak{N}_G(A)$ ist schwachnormal in $G$. Ist $A$ schwachnormal in $G$ und primär, so ist $\mathfrak{N}_G(A)$ abnormal in $G$.*

Beweis. Sei $A$ schwachnormal in $G$ und sei $N = \mathfrak{N}_G(A)$ und $M = \mathfrak{N}_G(N)$. Ist $g$ aus $M$, so ist $A^g \leqslant N$. Also ist $A^g = A$, es folgt $g \in N$. Daher ist $M \leqslant N \leqslant M$ und damit $N = M$. Da $| G : M | = | G : N | < \infty$ gilt, ist $N = \mathfrak{N}_G(A)$ schwachnormal in $G$.

Sei nun $A$ eine primäre schwachnormale Untergruppe von $G$, ferner sei $g$ ein Element aus $G$ und $K = \{N, N^g\}$. Nach Lemma 1.6(2) ist $A^K \cup (A^g)^K = A^K$; es gibt daher ein $k$ in $K$ mit $A^g = A^k$. Also ist $gk^{-1}$ aus $N$ und $g$ aus $NK = K$.

BEMERKUNG: Da jeder Normalteiler einer Gruppe $G$ schwachnormal in $G$ ist, ist die schwachnormale Untergruppe $A$ von $G$ nicht notwendigerweise in $\mathfrak{N}_G(A)$ charakteristisch.

SATZ 1.8.: *Sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge von in $G$ schwachnormalen Untergruppen. Jede nicht primäre Untergruppe aus $\mathfrak{M}$ sei normal in $\{\mathfrak{M}\}$. Dann ist $\{\mathfrak{M}\}$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$.*

Beweis. Wir setzen $K = \{\mathfrak{M}\}$. Es ist $| K^G | < \infty$. Sei $x$ ein Element aus $G$ mit $K^x \leqslant \mathfrak{N}_G(K)$ und $A$ eine primäre Untergruppe aus $\mathfrak{M}$. Da $A$ eine schwachnormale Untergruppe von $L = \{K^x, K\} \triangleright K$ ist, folgt $A^K = A^L$ nach Lemma 1.6(3). Mit Hilfe von Lemma 1.6(2) folgt $A^L \cup (A^x)^L = A^L = A^K$, also gilt $A^x \leqslant K$. Sei nun $B$ eine nicht primäre Untergruppe aus $\mathfrak{M}$; es ist dann $B \triangleleft K$. Aus $B^x \leqslant \mathfrak{N}_G(K)$ und $B \triangleleft \mathfrak{N}_G(K)$ folgt $B^x \leqslant \mathfrak{N}_G(B)$; also gilt $B^x = B$. Für jede Untergruppe $C$ aus $\mathfrak{M}$ ist daher $C^x \leqslant K$, es folgt $K^x \leqslant K$. Wegen $| K^G | < \infty$ ergibt sich $K^x = K$. Daher ist $K$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$ und der Satz ist bewiesen.

LEMMA 1.9: *Sei $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge von primären, in $G$ schwachnormalen Untergruppen, und sei $Q$ ein Normalteiler von $G$. Dann ist $Q\{\mathfrak{M}\}/Q$ eine schwachnormale Untergruppe von $G/Q$.*

Beweis. Nach Satz 1.8 ist $Q\{\mathfrak{M}\}$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$; wegen $Q \leqslant \mathfrak{N}_G(Q\{\mathfrak{M}\})$ folgt nun die Behauptung aus Lemma 1.2.

LEMMA 1.10: *Sei $\mathfrak{K}$ ein p-Bund in der Gruppe $G$. Ist $Q$ ein*

*Normalteiler von $G$, so ist $[XQ/Q; X \in \mathfrak{K}]$ ein $p$-Bund in $G/Q$.*

Beweis. Sei $A$ aus $\mathfrak{K}$. Nach Satz 1.5 ist dann $\mathfrak{K} = A^G$, und nach Lemma 1.9 ist $AQ/Q$ eine schwachnormale Untergruppe von $G/Q$. Lemma 1.6(2) zeigt nun, daß $(AQ/Q)^{G/Q} = [XQ/Q; X \in \mathfrak{K}]$ ein $p$-Bund in $G/Q$ ist.

Definition 1.11: Die Menge der schwachnormalen Untergruppen der Gruppe $G$ bezeichnen wir mit $sn(G)$.

Lemma 1.12.: *Sei $G$ eine Gruppe und $D(G) = \bigcap_{X \in sn(G)} \mathfrak{N}_G(X)$. Dann ist*

$$D(G) = \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X = \bigcap_{X \in \mathfrak{T}} X$$

*mit*

$$\mathfrak{S} = [X; X \in sn(G), X = \mathfrak{N}_G(X)]$$

*und*

$$\mathfrak{T} = [X; X = \mathfrak{N}_G(X), | G : X | < \infty] .$$

*Ist $G$ endlich, so ist $D(G)$ das Hyperzentrum von $G$.*

Beweis. Ist X eine Untergruppe von $G$ und ist $X = \mathfrak{N}_G(X)$, so ist $X$ genau dann in $G$ schwachnormal, wenn $| G : X | < \infty$ ist. Damit ist die letzte der beiden zu beweisenden Gleichungen gezeigt. Es gilt $D(G) \leqslant \bigcap_{X \in \mathfrak{S}} X = E$.

Sei $x$ aus $E$ und sei $A$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$. Dann ist $\mathfrak{N}_G(A) = \mathfrak{N}_G(\mathfrak{N}_G(A))$ nach Lemma 1.7; ferner ist $\mathfrak{N}_G(A)$ schwachnormal in $G$. Also liegt $x$ in $\mathfrak{N}_G(A)$. Es folgt $E \leqslant D(G)$ und damit $E = D(G)$.

Sei nun $G$ endlich und $N$ ein Normalteiler von $G$ mit $N \leqslant D(G)$. Dann ist, mit $\mathfrak{U} = [F; F = \mathfrak{N}_G(F), F \geqslant N]$,

$$D(G/N) = \bigcap_{F \in \mathfrak{U}} (F/N) =$$

$$= (\bigcap_{F \in \mathfrak{U}} F)/N = (\bigcap_{F \in \mathfrak{T}} F)/N = D(G)/N;$$

es gilt daher $D(G/N) = D(G)/N$. Da also $D(G/D(G)) = 1$ ist, ist das Zentrum von $G/D(G)$ trivial. Es folgt, daß $D(G)$ das Hyperzentrum $H$ von $G$ enthält. Wegen $D(G/H) = D(G)/H$ genügt es also zu zeigen: Aus $Z(G) = 1$ folgt $D(G) = 1$. Wir nehmen an, daß $Z(G) = 1$ und $D(G) \neq 1$ ist.

Sei $p$ aus $c(D(G))$ und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $D(G)$. Dann normalisiert $P$ jede $p$-Sylowgruppe von $G$, also liegt $P$ im Durchschnitt aller $p$-Sylowgruppen von $G$. Daher ist $P$ die Menge aller $p$-Elemente von $D(G)$. Dies gilt für jedes $p$ aus $c(D(G))$, also ist $D(G)$ nilpotent. Für jedes $q$ aus $p'$ normalisiert $P$ jede $q$-Sylowgruppe von $G$; da $P$ normal in $G$ ist, zentralisiert $P$ jede $q$-Sylowgruppe von $G$. Sei $Q$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Da $P \leqslant Q$ in $Q$ normal ist, hat $P$ mit dem Zentrum von $Q$ einen nicht-trivialen Durchschnitt $Z$, es folgt $1 \neq Z \leqslant Z(G) = 1$. Mit diesem Widerspruch ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 1.13.: *Genau dann ist jede schwachnormale Untergruppe der Gruppe $G$ normal in $G$, wenn jedes endliche epimorphe Bild von $G$ nilpotent ist.*

Beweis. Aus Lemma 1.12 folgt: Genau dann ist jede schwachnormale Untergruppe von $G$ normal in $G$, wenn jede normalisatorgleiche Untergruppe von endlichem Index in $G$ gleich $G$ ist. Nach dem Satz von Poincaré (Specht, [9], p. 36) enthält jede Untergruppe von $G$ mit endlichem Index in $G$ einen Normalteiler $N$ von $G$ mit endlicher Faktorgruppe $G/N$. Da eine endliche Gruppe $H$ genau dann nilpotent ist, wenn jede echte Untergruppe von $H$ von ihrem Normalisator verschieden ist, folgt die Behauptung.

BEMERKUNG: Ist $G$ eine hyperzentrale Gruppe oder eine $S$-Gruppe, so ist also jede schwachnormale Untergruppe von $G$ normal in $G$. Ebenso ist in einer $N$-Gruppe jede schwachnormale Untergruppe normal.

SATZ 1.14.: *Sei $p$ eine Primzahl. Die Gruppe $G$ besitze nur endlich viele $p$-Sylowgruppen. Sei $A$ eine $p$-Untergruppe von $G$. Dann sind die folgenden Eigenschaften von $A$ äquivalent:*

(1) *$A$ ist eine schwachnormale Untergruppe von $G$;*

(2) *ist $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$ mit $A \leqslant S$, so ist $A$ normal in $\mathfrak{N}_G(S)$;*

(3) *ist $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$ mit $A \leqslant S$, so ist $A$ normal in $S$; es gibt eine $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ mit $A \leqslant P$ und $A \lhd \mathfrak{N}_G(P)$;*

(4) *ist $x$ ein Element aus $G$ und $\{A, A^x\}$ eine $p$-Gruppe, so ist $A = A^x$;*

(5) *es gibt eine $p$-Sylowgruppe $R$ von $G$ mit $A \leqslant R$, so daß $A$ die einzige Untergruppe aus $A^G$ ist, welche in $R$ liegt;*

(6) *$A^G$ ist ein $p$-Bund in $G$.*

Beweis. Sei (1) erfüllt und $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$ mit $A \leqslant S$. Nach Lemma 1.13 ist $A$ in $S$ normal. Ist $h$ aus $\mathfrak{N}_G(S)$, so ist $A^h \leqslant S$, also $A^h \leqslant \mathfrak{N}_G(A)$. Wegen (1) folgt $A^h = A$, also gilt $A \lhd \mathfrak{N}_G(S)$. Aus (1) folgt daher (2).

Sei (2) erfüllt. Ist $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$ mit $A \leqslant S$, so gilt $A \lhd \mathfrak{N}_G(S)$, also a fortiori $A \lhd S$. Es gibt eine $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ mit $A \leqslant P$. Dann ist $A \lhd \mathfrak{N}_G(P)$. Es gilt also (3).

Sei (3) erfüllt. Sei $x$ ein Element aus $G$ und $\{A, A^x\}$ eine $p$-Gruppe; weiter sei $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$, welche $\{A, A^x\}$ enthält. Da $G$ nur endlich viele $p$-Sylowgruppen besitzt, sind je zwei $p$-Sylowgruppen von $G$ in $G$ konjugiert; es gibt ein $h$ in $G$ mit $S^h = P$. Sei $k = h^{-1}$. Dann ist $A \leqslant P^k$, also $A$ normal in $P^k$ wegen (3), und damit $A^h$ ein Normalteiler von $P$. Ebenso folgt $A^{xh} \lhd P$, ferner gilt $A \lhd P$.

Seien $X$ und $Y$ Untergruppen von $P$ mit $X, Y \lhd P$ und $X = Y^t$ für ein $t$ aus $G$. Dann gilt $\{P, P^t\} \leqslant \mathfrak{N}_G(X)$. Die Gruppen $P$ und $P^t$ sind $p$-Sylowgruppen von $\mathfrak{N}_G(X)$. Da $| P^G | < \infty$ ist, hat $P$ in $\mathfrak{N}_G(X)$ nur endlich viele Konjugierte; je zwei $p$-Sylowgruppen von $\mathfrak{N}_G(X)$ sind in $\mathfrak{N}_G(X)$ konjugiert. Daher gibt es ein $z$ in $\mathfrak{N}_G(X)$ mit $P^t = P^z$. Es ist $y = zt^{-1}$ aus $\mathfrak{N}_G(P)$, und es gilt $X^y = Y$.

Für $X = A$ und $Y = A^h$ ergibt sich $A^h = A^v$ für ein geeignetes $v$ aus $\mathfrak{N}_G(P)$. Da $A$ in $\mathfrak{N}_G(P)$ normal ist, folgt $A = A^v = A^h$. Ebenso folgt $A = A^{xh}$; damit haben wir $A = A^x$. Daher gilt (4).

Sei (4) erfüllt. Da $A$ in einer $p$-Sylowgruppe $R$ von $G$ enthalten ist, folgt (5).

Es gelte (5). Sei $g$ aus $G$ und $A^g \leqslant \mathfrak{N}_G(A)$. Dann ist $\{A^g, A\}$ eine $p$-Untergruppe von $G$, und es gibt eine $p$-Sylowgruppe $S$ von $G$ mit $\{A^g, A\} \leqslant S$. Es gibt ein $t$ in $G$ mit $S^t = R$. Dann gilt $\{A, A^t, A^{gt}\} \leqslant R$, also $A = A^t = A^{gt}$; es folgt $A = A^g$. Wegen $\mathfrak{N}_G(R) \leqslant \mathfrak{N}_G(A)$ ist ferner $| G : \mathfrak{N}_G(A) | \leqslant | G : \mathfrak{N}_G(R) | <$

$<\infty$. Also ist $A$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$; es gilt (1).

Die Gleichwertigkeit von (1) und (6) wurde schon in Lemma 1.6 gezeigt. Damit ist Satz 1.14 bewiesen.

Bemerkung 1.15.: Ist $X$ eine (primäre) schwachnormale Untergruppe der Gruppe $G$ und $A$ ein Normalteiler von $G$, so folgt nicht, daß $X \cap A$ in $A$ schwachnormal ist; ein Beispiel hierzu liefert die symmetrische Gruppe des Grades 4. Seien $P$ und $Q$ zwei $p$-Sylowgruppen der endlichen Gruppe $G$ und $D = P \cap Q$ sei maximaler Durchschnitt zweier $p$-Sylowgruppen von $G$. Dann ist $D$ nicht notwendigerweise in $P$ schwachnormal. Ist jedoch $D$ in $P$ schwachnormal, also nach Lemma 1.13 in $P$ normal, so ist $D$ auch in $Q$ normal und also in $Q$ schwachnormal.

Die $p$-Sylowgruppen einer nilpotenten schwachnormalen Untergruppe von $G$ sind nicht notwendigerweise in $G$ schwachnormal, wie die zyklischen Untergruppen der Ordnung 6 in der symmetrischen Gruppe des Grades 5 zeigen. Ist $Y$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$ und $Z$ eine vollinvariante Untergruppe von $Y$, so muß also $Z$ nicht in $G$ schwachnormal sein.

Seien $X$ und $Y$ Untergruppen von $G$, und die Untergruppe $A \leqslant X \cap Y$ sei schwachnormal in $X$ und in $Y$. Dann folgt nicht, daß $A$ in $\{X, Y\}$ schwachnormal ist; dies gilt auch, wenn man zusätzlich voraussetzt, daß etwa $A$ normal in $Y$ und $A$ primär ist; ein Beispiel hierzu liefert die symmetrische Gruppe des Grades 5.

Sei $\mathfrak{K}$ die Menge der $p$-Sylowgruppen der endlichen Gruppe $G$. Seien $X$ und $Y$ Untergruppen aus $\mathfrak{K}$, und sei $Z \leqslant Y$ und $\{Z, X\} \leqslant B \leqslant G$. Dann gibt es ein $b$ in $B$ mit $Z^b \leqslant X$. Ist dagegen $\mathfrak{K}$ ein beliebiger $p$-Bund in $G$, so gibt es nicht immer ein $b$ in $B$ mit $Z^b \leqslant X$, wie der 2-Bund der zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 in der symmetrischen Gruppe des Grades 4 zeigt. In dieser Tatsache liegt wohl der Grund für die Schwierigkeit, Satz 2.4 ohne die Voraussetzung (2) zu beweisen, (falls Satz 2.4 überhaupt ohne diese Voraussetzung richtig ist).

## 2. $\pi$-Bünde.

DEFINITION 2.1.: Sei $G$ eine Gruppe und $\mathfrak{K}$ eine Menge von Untergruppen von $G$, weiter sei $p$ eine Primzahl und $N$ ein Normalteiler von $G$. Dann setzen wir
$\mathfrak{K}/N = [XN/N;\ X \in \mathfrak{K}]$ und
$\mathfrak{K}_p$ = Menge aller Untergruppen von $G$, die $p$-Sylowgruppe mindestens einer Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ sind.

DEFINITION 2.2.: Sei $G$ eine Gruppe und $\pi$ eine Menge von Primzahlen. Ein $\pi$-Bund in $G$ ist eine nicht leere Menge $\mathfrak{K}$ von Untergruppen von $G$ mit den Eigenschaften

($a$) Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ sind $\pi$-Gruppen;
($b$) $\mathfrak{K}^G = \mathfrak{K}$;
($c$) für jedes $p$ aus $\pi$ ist $\mathfrak{K}_p$ ein $p$-Bund in $G$.

BEMERKUNG: Sei $G$ eine endliche Gruppe. Besitzt $G$ eine $\pi$ Hallgruppe, so bildet die Menge der $\pi$-Hallgruppen von $G$ einen $\pi$-Bund in $G$. Je zwei Untergruppen aus einem $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ in $G$ haben die gleiche Ordnung; aber es sind nicht notwendigerweise je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ isomorph (P. Hall, [8], p. 287).

Besteht $\pi$ aus genau einer Primzahl $p$, so sind $p$-Bund und $\pi$-Bund äquivalente Begriffe.

LEMMA 2.3.: *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in $G$. Ist $Q$ ein Normalteiler von $G$, so ist $\mathfrak{K}/Q$ ein $\pi$-Bund in $G/Q$.*

Beweis. Untergruppen aus $\mathfrak{K}/Q$ sind $\pi$-Gruppen, und es ist $(\mathfrak{K}/Q)^{G/Q} = \mathfrak{K}/Q$. Da $G$ endlich ist, gilt $(\mathfrak{K}/Q)_p = \mathfrak{K}_p/Q$ für jedes $p$ aus $\pi$, und nach Lemma 1.10 ist $\mathfrak{K}_p/Q$ ein $p$-Bund in $G/Q$. Damit ist das Lemma bewiesen.

SATZ 2.4.: *Sei $G$ eine endliche Gruppe und $\pi$ eine Menge von Primzahlen. Sei $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in $G$ mit den Eigenschaften*

(1) *in $\mathfrak{K}$ gibt es eine nilpotente Untergruppe;*

(2) *ist $X$ aus $\mathfrak{K}$, so gibt es für jedes Paar $p$, $q$ von Primzahlen aus $\pi$ eine $[p, q]$-Hallgruppe von $X$.*

*Dann ist $\mathfrak{K}$ eine Klasse in $G$ konjugierter Untergruppen.*

Beweis. Sei $H$ eine nilpotente Untergruppe aus $\mathfrak{K}$. Wir können annehmen, daß $0 < |\pi| < \infty$ und $H \neq 1$ ist.

Fall 1: *Es ist* $\pi = [p]$. Die Behauptung ist dann eine Folge von Satz 1.5.

Fall 2: *Es ist* $\pi = [p, q]$ *mit* $p \neq q$. Wir nehmen in diesem Fall an, daß der Satz für alle Gruppen richtig ist, deren Ordnung kleiner als $0(G)$ ist. Sei $Y$ eine Untergruppe aus $\mathfrak{K}$. Dann ist $0(Y) = p^\alpha q^\beta$ mit ganzen Zahlen $\alpha$, $\beta \geqslant 0$. Nach einem Satz von Burnside ist $Y$ auflösbar und enthält also einen Normalteiler $R \lhd Y$ von Primzahlpotenzordnung; o.B.d.A. ist $0(R) = p^\gamma$, mit $0 < \gamma \leqslant \alpha$. Sei $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $Y$. Dann ist $R$ normal in $P$. Sei $H_p$ die eindeutig bestimmte $p$-Sylowgruppe von $H$. Nach Satz 1.5 gibt es ein Element $a$ in $G$ mit $(H_p)^a = P$. Da $H$ nilpotent und $R \lhd P$ ist, gilt $H^a \leqslant \mathfrak{N}_G(R)$. Sei $K = \{Y, H^a\}$; es ist $R$ normal in $K$. Sei $\mathfrak{H}$ die Menge aller Untergruppen aus $\mathfrak{K}$, die in $K$ enthalten sind. Die Untergruppen $Y$ und $H^a$ von $K$ liegen in $\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{H}$ ist ein $\pi$-Bund in $K$. Nach Lemma 2.3 ist $\mathfrak{H}/R$ ein $\pi$-Bund in $K/R$, der die nilpotente Untergruppe $H^a/R$ enthält und mutatis mutandis die Bedingung (2) erfüllt. Wegen $0(R) > 1$ gilt $0(K/R) < 0(K) \leqslant 0(G)$. Nach Annahme gibt es daher ein $b$ in $K$ mit $(Y/R)^{bR} = H^a/R$, das heißt $Y^b = H^a$. Also ist $Y^g = H$ für $g = ba^{-1}$ aus $G$.

Fall 3: *In* $\pi$ *liegen wenigstens* 3 *Primzahlen.* Sei $p$ aus $\pi$ und $Y$ aus $\mathfrak{K}$. Sei $q \neq p$ eine Primzahl aus $\pi$ und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $Y$. Wegen (2) gibt es eine $[p, q]$-Hallgruppe $S$ von $Y$. Da $S$ in $G$ zu der eindeutig bestimmten $[p, q]$-Hallgruppe von $H$ konjugiert ist (Fall 2), ist $S$ nilpotent. Wir können annehmen, daß $P \leqslant S$ ist. Also gibt es zu jedem $q$ aus $\pi$ eine $q$-Sylowgruppe von $Y$, die $P$ normalisiert. Da $Y$ eine $\pi$-Gruppe ist, gilt daher $P \lhd Y$. Für jedes $p$ aus $\pi$ gibt es also eine normale $p$-Sylowgruppe von $Y$, folglich ist $Y$ nilpotent. Ist $\tau$ eine nicht leere Teilmenge von $\pi$, so werden mit $Y_\tau$ bzw. $H_\tau$ die eindeutig bestimmten $\tau$-Hallgruppen von $Y$ bzw. von $H$ bezeichnet. Wegen der bereits behandelten Fälle 1 und 2 können wir annehmen, daß für jede echte Teilmenge $\tau \neq \varnothing$ von $\pi$ gilt, daß $Y_\tau$ zu $H_\tau$ in $G$ konjugiert ist. Sei nun $p$ eine Primzahl aus $\pi$ und $\tau = \pi \setminus [p]$. Dann gibt es ein Element $a$ aus $G$ mit $Y_\tau = (H_\tau)^a$; es folgt $\{Y_p, (H_p)^a\} \leqslant \leqslant \mathfrak{N}_G(Y_\tau)$. Es gibt in $\mathfrak{N}_G(Y_\tau)$ ein Element $b$ mit $Y_p = (H_p)^{ab}$. Daher ist

$$H^{ab} = (H_\tau H_p)^{ab} = (H_\tau)^{ab}(H_p)^{ab} = (H_\tau)^a Y_p = Y_\tau Y_p = Y,$$

also $Y^g = H$ für $g = (ab)^{-1}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Bemerkung: Die Bedingung (2) von Satz 2.4 ist insbesondere dann erfüllt, wenn alle Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ auflösbar sind. Man kann die Bedingung (1) nicht durch die schwächere Forderung der Existenz einer überauflösbaren Untergruppe in $\mathfrak{K}$ ersetzen. Dies gilt auch, wenn man zusätzlich verlangt, daß alle Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ $\pi$-Hallgruppen von $G$ sind. Siehe (P. Hall, [8], p. 287).

Definition 2.5.: Sei $\pi$ eine Menge von Primzahlen. Dann bildet die Menge $\Sigma = [S_p;\, p \in \pi]$ von Untergruppen der Gruppe $G$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$, wenn folgende Bedingungen ($a$) und ($b$) erfüllt sind:

($a$) Für jedes $p$ aus $\pi$ ist $S_p$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$;

($b$) für jede endliche Teilmenge $\tau$ von $\pi$ ist $\{S_p;\, p \in \tau\}$ eine $\tau$-Gruppe.

Die $\pi$-Sylowbasis $\Sigma$ von $G$ ist vollständig, wenn $G = \{S_p;\, p \in \pi\}$ ist.

Definition 2.6.: Ist $\Sigma = [S_p;\, p \in \pi]$ eine $\pi$-Sylowbasis der Untergruppe $H$ der Gruppe $G$, so heißt die Gruppe $M(\Sigma, G) = \bigcap_{p \in \pi} \mathfrak{N}_G(S_p)$ der $G$-Normalisator der $\pi$-Sylowbasis $\Sigma$ von $H$.

Die Gruppe $N(\Sigma, G) = \bigcap_{g \in G} (M(\Sigma, G))^g$ heißt der Sylownormalisator der $\pi$-Sylowbasis $\Sigma$ von $H$ in $G$. Es ist $N(\Sigma, G)$ normal in $G$.

Die $\pi$-Untergruppe $H$ der Gruppe $G$ heißt $\pi$-Hallgruppe von $G$, wenn für jedes $p$ aus $\pi$ jede $p$-Sylowgruppe von $H$ auch $p$-Sylowgruppe von $G$ ist.

Eine endliche Gruppe $G$ heißt $\pi$-separabel, wenn die Ordnung jedes Kompositionsfaktors von $G$ durch höchstens eine Primzahl aus $\pi$ teilbar ist. Ist $G$ eine endliche $\pi$-separable Gruppe, so besitzt $G$ $\pi$-Sylowbasen, und je zwei $\pi$-Sylowbasen von $G$ sind in $G$ konjugiert (P. Hall, [8], Th. A2 und Cor. D5.2). Untergruppen $\pi$-separabler Gruppen sind $\pi$-separable Gruppen.

LEMMA 2.7.: *Sei $S$ eine $p$-Sylowgruppe der Torsionsgruppe $G$ und $A$ ein Normalteiler von $G$ mit den Eigenschaften*

(*a*) $A \leqslant \mathfrak{N}_G(S)$;

(*b*) *$G/A$ ist eine lokal endliche Gruppe mit Minimalbedingung.*

*Dann ist $SA/A$ eine $p$-Sylowgruppe von $G/A$.*

Beweis. Die $p$-Sylowgruppen von $G/A$ sind lokal endliche $p$-Gruppen, die der Minimalbedingung genügen, also hyperzentral (Specht, [9], p. 378) und daher $N$-Gruppen. Angenommen, $T = SA/A$ ist keine $p$-Sylowgruppe von $H = G/A$. Dann gibt es in $H$ ein Element $h = gA$ mit $0(h) = p^\alpha, \alpha > 0$, das in $\mathfrak{N}_H(T) \setminus T$ liegt. Wir können $0(g) = p^\beta$, $\beta > 0$, annehmen. Sei $s$ ein Element aus $S$. Dann gilt $s^g = at$ für geeignete Elemente $a$ aus $A$ und $t$ aus $S$. Also liegt das $p$-Element $s^g$ in $\mathfrak{N}_G(S)$, daher ist $s^g$ aus $S$. Wir haben also $S^g \leqslant S$ und somit $S^g = S$. Es folgt $g \in S$, was unmöglich ist. Damit ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 2.8.: *Besitzt die $\pi$-Sylowbasis $\Sigma$ der Untergruppe $H$ der Gruppe $G$ nur endlich viele Konjugierte in $G$, so ist $G/N(\Sigma, G)$ eine endliche Gruppe.*

Beweis. Wegen $|\Sigma^G| = |G : M(\Sigma, G)|$ ist $|G : M(\Sigma, G)| < \infty$. Dann ist nach dem Satz von Poincaré (Specht, [9], p. 36) auch $|G : (\bigcap_{g \in G} (M(\Sigma, G))^g)| = |G : N(\Sigma, G)| < \infty$.

SATZ 2.9.: *Sei $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in der Gruppe $G$, und in $\mathfrak{K}$ gebe es eine Untergruppe $H$, welche eine $\pi$-Sylowbasis $\Sigma$ besitzt. Sei $N = N(\Sigma, G)$. Dann gilt*

(*a*) *ist $p$ aus $\pi$, und ist $L$ eine Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $L$, so ist $PN/N$ eine $p$-Sylowgruppe von $LN/N$;*

(*b*) *$\mathfrak{K}/N$ ist ein $\pi$-Bund in $G/N$;*

(*c*) *ist $K$ aus $\mathfrak{K}$ und $KN = HN$, so ist $K = H$;*

(*d*) *besitzt die Untergruppe $K$ aus $\mathfrak{K}$ eine $\pi$-Sylowbasis $\Gamma$ und gilt $\Gamma/N = \Sigma/N$, so ist $\Gamma = \Sigma$;*

(*e*) *ist $H$ eine $\pi$-Hall'sche Untergruppe von $G$ und ist $M$ eine $\pi$-Untergruppe von $G$ mit $M \leqslant HN$, so ist $M \leqslant H$.*

Beweis. Ist $L$ aus $\mathfrak{K}$, so ist $LN/N$ eine $\pi$-Gruppe. Sei $p$ aus $\pi$ und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $L$. Da $P$ eine schwachnormale

Untergruppe von $G$ ist, ist $PN/N$ nach Lemma 1.9 schwachnormal in $LN/N$. Daher ist $PN/N$ normal in jeder $PN/N$ enthaltenden $p$-Sylowgruppe von $LN/N$ (Lemma 1.13). Wäre $PN/N$ keine $p$-Sylowgruppe von $LN/N$, so gäbe es, da $L$ eine Torsionsgruppe ist, in $L$ ein Element $k$ von $p$-Potenzordnung mit $kN \notin PN/N$ und $(PN)^k = PN$. Es folgt $P^k \leqslant PN \leqslant \mathfrak{N}_G(P)$, also $P^k = P$. Dann liegt aber das $p$-Element $k$ aus $L$ in $\mathfrak{N}_L(P)$, was unmöglich ist. Also ist $PN/N$ eine $p$-Sylowgruppe von $LN/N$; es gilt ($a$). Wegen Satz 1.5 folgt nun $\mathfrak{K}_p/N = (\mathfrak{K}/N)_p$, und nach Lemma 1.10 ist $(\mathfrak{K}/N)_p$ ein $p$-Bund in $G/N$. Dies gilt für jedes $p$ aus $\pi$. Also ist $\mathfrak{K}/N$ ein $\pi$-Bund in $G/N$, da auch $(\mathfrak{K}/N)^{G/N} = \mathfrak{K}/N$ wegen $\mathfrak{K}^G = \mathfrak{K}$ gilt. Damit ist ($b$) bewiesen.

Sei nun $K$ eine Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ mit $KN = HN$. Sei $p$ aus $\pi$ und $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $H$; ferner sei $T$ eine $p$-Sylowgruppe von $K$. Es gibt nach Satz 1.5 ein $g$ in $HN$ mit $S^g = T$. Wegen $N \leqslant \mathfrak{N}_G(S)$ folgt $S^g \leqslant H$. Da die $\pi$-Untergruppe $K$ von ihren sämtlichen Sylow'schen Untergruppen erzeugt wird, folgt $K \leqslant H$. Entsprechend folgt $H \leqslant K$, also gilt $H = K$, und wir haben ($c$) bewiesen.

Die Untergruppe $K$ aus $\mathfrak{K}$ besitze eine $\pi$-Sylowbasis $\Gamma$ mit $\Gamma/N = \Sigma/N$. Sei $p$ aus $\pi$ und sei $A$ eine $p$-Sylowgruppe von $K$ aus $\Gamma$ und $B \in \Sigma$ eine $p$-Sylowgruppe von $H$. Aus $AN/N = BN/N$ folgt $AN = BN$, also $A \leqslant \mathfrak{N}_G(B)$ und damit $A = B$. Wir haben also $\Sigma = \Gamma$; es gilt ($d$).

Sei nun die Voraussetzung von ($e$) erfüllt. Sei $p$ eine Primzahl aus $\pi$ und $g$ ein Element von $p$-Potenzordnung aus $M$. Sei $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $H$. Es folgt $P^H = P^{NH} = P^{HN}$; da $P$ auch eine $p$-Sylowgruppe von $HN$ ist, ist $P^{HN}$ nach Satz 1.5 die Menge der $p$-Sylowgruppen von $HN$; jede $p$-Sylowgruppe von $HN$ ist also auch $p$-Sylowgruppe von $H$. Da $g$ in einer $p$-Sylowgruppe von $HN$ liegt, folgt $g \in H$. Dies gilt für jedes $p$ aus $\pi$; da $M$ eine $\pi$-Gruppe ist, folgt $M \leqslant H$. Also gilt auch ($e$) und Satz 2.9 ist bewiesen.

FOLGERUNG 2.10.: *Sei $G$ eine Gruppe und $\pi$ eine Menge von Primzahlen. Sei $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in $G$, und in $\mathfrak{K}$ gebe es eine $S$-Gruppe $H$, welche nur endlich viele Konjugierte in $G$ besitzt. Dann sind je* *zwei Untergruppen aus* $\mathfrak{K}$ *in* $G$ *konjugiert, falls mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(1) *Untergruppen aus* $\mathfrak{K}$ *sind auflösbar;*

(2) $2 \notin \pi$;

(3) *ist* $\Sigma$ *die eindeutig bestimmte* $\pi$*-Sylowbasis von* $H$ *und* $N = N(\Sigma, G)$, *so gibt es zu jedem* $K \in \mathfrak{K}$ *eine natürliche Zahl* $k$ *mit* $K^{(k)} \leqslant N$;

(4) *sind* $p$ *und* $q$ *verschiedene Primzahlen aus* $\pi$, *so enthält jede Untergruppe* $K$ *aus* $\mathfrak{K}$ *eine* $[p, q]$*-Hallgruppe von* $K$.

Beweis. Sei $\Sigma$ die eindeutig bestimmte $\pi$-Sylowbasis von $H$ und $N = N(\Sigma, G)$ ihr Sylow-Normalisator in $G$. Aus $| G : \mathfrak{N}_G(H) | < < \infty$ und Lemma 2.8 folgt, daß $G/N$ eine endliche Gruppe ist. Nach Satz 2.9($b$) ist $\mathfrak{K}/N$ ein $\pi$-Bund in der endlichen Gruppe $G/N$. Ist eine der Bedingungen (1), (2) oder (3) erfüllt, so sind sämtliche Untergruppen aus $\mathfrak{K}/N$ auflösbar, (zu (2) vergleiche man Feit-Thompson, [4]); ist (4) erfüllt, so folgt aus Satz 2.9($a$), daß jede Untergruppe $KN/N$ aus $\mathfrak{K}/N$ eine $[p, q]$-Hallgruppe besitzt, für jedes Paar verschiedener Primzahlen $p$, $q$ aus $\pi$. Da $HN/N \in \mathfrak{K}/N$ eine nilpotente Gruppe ist, können wir Satz 2.4 anwenden und erhalten, daß je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}/N$ in $G/N$ konjugiert sind; nach Satz 2.9($c$) sind dann je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ in $G$ konjugiert.

FOLGERUNG 2.11 (Golberg, [5]): *Die Gruppe* $G$ *besitze eine* $\pi$*-Sylowbasis* $\Sigma$, *für die* $G/N(\Sigma, G)$ *eine endliche* $\pi$*-separable Gruppe ist. Dann sind je zwei* $\pi$*-Sylowbasen von* $G$ *in* $G$ *konjugiert.*

Beweis. Sei $\Gamma$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$. Da jede Untergruppe aus $\Sigma$ nur endlich viele Konjugierte in $G$ hat, folgt aus Satz 1.5, daß $\{\Sigma\}^G \cup \{\Gamma\}^G$ ein $\pi$-Bund in $G$ und $N(\Gamma, G) = N(\Sigma, G)$ ist. $\Sigma$ ist eine $\pi$-Sylowbasis von $\{\Sigma\}$ und $\Gamma$ ist eine $\pi$-Sylowbasis von $\{\Gamma\}$. Wir setzen $N = N(\Sigma, G)$. Wegen Lemma 2.7 sind $\Gamma/N$ und $\Sigma/N$ $\pi$-Sylowbasen der endlichen Gruppe $G/N$. Da $G/N$ eine $\pi$-separable Gruppe ist, sind $\Gamma/N$ und $\Sigma/N$ in $G/N$ konjugiert; daher sind nach Satz 2.9($d$) auch $\Gamma$ und $\Sigma$ in $G$ konjugiert.

FOLGERUNG 2.12 (R. Baer, [1]): *Die* $\pi$*-Gruppe* $G$ *besitze eine*

*$\pi$-Sylowbasis $\Sigma$, welche in $G$ nur endlich viele Konjugierte besitzt. Dann sind je zwei $\pi$-Sylowbasen von $G$ in $G$ konjugiert.*

Beweis. Sei $\Gamma$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$ und $N = N(\Sigma, G)$. Wie im Beweis von Folgerung 2.11 ergibt sich, daß $\Gamma/N$ und $\Sigma/N$ $\pi$-Sylowbasen der endlichen $\pi$-Gruppe $G/N$ sind. Nach (P. Hall, [7]) ist dann $G/N$ eine auflösbare Gruppe, und $\Gamma/N$ ist zu $\Sigma/N$ in $G/N$ konjugiert. Nach Satz 2.9($d$) sind daher $\Gamma$ und $\Sigma$ in $G$ konjugiert.

DEFINITION 2.13.: Sei $\pi$ eine Menge von Primzahlen und $\varphi$ eine teilweise Ordnung von $\pi$. Für jedes $p$ aus $\pi$ sei $(\varphi, p) = [q; q \in \pi, q\varphi p]$. Es ist $p$ aus $(\varphi, p)$. Die endliche Gruppe $G$ ist $(\pi, \varphi)$-verstreut, wenn $G$ für jedes $p$ aus $\pi$ eine normale $(\varphi, p)$-Hall'sche Untergruppe besitzt (R. Baer, [2]).

Ist $G$ eine $(\pi, \varphi)$-verstreute Gruppe, so ist auch jede Untergruppe und jede Faktorgruppe von $G$ eine $(\pi, \varphi)$-verstreute Gruppe. $(\pi, \varphi)$-verstreute $\pi$-Gruppen sind auflösbar.

SATZ 2.14.: *Sei $\pi$ eine Menge von Primzahlen und $\varphi$ eine teilweise Ordnung von $\pi$. Sei $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in der endlichen Gruppe $G$. Jede Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ sei $(\pi, \varphi)$-verstreut. Sei $H$ eine $(\pi, \varphi)$-verstreute $\pi$-Untergruppe von $G$. Für jedes $p$ aus $c(H)$ gebe es eine in $\mathfrak{K}_p$ enthaltene $p$-Sylowgruppe von $H$. Ist $K$ eine Untergruppe aus $\mathfrak{K}$, so gibt es ein $g$ aus $G$ mit $H^g \leqslant K$.*

Beweis. Wir können $|\, c(H) \,| \geqslant 1$ annehmen. Ferner können wir annehmen, daß der Satz für alle Gruppen $L$ mit $0(L) < 0(G)$ richtig ist. Sei $q$ eine bzgl. $\varphi$ minimale Primzahl aus $c(H)$ und $Q$ eine $q$-Sylowgruppe von $H$. Sei $T$ eine $c(H)$-Hall'sche Untergruppe der auflösbaren Gruppe $K$. Wegen Satz 1.5 können wir $Q \leqslant T$ annehmen; dann ist $Q$ normal in $\{H, T\} = S$. Nach Annahme und Lemma 2.3 gibt es ein Element $g$ aus $S$ mit $(H/Q)^{gQ} \leqslant T/Q$, es folgt $H^g = T \leqslant K$. Damit ist Satz 2.14 bewiesen.

FOLGERUNG 2.15.: *Sei $\varphi$ eine teilweise Ordnung der Primzahlmenge $\pi$, und sei $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in der endlichen Gruppe $G$. Jede Untergruppe aus $\mathfrak{K}$ sei $(\pi, \varphi)$-verstreut. Dann sind je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ in $G$ konjugiert.*

Unmittelbare Folgerung aus Satz 2.14 sind auch das Ergebnis von (G. Zappa, [10]) und Theorem $A1$ aus (P. Hall, [8]).

Die Gruppe $G$ sei Erweiterung einer lokal endlichen $S$-Gruppe durch eine endliche $\pi$-separable Gruppe. Dann ist jede Untergruppe und jede Faktorgruppe von $G$ ebenfalls eine endliche $\pi$-separable Erweiterung einer lokal endlichen $S$-Gruppe. Jede endliche Teilmenge von $G$ erzeugt eine endliche $\pi$-separable Untergruppe von $G$.

Jede endliche $\pi$-separable Gruppe $H$ besitzt $\pi$-Hallgruppen; je zwei $\pi$-Hallgruppen von $H$ sind in $H$ konjugiert, und jede $\pi$-Untergruppe von $H$ liegt in einer $\pi$-Hallgruppe von $H$ (*P.* Hall, [8], Cor. D5.2).

LEMMA 2.16.: *Die Gruppe $G$ sei Erweiterung einer lokal endlichen $S$-Gruppe $A$ durch eine endliche $\pi$-separable Gruppe. Dann gilt:*

(*a*) *$G$ besitzt eine $\pi$-Sylowbasis $\Gamma$, in der je zwei Untergruppen vertauschbar sind. Ist $G$ eine $\pi$-Gruppe, so gibt es eine vollständige $\pi$-Sylowbasis von $G$;*

(*b*) *Jede $\pi$-Sylowbasis einer Untergruppe von $G$ läßt sich zu einer $\pi$-Sylowbasis von $G$ fortsetzen;*

(*c*) *Je zwei $\pi$-Sylowbasen von $G$ sind in $G$ konjugiert;*

(*d*) *Ist $\Sigma$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$, so ist $\{\Sigma\}$ eine $\pi$-Hallgruppe von $G$. Jede $\pi$-Untergruppe von $G$ ist in einer $\pi$-Hallgruppe von $G$ enthalten. Jede $\pi$-Hallgruppe von $G$ ist maximale $\pi$-Untergruppe von $G$, und jede maximale $\pi$-Untergruppe von $G$ ist eine $\pi$-Hallgruppe von $G$.*

Beweis. Für jedes $p$ aus $\pi$ bezeichne $A_p$ die eindeutig bestimmte $p$-Sylowgruppe von $A$. Sei $\mathfrak{A}$ ein Vertretersystem von $G$ nach $A$, und sei $E = \{\mathfrak{A}\}$. Die endliche $\pi$-separable Gruppe $E$ besitzt eine $\pi$-Sylowbasis $\Sigma = [S_p;\ p \in \pi]$, in der je zwei Untergruppen vertauschbar sind. Für jedes $p$ aus $\pi$ ist $S_pA/A$ eine $p$-Sylowgruppe von $G/A$, und $S_pA_p$ ist eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Es folgt, daß $\Gamma = [A_pS_p;\ p \in \pi]$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$ ist, in der je zwei Untergruppen vertauschbar sind. $\Gamma$ ist vollständig, falls $G$ eine $\pi$-Gruppe ist. Damit ist (*a*) bewiesen.

Sei nun $M$ eine Untergruppe von $G$ und $\Sigma = [S_p;\ p \in \pi]$ eine $\pi$-Sylowbasis von M. Für jedes $p$ aus $\pi$ sei $\mathfrak{A}(p)$ ein Vertretersystem von $S_pA_p$ nach $A_p$; für $p$ aus $\pi \setminus c(G/A)$ setzen wir dabei $\mathfrak{A}(p) = [1]$. Sei $\Gamma = [T_p;\ p \in \pi]$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$, und für jedes $p$ aus $\pi$ sei $\mathfrak{B}(p)$ ein Vertretersystem von $T_p$ nach $A_p$; für jedes $p$ aus $\pi \setminus c(G/A)$ wählen wir $\mathfrak{B}(p) = [1]$. Dann ist $E = \{\mathfrak{A}(p) \cup \mathfrak{B}(p); p \in \pi\}$ eine endliche $\pi$-separable Gruppe, und für jede Teilmenge $\tau$ von $\pi$ sind $\{\mathfrak{A}(p); p \in \tau\}$ und $\{\mathfrak{B}(p); p \in \tau\}$ $\tau$-Untergruppen von E. Daher gibt es $\pi$-Sylowbasen $P = [R_p; p \in \pi]$ und $\Xi = [X_p; p \in \pi]$ von $E$ mit $R_p \geqslant \{\mathfrak{A}(p)\}$ und $X_p \geqslant \{\mathfrak{B}(p)\}$, für jedes $p$ aus $\pi$. Ferner gibt es ein Element $g$ in $E$ mit $P = \Xi^g$, daher gilt $\{\mathfrak{A}(p)\} \leqslant (X_p)^g$ für jedes $p$ aus $\pi$. Für jedes $p$ aus $\pi$ ist also

$$S_p \leqslant S_p A_p = \{\mathfrak{A}(p)\} A_p \leqslant A_p(X_p)^g = (T_p)^g . \qquad (*)$$

Da $\Gamma^g$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$ ist, ist $(b)$ bewiesen. Ist $M = G$, also $\Sigma$ eine $\pi$-Sylowbasis von $G$, so folgt $\Sigma = \Gamma^g$ aus der Beziehung (*). Da $\Gamma$ eine beliebige $\pi$-Sylowbasis von $G$ war, ist auch $(c)$ bewiesen.

Die Behauptung $(d)$ folgt aus den Aussagen $(a)$, $(b)$ und $(c)$. Damit ist Lemma 2.16 bewiesen.

SATZ 2.17.: *Die Gruppe $G$ sei Erweiterung einer lokal endlichen $S$-Gruppe durch eine endliche $\pi$-separable Gruppe. Ist $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in $G$, so sind je zwei Untergruppen aus $\mathfrak{K}$ in $G$ konjugiert.*

Beweis. Seien $H$ und $K$ Untergruppen aus $\mathfrak{K}$. Nach Lemma 2.16$(a)$ gibt es $\pi$-Sylowbasen $\Sigma = [S_p; p \in \pi]$ von $H$ und $\Gamma = [T_p; p \in \pi]$ von $K$, und $\Sigma$ und $\Gamma$ lassen sich zu $\pi$-Sylowbasen $\Xi = [X_p; p \in \pi]$ und $P$ von $G$ fortsetzen (Lemma 2.16$(b)$). Nach Lemma 2.16$(c)$ gibt es ein $g$ in $G$ mit $\Xi = P^g$. Also gilt $\{S_p, (T_p)^g\} \leqslant X_p$ für jedes $p$ aus $\pi$; aus Satz 1.14(3) folgt $S_p = (T_p)^g$ für jedes $p$ aus $\pi$. Mit Hilfe von Lemma 2.16$(d)$ folgt $H = K^g$.

FOLGERUNG 2.18.: *Ist $G$ eine endliche $\pi$-separable Gruppe, $\mathfrak{K}$ ein $\pi$-Bund in $G$ und $K$ aus $\mathfrak{K}$, so ist $\mathfrak{K} = K^G$. Insbesondere ist in einer endlichen auflösbaren Gruppe jeder $\pi$-Bund $\mathfrak{K}$ die volle Konjugiertenklasse einer Untergruppe aus $\mathfrak{K}$.*

## 3. $p$-dedekindsche und schwachdedekindsche Gruppen.

DEFINITION 3.1.: Sei $p$ eine Primzahl. Die Gruppe $G$ heißt $p$-dedekindsch, wenn jede $p$-Untergruppe von $G$ schwachnormal in $G$ ist.

Satz 3.2.: *Die folgenden Eigenschaften der Gruppe $G$ sind äquivalent:*

(*a*) *$G$ ist $p$-dedekindsch;*

(*b*) *$G$ besitzt nur endlich viele $p$-Sylowgruppen; ist $U$ eine Untergruppe der $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$, so ist $U$ normal in $\mathfrak{N}_G(P)$.*

Beweis. Sei $G$ eine $p$-dedekindsche Gruppe und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Dann ist $|P^G| < \infty$, und nach Satz 1.5 besteht $P^G$ genau aus den sämtlichen $p$-Sylowgruppen von $G$. Ist $U$ eine Untergruppe von $P$, so gilt $U \lhd \mathfrak{N}_G(P)$ nach Satz 1.14(2). Aus (*a*) folgt also (*b*).

Sei (*b*) erfüllt, und sei $C$ eine $p$-Untergruppe von $G$. Dann folgt mit Hilfe von Satz 1.14(2), daß $C$ in $G$ schwachnormal ist. Also ist $G$ eine $p$-dedekindsche Gruppe. Damit ist Satz 3.2 bewiesen.

Bemerkung: Wie aus Satz 1.5 folgt, kann man die zweite Hälfte der Bedingung (*b*) ersetzen durch: Es gibt eine $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ mit der Eigenschaft, daß jede Untergruppe von $P$ normal in $\mathfrak{N}_G(P)$ ist.

Lemma 3.3.: *Untergruppen $p$-dedekindscher Gruppen sind $p$-dedekindsche Gruppen. Faktorgruppen $p$-dedekindscher Torsionsgruppen sind $p$-dedekindsche Torsionsgruppen.*

Beweis. Die erste Behauptung ist eine unmittelbare Folge aus Definition 3.1.

Sei $Q$ ein Normalteiler der $p$-dedekindschen Torsionsgruppe $H$ und sei $H/Q$ eine $p$-Gruppe; ferner sei $S$ eine $p$-Sylowgruppe von $H$. Angenommen, es ist $QS \neq H$. Dann existiert in $H$ ein Element $g$ von $p$-Potenzordnung mit $g \notin QS$. Da $H$ eine $p$-dedekindsche Gruppe ist, hat die endliche Gruppe $\{g\}$ nur endlich viele Konjugierte in $H$, also (Specht, [9], p. 47) liegt $g$ in einem endlichen Normalteiler $N$ von $H$. Da $H$ nur endlich viele $p$-Sylowgruppen hat, ist (Specht, [9], p. 385) $S \cap N$ eine $p$-Sylowgruppe von $N$; es gibt ein $a$ in $N$ mit $g^a \in S \cap N$, und zwar können wir $a$ aus $N \cap Q$ wählen. Aus $g^a \in S$ folgt nun $g \in QS$, was ein Widerspruch ist. Also ist $H = QS$.

Sei $G$ eine $p$-dedekindsche Torsionsgruppe; ferner sei $Q$ ein

Normalteiler von $G$ und $T/Q$ eine $p$-Untergruppe von $G/Q$. Ist $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $T$, so ist also $T = QP$ und damit $T/Q = PQ/Q$. Da $P$ eine schwachnormale Untergruppe von $G$ ist, ist $T/Q = PQ/Q$ eine schwachnormale Untergruppe von $G/Q$ nach Lemma 1.9. Also ist jede $p$-Untergruppe von $G/Q$ schwachnormal in $G/Q$, und $G/Q$ ist $p$-dedekindsch. Damit ist Lemma 3.3 bewiesen.

LEMMA 3.4.: *Ist $G$ eine $p$-dedekindsche $p$-Gruppe und nicht abelsch, so ist $p = 2$ und $G \simeq Q \otimes E$, wobei $Q$ die Quaternionengruppe der Ordnung 8 und $E$ eine elementar abelsche 2-Gruppe ist.*

Beweis. Aus Satz 3.2 folgt, daß jede Untergruppe von $G$ normal in $G$ ist; die Behauptung folgt nun aus (M. Hall, [6], Th. 12.5.4).

Sei $p$ eine Primzahl und $A$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^n$. Dann hat $\mathfrak{A}(A)$ die Ordnung $p^{n-1}(p-1)$, und im Fall $p \neq 2$ ist $\mathfrak{A}(A)$ zyklisch, man vergleiche (Burnside, [3], p. 114). Die Untergruppe der Ordnung $p-1$ von $\mathfrak{A}(A)$ ist eine Gruppe von Frobeniusautomorphismen von $A$. Dies ist trivial für $n = 1$; für $n > 1$ folgt die Aussage durch Induktion nach $n$ mit Hilfe der Tatsache, daß $\mathfrak{A}(A)$ in der Untergruppe $B = A^p$ von $A$ die volle Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(B)$ induziert. Diese wohlbekannten Tatsachen fassen wir zusammen zu

LEMMA 3.5.: *Ist $p$ eine Primzahl und $A \neq 1$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $p^n$, so hat kein Automorphismus $1 \neq \alpha \in \mathfrak{A}(A)$, dessen Ordnung zu $p$ prim ist, ein von 1 verschiedenes Fixelement in $A$. Die Ordnung von $\mathfrak{A}(A)$ ist $p^{n-1}(p-1)$; im Fall $p \neq 2$ ist $\mathfrak{A}(A)$ zyklisch.*

SATZ 3.6.: *Sei $G$ eine $p$-dedekindsche Torsionsgruppe, und sei die $p$-Sylowgruppe $P$ von $G$ normal in $G$. Ist $p \neq 2$, so ist $1 = P \cap Z(G)$ oder $P \leqslant Z(G)$; ist $p$ die kleinste Primzahl aus $c(G)$ und $P$ abelsch, so gilt $P \leqslant Z(G)$.*

Beweis. Jedes $p$-Element von $G$ liegt nach Voraussetzung in $P$; nach Satz 3.2 ist jede $p$-Untergruppe von $G$ normal in $\mathfrak{N}_G(P) = G$.

Sei $p \neq 2$. Nach Lemma 3.4 ist dann $P$ abelsch. Wir nehmen an, daß $1 < P \cap Z(G) < P$ gilt. Nach Lemma 3.5 gibt es dann ein Element $y$ aus $P \setminus (P \cap Z(G))$ mit $0(y) = p$; ferner gibt es ein $x$ in $P \cap Z(G)$ mit $0(x) = p$ und ein $g$ aus $G$ mit $y^g \neq y$; es existieren natürliche Zahlen $n$ und $m$ mit $1 < n < p$ und $1 \leqslant m < p$, so daß $y^g = y^n$ und

$$y^n x = y^g x = (yx)^g = (yx)^m = y^m x^m$$

ist; es folgt $y^{n-m} = x^{m-1} = 1$, also $1 = m = n$ im Widerspruch zu $1 \neq n$. Daher ist $1 < P \cap Z(G) < P$ unmöglich; es ist $1 = P \cap Z(G)$ oder $P \leqslant Z(G)$.

Sei nun $p$ die kleinste Primzahl aus $c(G)$ und $P$ abelsch; wir können $P \neq 1$ annehmen. Sei $z \neq 1$ ein Element aus $P$. Die Torsionsgruppe $G$ induziert eine Automorphismengruppe $H \simeq G/\mathfrak{C}_G(\{z\})$ von $\{z\}$ mit $c(H) \leqslant c(G) \setminus [p]$; und aus Lemma 3.5 folgt $0(H) \mid (p-1)$. Da $p$ die kleinste Primzahl aus $c(G)$ ist, folgt $0(H) = 1$, also gilt $P \leqslant Z(G)$. Damit ist Satz 3.6 bewiesen.

Bemerkung: In Satz 3.6 kann nicht auf die Voraussetzung verzichtet werden, daß $G$ eine Torsionsgruppe ist. Sei $G$ definiert durch $G = \{a, z\}$ mit den Relationen $a^{(p^2)} = 1$ und $z^{-1}az = a^{1+p}$. Die Gruppe $G$ ist eine $p$-dedekindsche Gruppe mit zyklischer normaler $p$-Sylowgruppe $\{a\}$, aber es ist $1 < \{a^p\} = \{a\} \cap Z(G) < \{a\}$.

Satz 3.7.: *Sei $G$ eine lokal endliche $p$-dedekindsche Gruppe und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Ist $p$ die kleinste Primzahl aus $c(G)$, so besitzt $P$ ein normales Komplement in $G$.*

Beweis. Seien $a$ und $b$ zwei $p'$-Elemente aus $G$. Dann ist $H = \{a, b\}$ eine endliche $p$-dedekindsche Gruppe. Angenommen, $H$ enthält keinen $p'$-Hall'schen Normalteiler $N$ von $H$. Dann gibt es (M. Hall, [6], Th. 14.4.7) eine $p$-Untergruppe $Q$ von $H$ und ein Element $x$ aus $H$, so daß $(0(x), p) = 1$ gilt und $x$ aus $\mathfrak{N}_H(Q) \setminus \mathfrak{C}_H(Q)$ ist. Da $Q$ normale $p$-Sylowgruppe der $p$-dedekindschen Gruppe $R = \{Q, x\}$ ist, ist jede $p$-Untergruppe von $R$ normal in $R$ nach Satz 3.2. Es gibt ein $b$ in $Q$ mit $b \neq x^{-1}bx \in \{b\}$. Sei $0(b) = p^n$ und $B = \{b\}$. Die Automorphismengruppe $\mathfrak{A}(B)$ von $B$ hat die Ordnung $p^{n-1}(p-1)$. Die zu $p$ teilerfremde Ordnung des von $x$ in $B$ induzierten Automorphismus $\alpha \neq 1$ teilt also einerseits $p-1$, andererseits teilt sie $0(x)$, und $p$ ist die kleinste Primzahl in $c(R)$. Dies ist ein Widerspruch; also enthält $H$ einen $p'$-Hall'schen Normalteiler $N$ von $H$. Daher ist $\{a, b\} =$

$= N = H$ eine $p'$-Untergruppe von $G$; die Menge der $p'$-Elemente von $G$ ist eine vollinvariante Untergruppe $K$ von $G$. Sei nun $g$ ein Element aus $G$. Wegen $0(g) > 0$ gibt es ein $p$-Element $x$ und ein $p'$-Element $y$ in $G$ mit $g = xy = yx$. Da $G$ eine $p$-dedekindsche Gruppe ist, besitzt die endliche $p$-Untergruppe $\{x\}$ von $G$ nur endlich viele Konjugierte in $G$. Da $G$ lokal endlich ist, liegt also $x$ in einem endlichen Normalteiler $M$ von $G$. Aus $| G : \mathfrak{N}_G(P) | < \infty$ folgt, daß $M \cap P$ eine $p$-Sylowgruppe von $M$ ist (Specht, [9], p. 385). Für den $p'$-Hall'schen Normalteiler $L$ von $M$ gilt $M = (M \cap P)L$; es folgt $x \in (M \cap P)L$. Wir haben also $g = xy \in (M \cap P)LK \leqslant PK$. Daher gilt $G = PK$, und wegen $1 = P \cap K$ ist $K$ ein normales Komplement von $P$ in $G$. Damit ist Satz 3.7 bewiesen.

Satz 3.8.: *Sei $G$ eine $p$-dedekindsche Torsionsgruppe und $P$ eine $p$-Sylowgruppe von $G$. Sei $N = \mathfrak{N}_G(P)$ und $C = \mathfrak{C}_G(P)$, ferner sei $A = N/C$. Dann gilt*

(*a*) *ist $P$ abelsch, so ist $A$ eine endliche zyklische Gruppe, deren Ordnung $p - 1$ teilt*;

(*b*) *ist $P$ nicht abelsch, so ist $p = 2$ und $A$ eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung* 4.

Beweis. Sei $P$ abelsch und $P \neq 1$. Seien $x \neq 1$ und $z \neq 1$ Elemente aus $P$. Wir setzen $S = \mathfrak{C}_N(x)$ und $T = \{z, x, S\}$. Dann ist $1 \neq x \in Z(T) \cap (T \cap P)$; da $T \cap P$ eine normale $p$-Sylowgruppe der $p$-dedekindschen Torsionsgruppe $T$ ist, folgt $z \in Z(T)$ nach Satz 3.6. Für jedes $z$ aus $P$ gilt also $\mathfrak{C}_N(x) \leqslant \mathfrak{C}_N(z)$; es folgt $\mathfrak{C}_N(x) = \mathfrak{C}_N(P) = \mathfrak{C}_G(P) = C$. Daher ist $A = N/C$ isomorph zu einer Untergruppe von $\mathfrak{A}(\{x\})$; wegen $(p, 0(N/C)) = 1$ folgt nun (*a*) aus Lemma 3.5.

Ist $P$ nicht abelsch, so ist $p = 2$ nach Lemma 3.4 und $P = Q \otimes E$, wobei $Q$ isomorph der Quaternionengruppe der Ordnung 8 und $E$ vom Exponenten 2 ist. Da alle Untergruppen von $P$ normal in $N$ sind, sind alle Elemente der Ordnung 2 aus $P$ in $Z(N)$ enthalten. Die Gruppe I der inneren Automorphismen von $Q$ ist elementar abelsch der Ordnung 4, und I enthält alle Automorphismen von $Q$, die jede Untergruppe von $Q$ in sich überführen. Also ist $N/C$ eine elementar abelsche Gruppe der Ordnung 4. Damit ist Satz 3.8 bewiesen.

BEMERKUNG: Sei $p$ eine Primzahl und $P$ eine Gruppe vom Typ $Z(p^\infty)$. Die Automorphismengruppe $H$ von $P$ ist abelsch und nicht zyklisch. Wir können $P$ mit einer freien abelschen Gruppe $F$ zu einer Gruppe $G$ erweitern, so daß $G/\mathfrak{C}_G(P) \simeq H$ ist. Dann ist $G$ eine $p$-dedekindsche Gruppe und $P$ eine normale $p$-Sylowgruppe von $G$, aber $G/\mathfrak{C}_G(P) \simeq H$ ist nicht zyklisch. Man kann also in Satz 3.8 die Voraussetzung, daß G Torsionsgruppe ist, nicht ohne Ersatz fallenlassen.

SATZ 3.9.: *Die Gruppen $G$ und $H$ seien p-dedekindsch; $P$ sei eine p-Sylowgruppe von $G$ und $R$ eine p-Sylowgruppe von $H$. Dann gilt*

(1) *ist $p$ nicht aus $c(H)$, so ist $G \otimes H$ eine p-dedekindsche Gruppe;*

(2) *seien $P$ und $R$ abelsch, und sei $p$ aus $c(G) \cap c(H)$. Genau dann ist $G \otimes H$ eine p-dedekindsche Gruppe, wenn $\mathfrak{N}_G(P) = \mathfrak{C}_G(P)$ und $\mathfrak{N}_H(R) = \mathfrak{C}_H(R)$ ist;*

(3) *sei $P$ nicht abelsch. Dann ist $p = 2$. Sei 2 aus $c(H)$. Genau dann ist $G \otimes H$ eine 2-dedekindsche Gruppe, wenn $R$ elementar abelsch ist.*

Beweis. Wir setzen $K = G \otimes H$.

Sei $R = 1$. Dann ist nach Satz 3.2 jede Untergruppe von $P$ normal in $\mathfrak{N}_G(P) \otimes H = \mathfrak{N}_K(P)$, und $P$ ist eine $p$-Sylowgruppe von $K$. Da mit $G$ auch $K$ nur endlich viele $p$-Sylowgruppen besitzt, folgt mit Satz 3.2, daß $K$ eine $p$-dedekindsche Gruppe ist. Damit ist (1) bewiesen.

Sei die Voraussetzung von (2) erfüllt, und sei etwa $\mathfrak{N}_G(P) \neq \mathfrak{C}_G(P)$. Sei $h$ ein Element aus $R$ mit $0(h) = p$. Es gibt Elemente $z$ aus $P$ und $g$ aus $\mathfrak{N}_G(P)$ mit $z^g \neq z$ und $0(z) = p$ (Lemma 3.5). Es folgt $\{zh\}^g \neq \{zh\}$, wobei $zh$ ein Element der $p$-Sylowgruppe $P \otimes R$ von $K$ und $g$ aus $\mathfrak{N}_K(P \otimes R)$ ist. Nach Satz 3.2 ist also $K$ nicht $p$-dedekindsch.

Sei nun umgekehrt $\mathfrak{N}_G(P) = \mathfrak{C}_G(P)$ und $\mathfrak{N}_H(R) = \mathfrak{C}_H(R)$. Dann ist $\mathfrak{N}_K(P \otimes R) = \mathfrak{N}_G(P) \otimes \mathfrak{N}_H(R) = \mathfrak{C}_G(P) \otimes \mathfrak{C}_H(R) = \mathfrak{C}_K(P \otimes R)$, und $P \otimes R$ ist eine $p$-Sylowgruppe von $K$. Da $K$ nur endlich viele $p$-Sylowgruppen besitzt, können wir Satz 3.2 anwenden und erhalten, daß $K$ eine $p$-dedekindsche Gruppe ist. Also gilt (2).

Ist $P$ nicht abelsch, so ist $p = 2$ und $P$ isomorph dem direkten Produkt aus der Quaternionengruppe und einer Gruppe vom Exponenten 2 (Lemma 3.4). Ist $R$ nicht vom Exponenten 2, so gibt es ein Element $v$ der Ordnung 4 aus $R$. Seien $x$ und $y \neq x^{-1}$ zwei verschiedene Elemente der Ordnung 4 aus $P$. Dann ist $\{xv\}^y \neq \{xv\}$, aber $\{xv\}^y \leqslant \mathfrak{N}_K(\{xv\})$ und $|\{xv\}^K| < \infty$. Also ist $K$ nicht 2-dedekindsch.

Ist umgekehrt $R$ vom Exponenten 2, so gilt $\mathfrak{N}_H(R) = \mathfrak{C}_H(R)$, da nach Satz 3.2 jede Untergruppe von $R$ normal in $\mathfrak{N}_H(R)$ ist. Nun folgt leicht, daß jede Untergruppe von $P \otimes R$ normal in $\mathfrak{N}_K(P \otimes R)$ ist. Da $P \otimes R$ eine 2-Sylowgruppe von $K$ ist und $K$ nur endlich viele 2-Sylowgruppen besitzt, ist $K$ nach Satz 3.2 eine 2-dedekindsche Gruppe. Damit ist Satz 3.9 bewiesen.

Definition 3.10.: Die Gruppe $G$ heißt schwachdedekindsch, wenn alle primären Untergruppen von $G$ schwachnormal in $G$ sind.

Lemma 3.11.: *Untergruppen schwachdedekindscher Gruppen sind schwachdedekindsche Gruppen. Epimorphe Bilder schwachdedekindscher Torsionsgruppen sind schwachdedekindsche Torsionsgruppen.*

Beweis. Eine Gruppe ist genau dann schwachdedekindsch, wenn sie für jede Primzahl $p$ eine $p$-dedekindsche Gruppe ist. Daher ist Lemma 3.11 eine unmittelbare Folgerung aus Lemma 3.3.

Lemma 3.12.: *Ist $M$ eine endliche Menge von Elementen endlicher Ordnung der schwachdedekindschen Gruppe $G$, so liegt $M$ in einem endlichen Normalteiler von $G$. Die Menge der Elemente endlicher Ordnung aus $G$ ist also eine vollinvariante lokal endliche Untergruppe von $G$.*

Beweis. Jedes Element endlicher Ordnung aus $G$ hat in $G$ nur endlich viele Konjugierte. Nun folgt die Behauptung aus dem Lemma von Dietzmann (Specht, [9], p. 47).

Satz 3.13.: *Die Gruppe $G \neq 1$ sei nicht torsionsfrei. Sei $c(G) = [p_i, i \in I]$ mit $p_i < p_{i+1}$ für alle $i$, $i+1$ aus $I$, wobei $I$ die Menge der natürlichen Zahlen oder ein geeigneter Abschnitt der natürlichen Zahlenreihe ist. Genau dann ist $G$ schwachdedekindsch, wenn gilt:*

*Für jedes $i$ aus $I$ ist die Menge der $[p_i, p_{i+1}, ...]$-Elemente aus $G$ eine (vollinvariante) Untergruppe $Q_i$ von $G$; für jede $p_i$-Untergruppe $A$ von $G$ ist $AQ_{i+1}$ normal in $G$ (wobei $Q_{i+1} = 1$ gesetzt ist, falls $i$ aus $I$, aber $i + 1$ nicht aus $I$ ist); jede $p_i$-Sylowgruppe von $G$ besitzt nur endlich viele Konjugierte in $G$.*

Beweis. Sei $G$ schwachdedekindsch. Nach Lemma 3.12 ist die Menge der Elemente endlicher Ordnung aus $G$ eine vollinvariante lokal endliche Untergruppe $Q$ von $G$. Durch vollständige Induktion mit Hilfe von Satz 3.7 nach $i$, $i \in I$, folgt, daß für jedes $i$ aus $I$ die Menge der $[p_i, p_{i+1}, ...]$-Elemente von $Q$ eine vollinvariante Untergruppe $Q_i$ von $Q$ (und von $G$) ist. Daher ist $Q_i/Q_{i+1}$ eine normale $p_i$-Sylowgruppe von $G/Q_{i+1}$. Sei $A$ eine $p_i$-Untergruppe von $G$. Nach Lemma 1.9 ist $AQ_{i+1}/Q_{i+1}$ eine schwachnormale Untergruppe von $G/Q_{i+1}$, also ist $AQ_{i+1}/Q_{i+1}$ nach Satz 1.14 normal in $\mathfrak{N}_{G/Q_{i+1}}(Q_i/Q_{i+1}) = G/Q_{i+1}$. Es folgt, daß $AQ_{i+1}$ in $G$ normal ist. Jede primäre Untergruppe von $G$ besitzt nur endlich viele Konjugierte in $G$.

Sei umgekehrt die angegebene Bedingung erfüllt, und seien $A$ eine $p_i$-Untergruppe von $G$ und $x$ ein Element aus $G$ mit $A \neq A^x \leqslant \leqslant \mathfrak{N}_G(A)$. Dann ist $S = \{A^x, A\}$ eine $p_i$-Untergruppe von $G$ mit $A < S$, es folgt $AQ_{i+1} < SQ_{i+1}$. Wegen $AQ_{i+1} \lhd G$ ist andererseits $AQ_{i+1} = SQ_{i+1}$. Dieser Widerspruch beweist $A^x = A$. Sei $P$ eine $A$ enthaltende $p_i$-Sylowgruppe von $G$. Wegen $AQ_{i+1}/Q_{i+1} \lhd G/Q_{i+1}$ folgt $A \lhd P$. Aus $|P^G| < \infty$ folgt daher $|A^G| < \infty$. Also ist $A$ schwachnormal in $G$, und $G$ ist eine schwachdedekindsche Gruppe. Damit ist Satz 3.13 bewiesen.

Folgerung 3.14.: *Die endliche Gruppe $G$ ist genau dann schwachdedekindsch, wenn folgende Bedingung (*) erfüllt ist:*

(*) *Ist $H$ ein epimorphes Bild von $G$ und $p$ der größte Primteiler von $|H|$, so ist jede $p$-Untergruppe von $H$ normal in $H$.*

Satz 3.15: *Ist $G$ eine schwachdedekindsche Torsionsgruppe, so ist die Kommutatorgruppe von $G$ abelsch.*

Beweis. Nach Satz 3.13 ist $G$ lokal endlich. Wir können daher annehmen, daß $G$ endlich ist. Dann ist $G$ überauflösbar, also $G'$ nilpotent (M. Hall, [6], Th. 10.5.4). Für $p \neq 2$ sind die $p$-Sylowgruppen von $G$ abelsch, also auch die $p$-Sylowgruppen von $G'$. Ebenso ist natürlich die 2-Sylowgruppe von $G'$ abelsch, falls die 2-Sylowgruppen von $G$ abelsch sind. Es bleibt zu zeigen: Die 2-Sylowgruppe von $G'$ ist auch dann abelsch, wenn die 2-Sylowgruppen von $G$ nicht abelsch sind. Sei also die 2-Sylowgruppe $P$ von $G$ nicht abelsch. $P$ ist dann isomorph dem direkten Produkt aus der Quaternionengruppe und einer elementar abelschen 2-Gruppe (Lemma 3.4). Sei $g$ ein Element der Ordnung 4 aus $G$, und sei $N$ das normale Komplement von $P$ in G (Satz 3.7). Wir setzen $M = \{g^2\} N$. Dann ist $M$ normal in $G$, ferner ist $g$ nicht in $M$ enthalten und $G/M$ abelsch. Daher ist $g$ nicht in $G'$ enthalten; die 2-Sylowgruppe von $G'$ ist also elementar abelsch. Damit ist Satz 3.15 bewiesen.

Bemerkung: Man kann in Satz 3.15 die Voraussetzung, daß $G$ eine Torsionsgruppe ist, nicht ohne Ersatz fallen lassen; zum Beispiel ist jede torsionsfreie Gruppe schwachdedekindsch.

Nach Folgerung 3.14 ist jede endliche schwachdedekindsche Gruppe überauflösbar; aber nicht jede endliche überauflösbare Gruppe ist schwachdedekindsch. Jede endliche Gruppe mit zyklischen $p$-Sylowgruppen ist $p$-dedekindsch. Eine endliche Gruppe $G$, deren sämtliche Sylowgruppen zyklisch sind, ist also schwachdedekindsch, und nach Satz 3.15 ist $G$ zyklische Erweiterung einer zyklischen Gruppe; man vergleiche (M. Hall, [6], Th. 9.4.3). Aus der Auflösbarkeit der Gruppen ungerader Ordnung (Feit - Thompson, [4]) folgt mit Hilfe von Satz 3.7, daß jede endliche 2-dedekindsche Gruppe auflösbar ist. Ist $G$ eine endliche schwachdedekindsche Gruppe, so sind nach Satz 1.8 alle Untergruppen von $G$ schwachnormal in $G$.

## LITERATUR

[1] Baer R.: *Sylow Theorems for infinite groups*. Duke Math. J., 6, (1940), 598-614.

[2] Baer R.: *Verstreute Untergruppen endlicher Gruppen*. Archiv d. Math., 9 (1958), 7-17.

[3] Burnside W.: *The Theory of groups of finite order*, 2nd ed. Cambridge University Press, 1911.

[4] FEIT W., THOMPSON J. G.: *Solvability of groups of odd order*. Pac. J. Math., 13 (1963), 775-1030.

[5] GOLBERG P. A.: *Über eine Bedingung für die Konjugiertheit der π-Sylowbasen einer beliebigen Gruppe*. Mat. Sbornik (N. S.), 36 (78) (1955), 335-340 [russisch].

[6] HALL M., Jr.: *The Theory of groups*. New York: The Macmillan Company, 1959.

[7] HALL P.: *On the Sylow systems of a soluble group*. Proc. Lond. Math. Soc. (2), 43 (1937), 316-323.

[8] HALL P.: *Theorems like Sylow's*. Proc. Lond. Math. Soc. (3), 6 (1956), 286-304.

[9] SPECHT W.: *Gruppentheorie*. Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1956.

[10] ZAPPA G.: *Sopra un'estensione di Wielandt del teorema di Sylow*. Boll. Unione Mat. Ital. (3), 9 (1954), 349-353.

Manoscritto pervenuto in redazione il 5 agosto 1965.